Laboratorio di Teoria statistica delle decisioni 24-25
Laboratorio 3 (9 ottobre 2024)

Nome, cognome, matricola: ______________________________

1. **Analisi coniugata – Modello normale**. Siamo interessati alla valutazione della pressione sistolica (SBP) misurata in mmHg di una donna di 60 anni, che indichiamo con θ. Due misurazioni indipendenti della SBP, effettuate a 6 settimane di distanza l'una dall'altra, hanno media aritmetica pari a 130 mmHg. Lo strumento di misura ha una deviazione standard pari a $\sigma = 5$ mmHg.

   Abbiamo a disposizione informazione aggiuntiva, da utilizzare per formalizzare una distribuzione a priori per θ. Da una indagine sulla popolazione delle donne di stessa età della donna in esame risulta che il livello medio di SBP è pari a 120 mmHg, con standard deviation pari a 10 mmHg.

   Ricorda che

   $$\Theta \sim \mathrm{N}\left(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n_0}\right), \quad \ell(\theta) \propto= \exp\left\{-\frac{n}{2\sigma^2}(\theta - \overline{x}_n)^2\right\}, \quad \Theta|\mathbf{z}_n \sim \mathrm{N}\left(\frac{n_0\mu_0 + n\overline{x}_n}{n_0+n}, \frac{\sigma^2}{n_0+n}\right).$$

   (a) Formalizzare il problema in termini di modello normale con distribuzione coniugata (ovvero: individuare $\overline{x}_n$, n, σ, μ_0, n_0 e le ipotesi distributive).
   (b) Confrontare dimensione campionaria e prior sample size.
   (c) Individuare distribuzione a priori di Θ e funzione di verosimiglianza.
   (d) Determinare la distribuzione a posteriori di Θ e calcolare valore atteso e varianza.
   (e) Disegnare distribuzione a priori, funzione di verosimiglianza e distribuzione a posteriori nello stesso grafico.
   (f) Determinare stima puntuale e intervallare (Bayes) al livello 0.95.
   (g) Si ritiene che il livello di SBP sia pericoloso se superiore a 135. Tenendo conto delle informazioni, calcolare la probabilità che pressione della donna sia pericolosa.
   (h) Ripetere l'analisi in termini frequentista, ovvero determinare: stima di massima verosimiglianza, intervallo di confidenza di livello 0.95 e p-value (per la verifica delle ipotesi: $H_0 : \theta \leq 135$ vs. $H_1 : \theta > 135$).
   (i) Verificare la coincidenza delle procedure frequentiste del punto precedente con quelle bayesiane ottenute nel caso non-informativo ($n_0 = 0$).

2. **Approssimazione normale – Modello Poisson-Gamma**. Si consideri il modello Poisson-Gamma con:

   - $\alpha = 2, \quad \beta = 3$
   - $\sum_{i=1}^{n} x_i = 15 \quad n = 5$

     Ricorda che:

     $$\Theta|\mathbf{z}_n \sim \mathrm{Ga}^R(\overline{\alpha}, \overline{\beta}), \qquad \Theta|\mathbf{z}_n \dot{\sim} \mathrm{N}\left(\frac{\overline{\alpha}-1}{\overline{\beta}}, \frac{\overline{\alpha}-1}{\overline{\beta}^2}\right),$$

     e che

     $$\overline{\alpha} = \alpha + \sum_{i=1}^{n} x_i, \qquad \overline{\beta} = \beta + n$$

   (a) Disegnare il grafico della densità a posteriori esatta di Θ.
   (b) Sovrapporre il grafico dell'approssimazione normale.
   (c) Determinare insiemi di credibilità esatti e approssimati ($1 - \gamma = 0.95$).
   (d) Calcolare $\mathbb{P}(\Theta < 2|\mathbf{z}_n)$ (valore esatto e approssimazione).
   (e) Ripeti con $n = 10, 20, 50$, $\sum_{i=1}^{n} x_i = 30, 60, 150$.