Funzioni continue.

DEF $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\quad x_0 \in X$ pto di accum. per X

f è continua in $x_0 \iff \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, cioè

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ t.c. $\forall x \in X$ verificante $\cancel{0 <} |x - x_0| < \delta$ si ha $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

non serve.

Cioè (per il teor. ponte).

$\forall$ succ^{ne} $\{a_n\}$ a valori in X verificante $a_n \to x_0$ si ha $f(a_n) \to f(x_0)$

Esempi di funzioni continue nel loro dominio:

- Potenze.
- Esponenziali
- Logaritmi.
- $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ $\quad \left(\lim_{x \to x_0} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x_0 \quad \forall x_0 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$

Per l'aritmetica dei limiti, somma, differenza, combinazioni lin, prodotto e rapporto di funzioni continue, sono continue nel loro dominio.

Per es. polinomi, funzioni razionali fratte $\dfrac{3x^2+5}{x^3-2x^4+7}$ è una f. continua nel suo dominio.

$$\frac{3\cos x - 5e^x}{2x^2 + \sqrt{x}}$$ è continua in $(0, +\infty)$

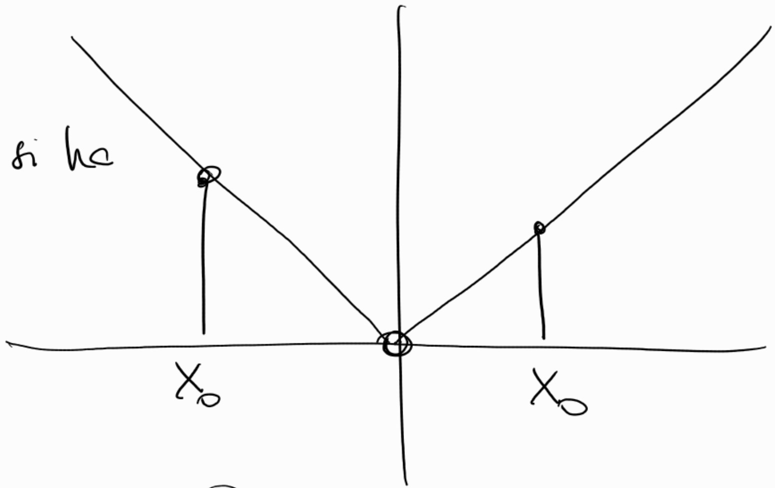
Vedremo poi che anche le funz. trigonom. inverse arcsin, arccos, e arctg sono continue nel loro dominio.

$f(x) = |x|$ è continua in $\mathbb{R}$.

1) Voglio verificare che $\lim_{x \to x_0} |x| = |x_0| \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$.

a) se $x_0 > 0$, in un intorno di x_0 $|x| = x$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} |x| = \lim_{x \to x_0} x = x_0 = |x_0|$$



b) se $x_0 < 0$, vicino a x_0 si ha

$|x| = -x$

idem

c) $x_0 = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 0^+} |x| = \lim_{x \to 0^+} x = 0 \\ \lim_{x \to 0^-} |x| = \lim_{x \to 0^-} (-x) = 0 \end{array}\right\} \lim_{x \to 0} |x| = 0 = |0|$$

2) In modo sintetico: uso la dis. triangolare per la differenza

$$\underset{\downarrow \atop 0}{0} \le \big||x| - |x_0|\big| \le \underbrace{|x - x_0|}_{\downarrow \atop 0} \qquad x \to x_0$$

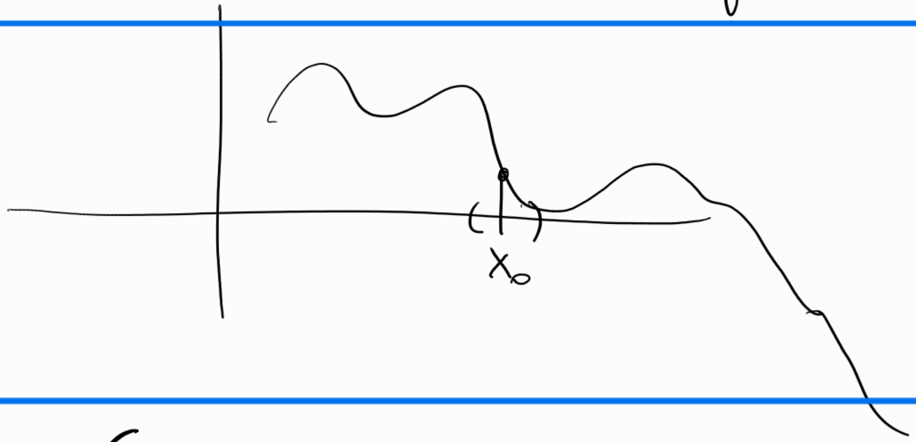
Ne segue che $\lim_{x \to x_0} \big||x| - |x_0|\big| = 0$, cioè

$$\lim_{x \to x_0} |x| = |x_0| \qquad \square$$

Risultati sulle f. continue che derivano dalle proprietà dei limiti.

PERMANENZA DEL SEGNO

Se f è continua in x_0, e $f(x_0)>0$, allora esiste un intorno di x_0 in cui $f(x)>0$.



TEOREMA (Composizione di funzioni continue)

Siano $g: X \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow Y \subseteq \mathbb{R}$, $f: Y \longrightarrow \mathbb{R}$.

(quindi resta definita la funzione composta $f \circ g: X \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto f(g(x))$)

Se g è continua in $x_0 \in X$, e f è continua in $g(x_0)$, allora $f \circ g$ è continua in x_0.

DIM

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0) \qquad \lim_{y \to g(x_0)} f(y) = f(g(x_0)) \quad \overset{?}{\Longrightarrow} \quad \lim_{x \to x_0} f(g(x)) = f(g(x_0))$$

vero per il teorema di limite di f. composte.

OSS Poiché f è continua in $g(x_0)$, non serve la cond^{ne} tecnica $(*)$
$g(x) \neq g(x_0)$ in un intorno di x_0

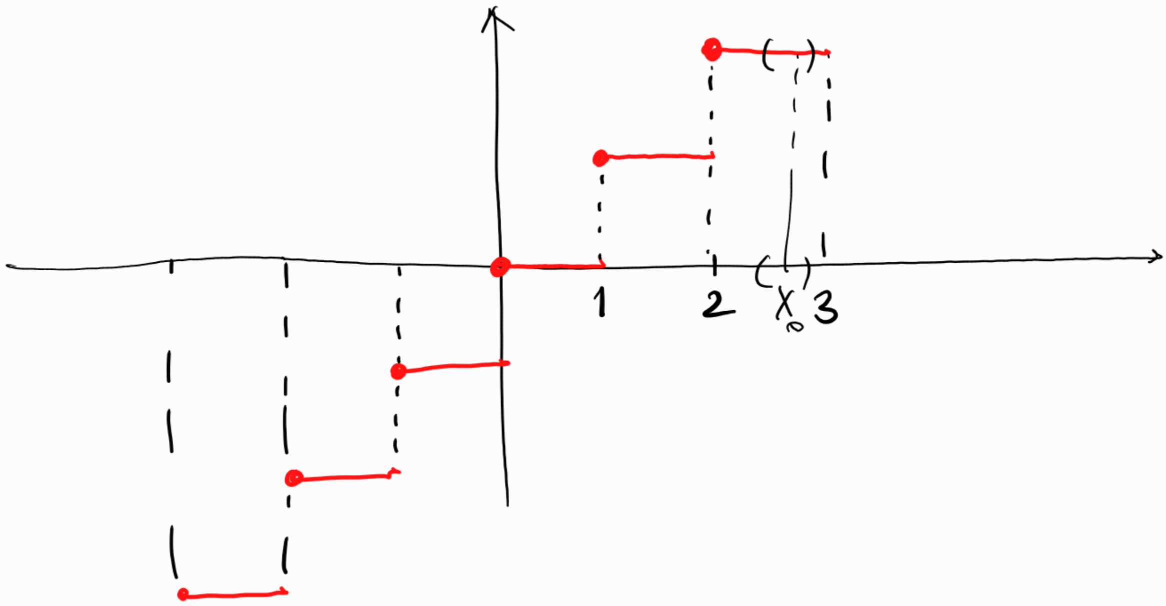
Conseguenza $\quad h(x) = \sin(x^2+3x^5)$ è continua in $\mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{(e^x+1)^x}{\sqrt[4]{(x+1)^2+\cos^4 x}} \qquad (e^x+1)^x = e^{x\log(e^x+1)}$$

è continua nel suo dominio

Esempi di funzioni discontinue:

$f(x) = \lfloor x \rfloor = \max\{k\in\mathbb{Z} : k \le x\}$ — parte intera di x



$f(x) = \lfloor x \rfloor$ è continua in tutti i punti x_0 che non sono interi

cioè se $x_0 \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, in un intorno di quel punto la f. è costante, e quindi continua.

Tuttavia se $x_0 \in \mathbb{Z}$,

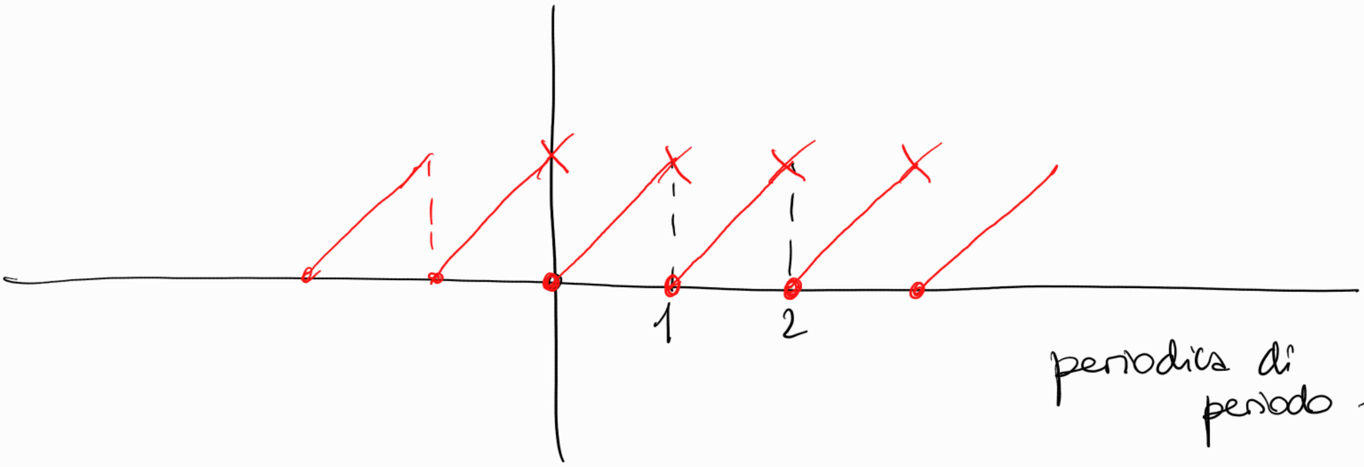
$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to x_0^+} \lfloor x \rfloor = x_0 = \lfloor x_0 \rfloor \\ &\lim_{x\to x_0^-} \lfloor x \rfloor = \lim_{x\to x_0^-} (x_0 - 1) = x_0 - 1 = \lfloor x_0 \rfloor - 1 \end{aligned}\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} \lfloor x \rfloor \nexists$$

Questa funzione è continua da destra, cioè

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0) \qquad \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

Altro esempio: $f(x) = \{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ parte frazionaria di x.



periodica di periodo 1.

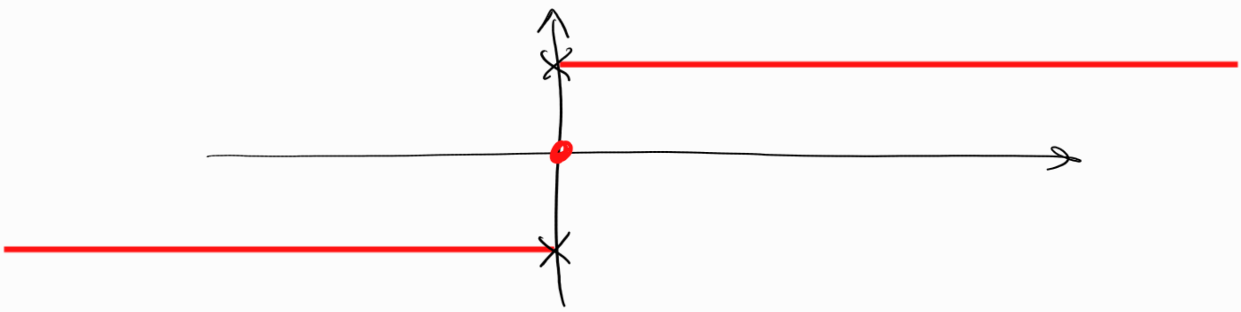
Continua nei punti x_0 non interi.
Ma è discontinua nei punti x_0 interi

$x_0 \in \mathbb{Z}$ $\quad \lim_{x \to x_0} \{x\} \nexists$ in quanto $\lim_{x \to x_0^-} \{x\} = 1$

$\lim_{x \to x_0^+} \{x\} = 0 = \{x_0\}$

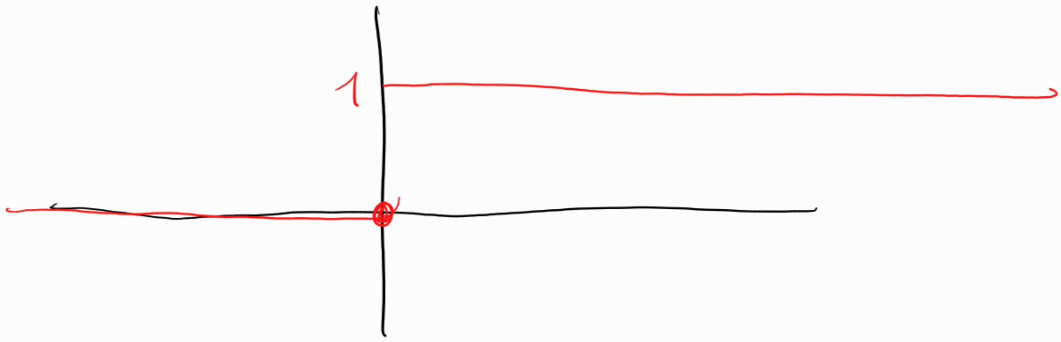
continua da destra.

$$f(x) = \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



Continua in tutti i punti eccetto $x_0 = 0$

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$ funzione di Heaviside.



Tutte queste funzioni hanno delle discontinuità di salto, o discontinuità di 1ª specie.

cioè $\exists \lim_{x \to x_0^+} f(x)$, $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ reali ma diversi tra loro.

Classificazione dei punti di discontinuità.

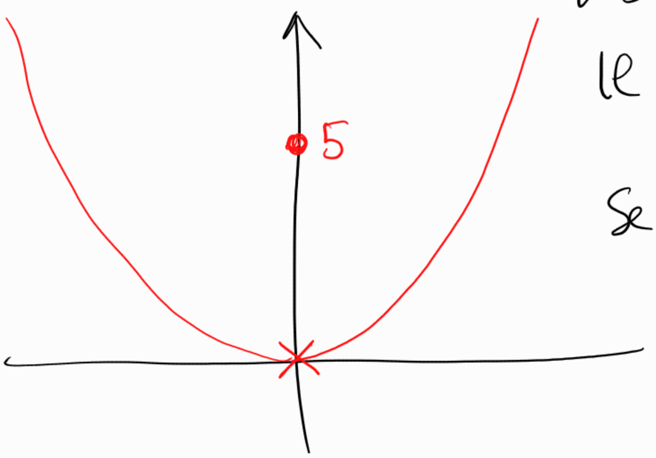
Sia $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in X$ pto non isolato di X.

Se f non è continua in x_0, diremo che:

1) f ha una "discontinuità eliminabile" in x_0 se $\exists$ finito $\lim_{x \to x_0} f(x)$, ma è diverso da $f(x_0)$.

Se prendiamo $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq x_0 \\ \lim_{x \to x_0} f(x) & \text{se } x = x_0 \end{cases}$ questa è continua.

Esempio $\quad f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \neq 0 \\ 5 & \text{se } x = 0 \end{cases}$



Il pto $x_0 = 0$ è un punto di discontinuità eliminabile

Se prendiamo

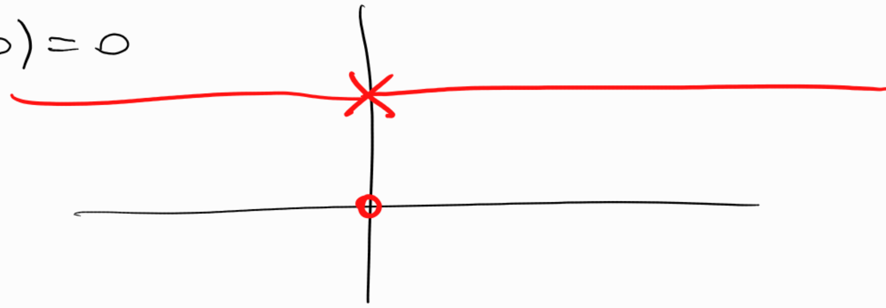
$$\tilde{f}(x) = x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

ottenuta cambiando il valore di f solo nel punto $x_0 = 0$, questa è continua

Esempio $f(x) = (\text{sign}\, x)^2 = \begin{cases} 1 & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$

f ha una discontinuità eliminabile in $x_0 = 0$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1 \neq f(0) = 0$



2) discontinuità di 1^a specie o di salto. (già viste)

3) discontinuità di 2^a specie:

tutti i casi rimanenti, cioè

- almeno uno dei due limiti destro/sinistro è infinito o non esiste.

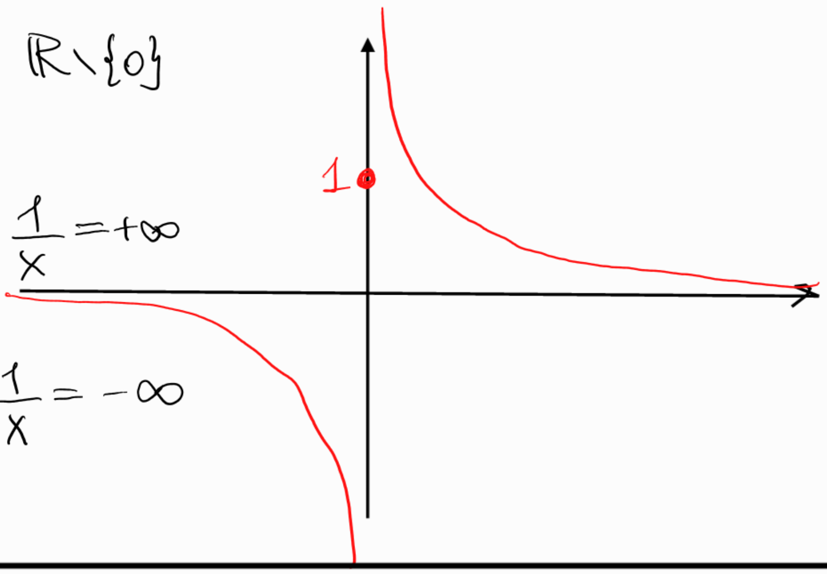
Esempio: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

f è continua in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

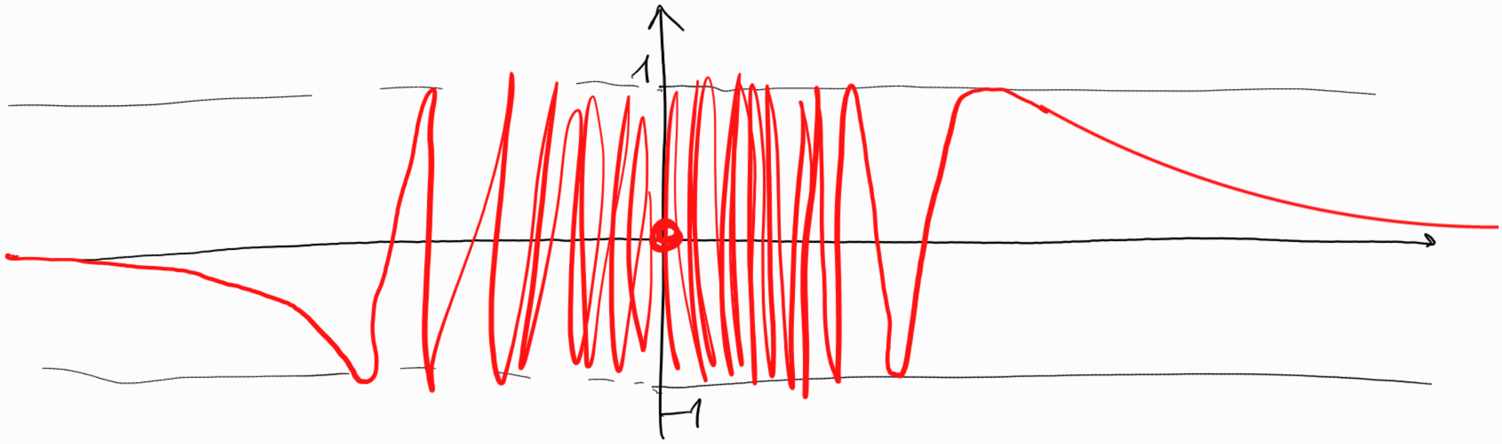
$x_0 = 0$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$



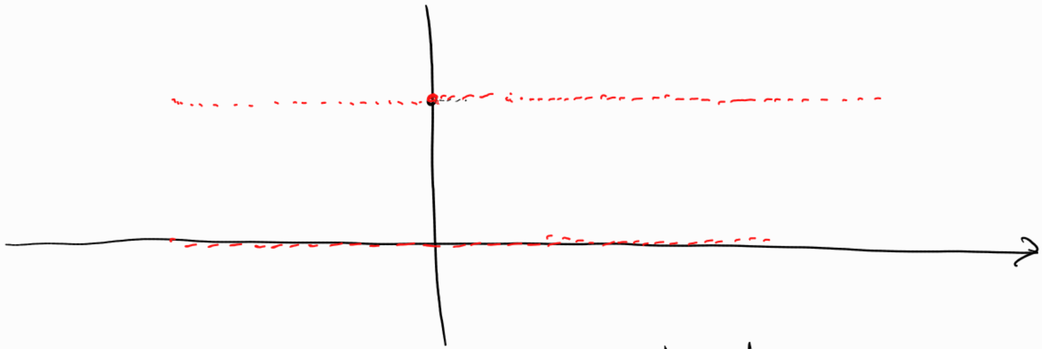
Esempio: $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$



$\nexists \lim_{x\to 0^+} f(x) \qquad \nexists \lim_{x\to 0^-} f(x)$

Funzione di Dirichlet

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$



f non è continua in <u>nessun punto</u>.

Infatti, poiché ogni intervallo contiene infiniti razionali (su cui f vale 1) e infiniti irrazionali (su cui f vale 0).

$\nexists \lim_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim_{x\to x_0^-} f(x) \qquad \forall x_0 \in \mathbb{R}$

<u>Esercizio</u>: Studiare (al variare di $p>0$), la continuità di

$$f_p(x) = \begin{cases} \dfrac{\log(1+px)}{x} & \text{se } x>0 \\[2ex] \dfrac{x^2+3x+1}{x^2+2} & \text{se } x\le 0 \end{cases}$$

1) Se $x_0>0$, esiste un intorno di x_0 in cui

$$f(x) = \frac{\log(1+px)}{x}$$

e quindi f è continua in ogni $x_0 > 0$ $\forall p > 0$

2) Se $x_0 < 0$, esiste un intorno di x_0 in cui

$$f(x) = \frac{x^2+3x+1}{x^2+2}$$

e quindi f è continua in ogni $x_0 < 0$ $\forall p > 0$.

f può avere problemi di continuità solo per $x_0 = 0$.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+3x+1}{x^2+2} = \frac{1}{2} = f(0)$$ sempre continua da sinistra.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \underbrace{\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+px)}{px}\, p}_{\downarrow \atop p} \overset{?}{=} f(0) = \frac{1}{2}$$

La funzione è continua in 0 se e solo se $p = \frac{1}{2}$.

Se $p \neq \frac{1}{2}$, la funzione ha una discontinuità di salto in $x_0 = 0$.

Studiare la continuità di $f(x) = \begin{cases} x \sin\frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

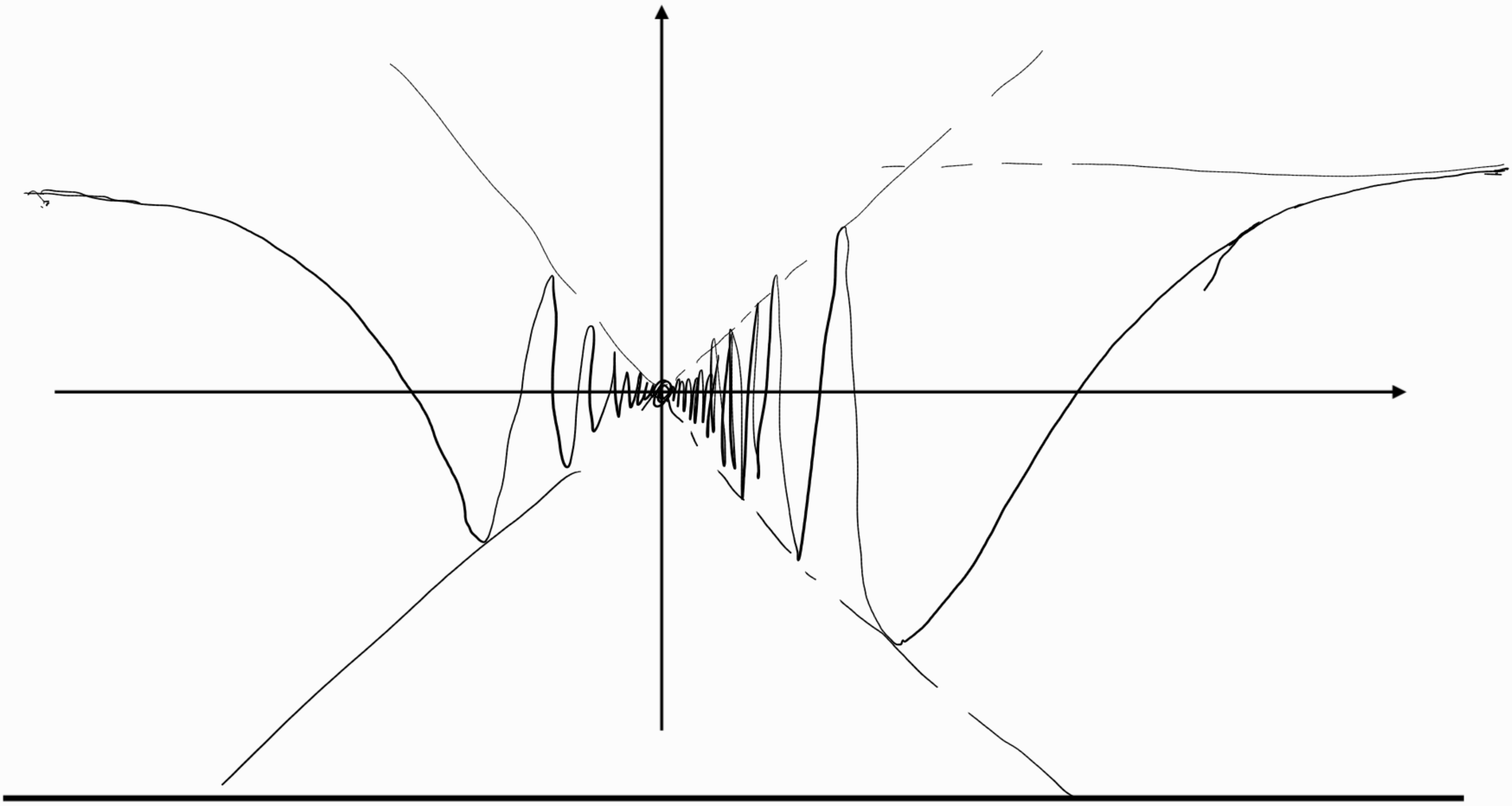
Nessun problema di continuità per $x_0 \neq 0$

Vediamo in $x_0 = 0$

$$\lim_{x\to 0} f(x) \overset{?}{=} f(0) = 0$$

$$\lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} \overset{?}{=} 0$$ vero! perché è il prodotto di una f. infinitesima (x) per una limitata $(\sin\frac{1}{x})$

Quindi f è continua in tutto $\mathbb{R}$



$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

E' evidentemente continua in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

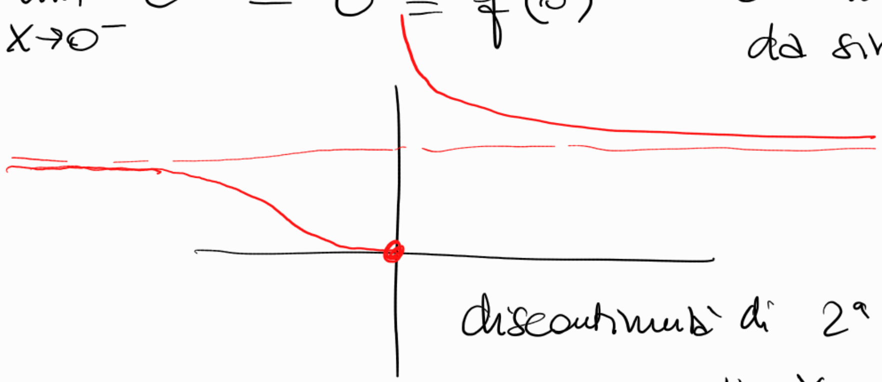
Problemi possibili solo in $x_0 = 0$.

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} e^{1/x}$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0 = f(0)$$

continua da sinistra.



discontinuità di 2ª specie in $x = 0$.