

Nome, cognome, matricola: _____

1. **Approssimazione normale – Modello Poisson-Gamma.** Si consideri il modello Poisson-Gamma con:

- $\alpha = 2, \quad \beta = 3$
- $\sum_{i=1}^n x_i = 15 \quad n = 5$

Ricorda che:

$$\Theta|\mathbf{z}_n \sim \text{Ga}^R(\bar{\alpha}, \bar{\beta}), \quad \Theta|\mathbf{z}_n \dot{\sim} \text{N}\left(\frac{\bar{\alpha}-1}{\bar{\beta}}, \frac{\bar{\alpha}-1}{\bar{\beta}^2}\right),$$

e che

$$\bar{\alpha} = \alpha + \sum_{i=1}^n x_i, \quad \bar{\beta} = \beta + n$$

- (a) Disegnare il grafico della densità a posteriori esatta di Θ .
- (b) Sovrapporre il grafico dell'approssimazione normale.
- (c) Determinare insiemi di credibilità esatti e approssimati ($1 - \gamma = 0.95$).
- (d) Calcolare $\mathbb{P}(\Theta < 2|\mathbf{z}_n)$ (valore esatto e approssimazione).
- (e) Ripeti con $n = 10, 20, 50, \sum_{i=1}^n x_i = 30, 60, 150$.

2. (MC - Inferenza a posteriori).

$X_1, \dots, X_n | \theta \sim \text{Ber}(\theta)$ i.i.d.

$\Theta \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$.

Parametri/dati:

- $\alpha = 2$
- $\beta = 2$
- $\sum_{i=1}^n x_i = 4$
- $n = 10$

(a) Valori esatti (formule).

$$\mathbb{E}[\Theta | \mathbf{z}_n] = \qquad \mathbb{P}[\Theta < 0.3 | \mathbf{z}_n] = \qquad \mathfrak{q}_{0.95}(\mathbf{z}_n)$$

(b) Approssimazioni con metodo Monte Carlo (MC).

- `th.MC`, vettore di M valori simulati da $\pi(\theta | \mathbf{z}_n)$
- `post.mean.MC`=
- `post.prob.MC`=
- `post.quant.MC`=

$$\mathbb{E}[\Theta | \mathbf{z}_n] = \qquad \mathbb{P}[\Theta < 0.3 | \mathbf{z}_n] = \qquad \mathfrak{q}_{0.95}(\mathbf{z}_n)$$

(c) Grafici

Istogramma di `th.MC` e grafico di $\pi(\theta | \mathbf{z}_n)$

(d) ET Intervals.

Intervallo ET 0.95 per θ

Approssimazione di MC per intervallo ET 0.95 per θ

$$C = [\dots, \dots] \qquad \tilde{C} = [\dots, \dots]$$

(e) Invarianza degli intervalli ET

Considera

$$\psi = \ln \frac{\theta}{1 - \theta}.$$

- Ottieni M valori pseudo-casuali da ψ
- Calcola l'approssimazione di MC per intervallo ET 0.95
- Verifica la proprietà di invarianza dell'insieme ET