Calcolo di limiti - 2

Oltre agli esercizi che seguono, svolgere i seguenti esercizi del libro di testo:

- 4.8.1
- 4.8.3
- 4.8.4
- 4.9.1
- 5.1.1
- 5.2.2
- 5.3.1

e l'Esempio 4.78 (*ii*)–(*iv*).

Calcolare i seguenti limiti:

1 $\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{arctg} x + \operatorname{tg} x)^{\frac{1}{\log x}}$

2 $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2n^2 + n^2 \cos n}$

3 $\lim_{n\to+\infty} \frac{2n!}{3^{n^2}}$

4 $\lim_{n\to+\infty} \frac{2n!}{3^{2n}}$

5 $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\log n + 3^n - n^3}$

6 $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2-n!}{3-n!}\right)^{(n+2)!}$

7 $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n!-1}{n!+2}\right)^{\log 5n}$

8 $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2 e^{3n} n! + \sin(n!)}{n^n + e^{3n}}$

9 $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{(\log n)^3} + e^{(\log n)^2}}{1 + (\log n)^n}$

10 $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2 2^n}{(n+1)!}$

11 $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!}$
Suggerimento: usare la formula di Stirling.

12 Mostrare che la funzione $f(x) = (1 + |\operatorname{sen} x|)^{-\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}}$ è infinitesima di ordine superiore a $|x|^k$ per $x \to 0$, qualunque sia $k > 0$.

13 Ordinare i seguenti infiniti, per $x \to 0^+$:

$$f(x) = \frac{\ln\left(1 - \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)}{x^2},$$

$$g(x) = \log_2\left(3 + \frac{1}{x^4} + 2^{1/x}\right),$$

$$h(x) = \frac{\pi - 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2}}{\operatorname{sen}^4 x}.$$

(*Suggerimento:* per l'ultima funzione usare l'identità

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \quad \forall\, x > 0).$$

14 Ordinare per ordine crescente di infinito (per $x \to +\infty$) le seguenti funzioni:

$$f(x) = (1 + \sqrt{x})^\pi,$$
$$g(x) = x \ln(x+5),$$
$$h(x) = x^{\arctan(\ln(\ln x))}.$$

15 Ordinare i seguenti infinitesimi, per $x \to +\infty$:

$$f(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{2x^2 + \sqrt{x}}; \qquad g(x) = \sqrt{9x^4 + 5} - 3x^2;$$

$$h(x) = x^{1 - \log x}; \qquad k(x) = \frac{1}{2\cos x + x^2 \log(2^x + 7)}.$$

16 Ordinare per ordine decrescente di infinito, per $x \to +\infty$, le seguenti funzioni:

$$f(x) = e^{\frac{x^2+1}{\sqrt{x-2}}}, \qquad g(x) = 2^{\frac{4(1-\cos(1/x))}{\ln(1+x^{-7/2})}},$$

$$h(x) = x^{2x}, \qquad k(x) = \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^{x^2}.$$

17 Calcolare l'ordine di infinito o infinitesimo della seguente funzione, al variare di $\alpha > 0$:

$$\frac{\operatorname{arctg} x^\alpha + 5x^4}{x + 3x^3}.$$

---

18 Supponiamo che $\lim_{n\to+\infty} a_{2n} \neq \lim_{n\to+\infty} a_{2n-1}$. Cosa si può concludere su $\lim_{n\to+\infty} a_n$?

19 Supponiamo che $\{a_{2n}\}$ e $\{a_{2n-1}\}$ siano crescenti. Si può concludere che $\lim_{n\to+\infty} a_n$ esiste?

20 Supponiamo che $\lim_{n\to+\infty} a_{2n} = l \in \mathbb{R}$. Quali delle seguenti affermazioni sulla successione $\{a_{n^2}\}$ sono vere, e perché?

a) $\lim_{n\to+\infty} a_{n^2} = l$;

b) $\lim_{n\to+\infty} a_{n^2} = \left(\frac{l}{2}\right)^2$;

c) $\lim_{n\to+\infty} a_{n^2}$ non necessariamente esiste, ma se esiste è pari a l;

d) $\lim_{n\to+\infty} a_{n^2}$ non necessariamente esiste, e se esiste può assumere anche valori distinti da l.

21 Data la successione $a_n = [(-1)^n + 1] \dfrac{n}{\log n}$, $n \geq 2$, determinarne l'estremo superiore e inferiore e stabilire se la successione ammette limite.

Mediante un appropriato uso del teorema "ponte", provare che i seguenti limiti non esistono:

22 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \cos^4(5x)\,.$

23 $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x+1}\,\mathrm{sen}(3x)\,.$

24 $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} (3x+1)\,\mathrm{tg}\,\frac{2}{x^2}\,.$

1 Risposte ad alcuni esercizi

1: e; **2:** 1; **3:** 0; **4:** $+\infty$; **5:** 3; **6:** $+\infty$; **7:** 1; **8:** $+\infty$; **9:** 0; **10:** 0; **11:** $+\infty$; **14:** $g,\ k,\ h,\ f$; **15:** $h(x)$ è l'infinitesimo di ordine più alto, poi seguono $k(x)$, $g(x)$, $f(x)$; **16:** g, f, k, h; **17:** Infinitesimo di ordine 3 se $\alpha \geq 4$, infinitesimo di ordine $\alpha - 1$ se $1 < \alpha < 4$, tende a 1 per $\alpha = 1$, infinito di ordine $1 - \alpha$ se $0 < \alpha < 1$; **18:** che non esiste l; **19:** no, ad esempio $a_{2n+1} = \dfrac{n}{n+1}, a_{2n} = n$; **20:** a) in generale è falso; b) in generale è falso; c) vero; d) falso; **21:** $\sup a_n = +\infty\,,\ \inf a_n = 0$, non ammette limite;