$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+2x^3\sin x}}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2(1+2x\sin x)}}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{|x|\sqrt{1+2x\sin x}}{x} \qquad \sqrt{1+2x\sin x} \to \sqrt{1} = 1$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}\left(1+o(1)\right) \quad \nexists$$

Infatti se $x\to 0^+$ $\quad \displaystyle\lim_{x\to 0^+} \underbrace{\frac{|x|}{x}}_{=1}\left(1+o(1)\right) = 1.$

se $x\to 0^-$ $\quad \displaystyle\lim_{x\to 0^-} \underbrace{\frac{|x|}{x}}_{=\frac{-x}{x}=-1}\left(1+o(1)\right) = -1.$

$$\lim_{x\to\pm\infty} e^{\underset{\downarrow 0}{1/x}} = \lim_{y\to 0} e^y = 1.$$

chiamiamo $y = \frac{1}{x} \to 0$

$$\lim_{x\to 0} e^{1/x}$$

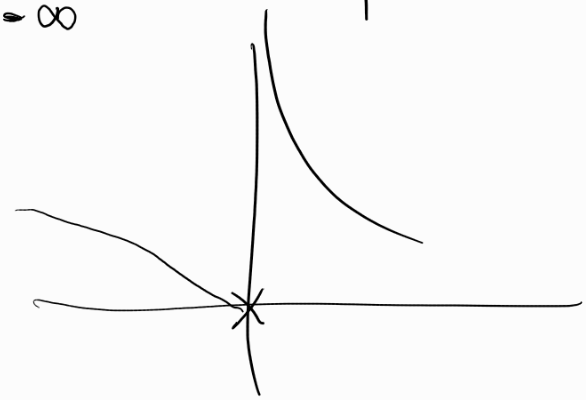
$1/x$ non ha limite

$\Rightarrow$ faccio separatamente $x\to 0^+$ e $x\to 0^-$

$$\lim_{x\to 0^+} e^{\underset{\downarrow +\infty}{1/x}} = \lim_{y\to +\infty} e^y = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} e^{\underset{\downarrow -\infty}{1/x}} = \lim_{y\to -\infty} e^y = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} e^{1/x} \nexists.$$



$$\lim_{x\to+\infty}\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi x^4-3x^3}{x^3\log(1+e^{2x})}\right)\right| = \lim_{y\to\frac{\pi}{2}}|\operatorname{tg} y| = (*)$$

$$\frac{\pi x^4-3x^3}{x^3\log(1+e^{2x})} = \frac{x^{\cancel{4}\,1}(\pi+o(1))}{\cancel{x^3}\log\left(e^{2x}\left(1+\frac{1}{e^{2x}}\right)\right)} =$$

$\log(e^{2x}) = 2x$

$$= \frac{x\,(\pi+o(1))}{2x+\underbrace{\log(1+o(1))}_{o(1)}} = \frac{\cancel{x}\,(\pi+o(1))}{\cancel{x}\left(2+\underbrace{\frac{o(1)}{x}}_{o(1)}\right)} = \frac{\pi}{2}$$

$$(*) = +\infty.$$

se $y\to\frac{\pi}{2}^{\pm} \Rightarrow \operatorname{tg} y \to \mp\infty \to |\operatorname{tg} y| \to +\infty$

Proviamo senza | |

$$\lim_{x\to+\infty}\operatorname{tg}\frac{\pi x^{\cancel{4}}-3\cancel{x^3}}{\cancel{x^3}\log(e^{2x}+1)} = \lim_{y\to\frac{\pi}{2}^-}\operatorname{tg} y = +\infty.$$

$\to \frac{\pi}{2}^-$

$$\frac{\pi x-3}{\log(e^{2x}+1)} = \frac{x\,(\pi-3/x)}{2x+\log\left(1+\frac{1}{e^{2x}}\right)} = \frac{\cancel{x}\,(\pi-3/x)}{\cancel{x}\left(2+\frac{\log\left(1+\frac{1}{e^{2x}}\right)}{x}\right)} < \frac{\pi}{2}$$

$(\pi-3/x) < \pi$

$\left(2+\frac{\log\left(1+\frac{1}{e^{2x}}\right)}{x}\right) > 2$

Confronto tra infiniti

1) $$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{b^x} = 0 \quad \forall b>1 \quad \forall\alpha\in\mathbb{R}.}$$

E' interessante solo quando $\alpha>0$, perché in questo caso è una f. i $\frac{\infty}{\infty}$.

Si dim. con il teor. ponte:

$$\text{se} \quad a_n \to +\infty \quad \Longrightarrow \quad \frac{(a_n)^\alpha}{b^{a_n}} \longrightarrow 0 .$$

Diremo anche che

"per $x \to +\infty$ $\quad b^x \ (b>1)$ è un <u>infinito di ordine superiore</u> rispetto a $x^\alpha \ (\alpha>0)$"

DEF Date due funzioni $f(x), g(x)$ t.c. $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$ (cioè: f, g sono due "infiniti" per $x \to x_0$)

diremo che $f(x)$ è un infinito di ordine superiore rispetto a $g(x)$ per $x \to x_0$ se

$$\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0 , \quad \text{ossia se} \quad \lim_{x\to x_0} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = +\infty$$

DEF Siano $f(x), g(x)$ def^{te} $\neq 0$ per $x \to x_0$

Scriveremo

$$g(x) = o\big(f(x)\big) \quad \text{per} \quad x \to x_0 \quad \text{se}$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0 \quad \left(\text{oppure} \quad \lim_{x\to x_0} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = +\infty \right).$$

In particolare se $f(x) \equiv 1$,

"$g(x) = o(1)$ per $x \to x_0$" significa "$\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$".

<u>Esempi</u>. $\quad x = o(x^2)$ per $x \to \pm\infty$ ok

$$\lim_{x\to \pm\infty} \frac{x}{x^2} = 0$$

OSS $\quad x^2 = o(x)$ per $x \to 0$

Infatti $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = 0$

DEF Siano $f(x), g(x) \neq 0$ def^{te} per $x \to x_0$, e infinitesime per $x \to x_0$ (cioè sono due "infinitesimi")

Diremo che

"$f(x)$ è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a $g(x)$ per $x \to x_0$"

se $f(x) = o(g(x))$ per $x \to x_0$

cioè se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Es. x^2 è infinitesimo di ordine superiore rispetto a x per $x \to 0$

OSS

$f(x)$ è infinito di ordine sup. rispetto a $g(x)$ per $x \to x_0 \in \mathbb{R}^*$ significa

$$g(x) = o(f(x)) \quad \text{per } x \to x_0.$$

$f(x)$ è infinitesimo di ordine sup. risp. a $g(x)$ per $x \to x_0$ significa

$$f(x) = o(g(x))$$

OSS se $f(x) = o(g(x))$

$$f(x) + g(x) = g(x)\Big(\underbrace{\frac{f(x)}{g(x)}}_{\to 0} + 1\Big) = g(x)(1 + o(1)) \sim g(x)$$

per $x \to x_0$

2) $$\lim_{x \to -\infty} \underbrace{|x|^\alpha}_{\to +\infty} \underbrace{b^x}_{\to 0} = (+\infty \cdot 0) = 0 \quad \forall b > 1, \ \forall \alpha > 0 \ (\forall \alpha \in \mathbb{R})$$

Poniamo $-x = y \to +\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} |x|^\alpha b^x = \lim_{y\to+\infty} y^\alpha b^{-y} = \lim_{y\to+\infty} \frac{y^\alpha}{b^y} = 0.$$

Se $b>1$, allora per $x\to-\infty$ b^x è infinitesimo di ordine superiore rispetto a $\frac{1}{|x|^\alpha}$ $\forall \alpha>0$.

Cioè $\lim_{x\to-\infty} \frac{b^x}{(1/|x|^\alpha)} = 0$ $\forall \alpha>0, \forall b>1.$

3) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_b x}{x^\alpha} = 0$ $\forall b>0,\ b\neq 1$ $\forall \alpha>0.$

Cioè se $x\to+\infty$ $\log_b x$ è un infinito di ordine inferiore rispetto a ogni potenza positiva di x.

Dim con il teor. ponte.

$\forall a_n \to +\infty$ $\frac{\log_b a_n}{(a_n)^\alpha} \to 0$ ben noto per le succ.^{ni}

Oppure.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_b x}{x^\alpha} =$$

$\alpha>0$

$b>1$ (per es.)

$$\left[\begin{array}{l} \log_b x = y \to +\infty \\ x = b^y \end{array}\right]$$

$$= \lim_{y\to+\infty} \frac{y}{(b^y)^\alpha} = \lim_{y\to+\infty} \frac{y}{(b^\alpha)^y} = 0$$

oss. $b^\alpha > 1$ $(b>1, \alpha>0)$

4) $$\boxed{\lim_{x\to 0^+} \underbrace{x^\alpha}_{\downarrow\, 0} \ \underbrace{\log_b x}_{\downarrow\, \pm\infty} = 0 \quad \forall \alpha>0 \quad \forall b>0, b\neq 1.}$$

Quindi: $\log_b x$ per $x\to 0^+$ è un infinito di ordine inferiore rispetto a $\frac{1}{x^\alpha}$ $\forall \alpha > 0$

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \log_b x =$$

sost. $y = \frac{1}{x} \to +\infty$

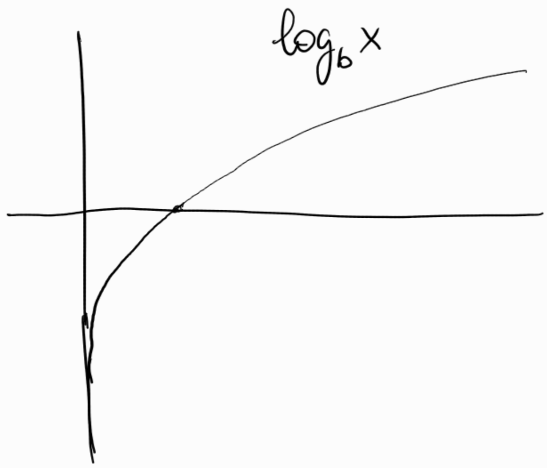
$$= \lim_{y\to+\infty} \left(\frac{1}{y}\right)^\alpha \log_b\left(\frac{1}{y}\right) =$$

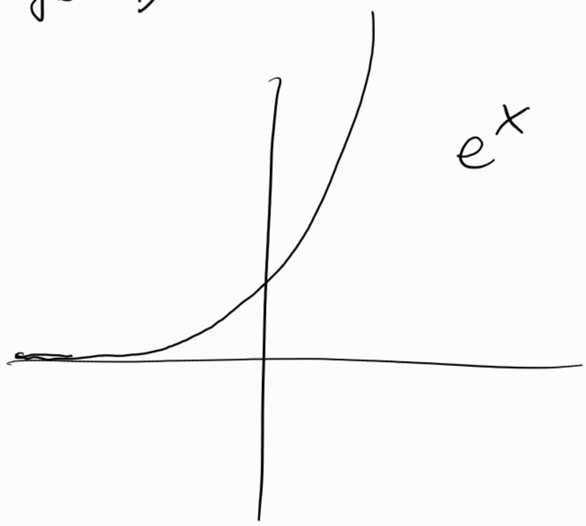
$$= \lim_{y\to+\infty} \frac{-\log_b y}{y^\alpha} = 0.$$

OSS

4') $$\boxed{\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \left|\log_b x\right|^c = 0 \qquad \forall b>0, b\neq 1 \quad \forall c>0 \quad \forall \alpha>0}$$

Infatti $x^\alpha \left|\log_b x\right|^c = \left(x^{\alpha/c} \left|\log_b x\right|\right)^c \to 0^c = 0.$





Riferimenti sul testo consigliato: §§ 4.6, 4.8