Laboratorio di decisioni statistiche - Lab. 5 – 24-25

Nome e matricola: ______________________________

1. Bayes factor, modello normale-normale; confronto tra ipotesi semplici
   - $\theta_0 = 0$
   - $\theta_1 = 0.8$
   - $\sigma^2 = 1$
   - $\mathbf{z}_n = (1.88, 0.14, 1.15, 0.16, -0.39, 0.47, -0.81, 1.23, -0.46, 1.09)$
   - $n = 10$

   Calcolare $B_{01}(\mathbf{z}_n)$ e il rapporto delle probabilità a posteriori, se si considera $\pi_0 = 0.2$ e $\pi_1 = 0.8$.

2. Bayes factor, modello normale-normale; one-sided testing
   - $H_0 : \theta \leq \theta_0$ vs. $H_1 : \theta > \theta_0$
   - $\theta_0 = 0$
   - $\mu_0 = \theta_0$
   - $n_0 = 5$

   Calcolare fattore di Bayes e rapporto delle odds a posteriori e confrontarle.

3. Bayes factor, modello normale-normale; two-sided testing (fenomeno di Lindley)
   - $X_1, \ldots, X_n|\theta \sim \mathrm{N}(\theta, \sigma^2)$ i.i.d. e quindi $\overline{X}_n|\theta \sim \mathrm{N}\left(\theta, \frac{\sigma^2}{n}\right)$
   - $\Theta \sim \mathrm{N}\left(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n_0}\right)$
   - $\overline{X}_n \sim \mathrm{N}\left(\mu_0, \sigma^2\left[\frac{1}{n_0} + \frac{1}{n}\right]\right)$

   $H_0 : \theta = \theta_0$ vs. $H_1 : \theta \neq \theta_0$.

   iperparametri/dati:
   - $\mu_0 = 1.5$
   - $n = 10$
   - $\overline{x}_n = 2$
   - $\sigma^2 = 1$
   - $\theta_0 = \mu_0$
   - $n_0 = 5$

   Ricorda che
   $$B_{10}(\mathbf{z}_n) = \frac{m(\overline{x}_n)}{p_{\theta_0}(\overline{x}_n)}.$$

   (a) Scrivi una funzione `R` denominata `BF.fun` che dia i valori di B_{10} in funzione di $y = 1/n_0$.

   (b) Verificare che `BF.fun(0)` $= 1$.

   (c) Tracciare il grafico di `BF.fun` per y in corrispondenza dei valori di y in `y.val` $= [0, 10]$.

   (d) Verifica empiricamente che `BF.fun(y)` tende a zero al crescere di y, qualunque sia il valore della media campionaria delle osservazioni (Lindley's Paradox).