$$\text{"} \frac{\ell}{\pm\infty} = 0 \qquad \forall \ell \in \mathbb{R} \text{"}$$

Significa

PROP Se $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$, $b_n \to +\infty$ (opp $-\infty$)

Allora $$\frac{a_n}{b_n} \to 0 .$$

In realtà per avere il precedente risultato non occorre che a_n ammetta limite finito, basta che sia limitata.

$|a_n| \leq M$

$$0 \leq \left|\frac{a_n}{b_n}\right| = \frac{|a_n|}{|b_n|} \leq \frac{M}{|b_n|} < \varepsilon$$

$|b_n| > \frac{M}{\varepsilon}$ vero def^{te}.

Esempio

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\overbrace{\operatorname{sen}(n^2) - 3\cos^3 n}^{a_n}}{\underbrace{4 - n^5}_{b_n}} = 0$$

$$|a_n| = |\operatorname{sen}(n^2) - 3\cos^3 n| \leq \underbrace{|\operatorname{sen}(n^2)|}_{\leq 1} + 3\underbrace{|\cos^3 n|}_{\leq 1} \leq 4$$

$b_n = 4 - n^5 \to -\infty \qquad \Rightarrow$ la tesi.

Vogliamo trattare il caso $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n}$, dove $b_n \to 0$.

Bisogna dare una definizione che permetta di precisare se $b_n \to 0$ "da numeri positivi" o "da numeri negativi"

DEF Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri reali, e sia $\ell \in \mathbb{R}$.
Diremo che $\{a_n\}$ tende a ℓ "per eccesso", o "dall'alto",
"per difetto" "dal basso"
in simboli

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell^{\pm}, \quad \text{oppure} \quad a_n \to \ell^{\pm}$$

se $a_n \to \ell$ e in più $a_n \geq \ell$ def^{te} ($\leq$)

o equivalentemente se, $\forall \varepsilon > 0$ $\quad \ell < a_n < \ell + \varepsilon$ definitivamente
$\ell - \varepsilon < a_n < \ell$

Per esempio se $a_n = \frac{1}{n}$, allora $a_n \to 0$
ma possiamo essere più precisi e dire che $a_n = \frac{1}{n} \to 0^+$

Esempio $\quad -\frac{1}{n} \to 0^-$

$$\frac{2}{5-n^3} \to 0^-$$

$$\frac{(-1)^n}{n} \to 0 \quad \text{ma non tende né a } 0^+ \text{ né a } 0^-$$

$$\frac{2n^2-1}{n^2} = 2 - \frac{1}{n^2} \to 2^-$$

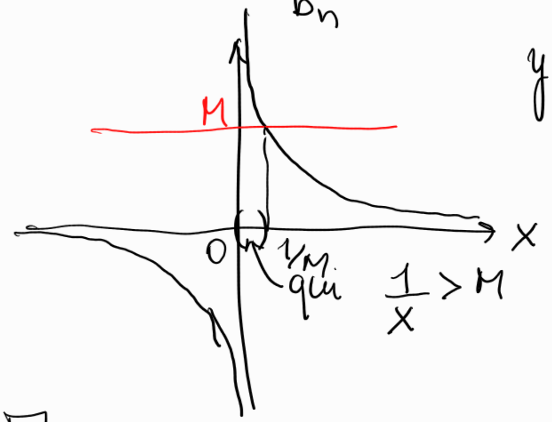
Attenzione $\quad a_n \to \ell^+$ non significa che a_n tende a un numero poco più grande di ℓ, ma che $a_n \to \ell$ e in più si ha $a_n > \ell$.

PROP se $b_n \to 0^+$, allora $\frac{1}{b_n} \to +\infty$;
se $b_n \to 0^-$, allora $\frac{1}{b_n} \to -\infty$.

DIM Dimostriamo la prima.
Sappiamo che $\forall \varepsilon > 0$ si ha $0 < b_n < \varepsilon$ def^{te}

Fissato $M>0$, devo provare che $\frac{1}{b_n} > M$ def^{te}.

$y=\frac{1}{x}$



$$\frac{1}{b_n} > M$$
$$\Updownarrow$$
$$0 < b_n < \frac{1}{M}$$

che è vera def^{te} $\square$

OSS se $b_n = \frac{(-1)^n}{n}$ (che tende a 0, ma non a 0^+ e non a 0^-)

$$\frac{1}{b_n} = \frac{n}{(-1)^n} = (-1)^n n$$ non ammette limite.

PROP se $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \ell$, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0^+$ $\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \ell\in(0,+\infty] \\ -\infty & \text{se } \ell\in[-\infty,0) \end{cases}$

se $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \ell$, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0^-$ $\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} -\infty & \text{se } \ell\in(0,+\infty] \\ +\infty & \text{se } \ell\in[-\infty,0) \end{cases}$

$$\frac{a_n}{b_n} = \underbrace{a_n}_{\downarrow\ \ell>0} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{b_n}\right)}_{\downarrow\ +\infty}$$

Riassunto:

" $\frac{\ell}{0^+} = +\infty$ $\forall \ell>0$ " " $\frac{+\infty}{0^+} = +\infty$ "

" $\frac{\ell}{0^+} = -\infty$ $\forall \ell<0$ " " $\frac{-\infty}{0^+} = -\infty$ "

$$\text{"}\frac{\ell}{0^-} = -\infty \quad \forall \ell > 0\text{"} \qquad \text{"}\frac{+\infty}{0^-} = -\infty\text{"}$$

$$\text{"}\frac{\ell}{0^-} = +\infty \quad \forall \ell < 0\text{"} \qquad \text{"}\frac{-\infty}{0^-} = +\infty\text{"}$$

Se $b_n \to 0^+$ opp. 0^- e $a_n \to 0$,

non si può dire nulla "in generale" su $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n}$

Può andare a $+\infty$, a $-\infty$, a 17, a 0, non avere limite.
(fare esempi)
Si tratta di una nuova forma indeterminata "$\frac{0}{0}$"

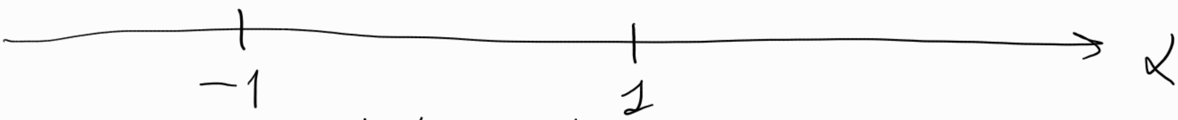
Abbiamo finora trovato 4 forme indeterminate

"$+\infty - \infty$", "$0 \cdot (\pm\infty)$" "$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$" "$\frac{0}{0}$"

$$\lim_{n\to+\infty} \left(n^{\alpha-1} - n^{-\alpha-1}\right) \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$n^{\alpha-1} \longrightarrow \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 1 \\ 1 & \text{se } \alpha = 1 \\ 0 & \text{se } \alpha < 1 \end{cases}$$

$$n^{-\alpha-1} \longrightarrow \begin{cases} +\infty & \text{se } -\alpha-1 > 0, \text{ cioè } \alpha < -1 \\ 1 & \text{se } -\alpha-1 = 0, \text{ cioè } \alpha = -1 \\ 0 & \text{se } -\alpha-1 < 0, \text{ cioè } \alpha > -1. \end{cases}$$



$$\alpha < -1 \implies \underbrace{\underbrace{n^{\alpha-1}}_{\to 0} - \underbrace{n^{-\alpha-1}}_{\to +\infty}}_{\to -\infty} \longrightarrow -\infty$$

$$\alpha = -1 \implies \underbrace{n^{\alpha-1}}_{\downarrow\, 0} - \underbrace{n^{-\alpha-1}}_{\downarrow\, 1} \longrightarrow -1$$

$$-1 < \alpha < +1 \implies \underbrace{n^{\alpha-1}}_{\downarrow} - \underbrace{n^{-\alpha-1}}_{\downarrow\, 0} \longrightarrow 0$$

$$\alpha = 1 \implies \underbrace{n^{\alpha-1}}_{\downarrow\, 1} - \underbrace{n^{-\alpha-1}}_{\downarrow\, 0} \longrightarrow 1$$

$$\alpha > 1 \implies \underbrace{n^{\alpha-1}}_{\downarrow\, +\infty} - \underbrace{n^{-\alpha-1}}_{\downarrow\, 0} \longrightarrow +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3n}\right)^{1-n}$$

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3n}\right)^{1-n} = 2^{\underbrace{\log_2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3n}\right)(1-n)}_{x_n \to +\infty}} \longrightarrow 2^{+\infty}$$

$$\forall x > 0 \qquad x = 2^{\log_2 x}$$

$$x_n = \underbrace{(1-n)}_{\downarrow\, -\infty} \underbrace{\log_2\Big(\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{3n}}_{\downarrow\, 1/2}\Big)}_{\downarrow\, \log_2\left(\frac{1}{2}\right) = -1} \longrightarrow \text{"} -\infty \cdot (-1)\text{"} = +\infty$$

Se abbiamo succ^{ni} della forma

$(a_n)^{b_n}$, con $a_n > 0$,

scriviamo

$$(a_n)^{b_n} = 2^{b_n \log_2 a_n}$$ e calcoliamo il limite dell'esponente

Nel caso precedente $a_n \to 1/2$, $b_n \to -\infty$

$$(a_n)^{b_n} = 2^{\underbrace{\underbrace{b_n}_{\downarrow\, -\infty}\ \underbrace{\log_2 a_n}_{\downarrow\, -1}}_{\downarrow\, +\infty}} \to +\infty$$

se fosse stato $\left(3+\frac{1}{2n}\right)^{1-n}$?

$$\left(3+\frac{1}{2n}\right)^{1-n} = 2^{\underbrace{\underbrace{(1-n)}_{\downarrow\, -\infty}\ \underbrace{\log_2\left(3+\frac{1}{2n}\right)}_{\downarrow\, \log_2 3 > 0}}_{\downarrow\, -\infty}} \to 0$$

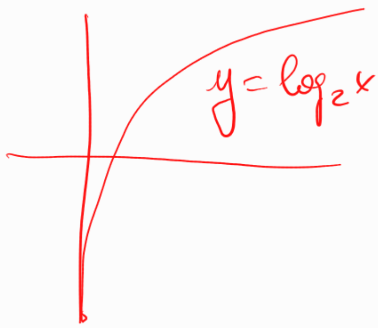
Abbiamo quindi di fatto provato che

anche vero se $\ell = 0$

$$\text{se} \quad \left.\begin{array}{l} a_n \to \ell < 1 \\ b_n \to -\infty \end{array}\right| \Longrightarrow (a_n)^{b_n} \to +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} a_n \to \ell > 1 \\ b_n \to -\infty \end{array}\right| \Longrightarrow (a_n)^{b_n} \to 0$$

$$(a_n)^{b_n} = 2^{\underbrace{\underbrace{b_n}_{\downarrow\, -\infty}\ \underbrace{\log_2 a_n}_{\downarrow\, -\infty}}_{\downarrow\, +\infty}} \to +\infty.$$



Abbiamo provato che

"$\ell^{-\infty} = 0 \qquad \forall \ell \in (1, +\infty)$"

$$\text{"} \ell^{-\infty} = +\infty \text{"} \qquad \forall \ell \in [0,1)$$

$$\text{"} (+\infty)^{-\infty} = 0 \text{"}$$

$$\begin{array}{l} a_n \to +\infty \\ b_n \to -\infty \end{array} \qquad (a_n)^{b_n} = 2^{\overbrace{\underbrace{b_n}_{\downarrow \, -\infty} \underbrace{\log_2(a_n)}_{\downarrow \, +\infty}}^{\downarrow \, -\infty}} \longrightarrow 0$$

$$\text{"} \ell^{+\infty} = ? \text{"}$$

$$\begin{array}{l} a_n \to \ell \\ b_n \to +\infty \end{array} \Rightarrow (a_n)^{b_n} = 2^{\underbrace{\underbrace{b_n}_{\downarrow \, +\infty} \underbrace{\log_2 a_n}_{\downarrow \, \log_2 \ell}}_{\downarrow}} \longrightarrow \begin{cases} +\infty & \text{se } \ell > 1 \text{ opp } \ell = +\infty \\ 0 & \text{se } \ell \in [0,1) \end{cases}$$

$+\infty$ se $\ell > 1$ oppure se $\ell = +\infty$

$-\infty$ se $0 \leq \ell < 1$

$$\left.\begin{array}{l} a_n \to \ell \in (0,+\infty) \\ b_n \to m \in \mathbb{R} \end{array}\right| \Rightarrow (a_n)^{b_n} = 2^{\underbrace{b_n}_{\downarrow \, m} \underbrace{\log_2 a_n}_{\downarrow \, \log_2 \ell}} \longrightarrow 2^{m \log_2 \ell} = \ell^m$$

Questo permette in generale di risolvere i limiti del tipo

$$\lim_{n \to +\infty} (a_n)^{b_n} \qquad (\text{con } a_n > 0)$$

salvo nei seguenti casi.

$$\left.\begin{array}{l} a_n \to +\infty \\ b_n \to 0 \end{array}\right| \Rightarrow (a_n)^{b_n} = 2^{\underbrace{b_n}_{\downarrow \, 0} \underbrace{\log_2 a_n}_{\downarrow \, +\infty}}$$

$$\boxed{\text{"}(+\infty)^0 \text{ è una forma indeterminata"}}$$

$$\boxed{\text{"}0^0 \text{ è una f. i."}}$$

Infatti. se $a_n \to 0^+$, $b_n \to 0$, $(a_n)^{b_n} = 2^{\underbrace{b_n}_{\downarrow\, 0} \underbrace{\log_2 a_n}_{\downarrow\, -\infty}}$

$$\boxed{\text{"}1^{\pm\infty} \text{ è una f. i."}}$$

se $a_n \to 1$, $b_n \to \pm\infty$ $\Rightarrow (a_n)^{b_n} = 2^{\underbrace{b_n}_{\downarrow\, \pm\infty} \underbrace{\log_2 a_n}_{\downarrow\, \log_2 1 = 0}}$

Lunedì alle 14:00 esercitazione con il tutor in Aula 9 (via del Castro Laurenziano)

Prime risoluzioni di forme indeterminate.

$$\lim_{n\to+\infty} (\underbrace{3n^2}_{\downarrow\, +\infty} \underbrace{- 2n^5}_{\downarrow\, -\infty} + \underbrace{7}_{\downarrow\, +7}) = \underbrace{(+\infty - \infty + 7)}_{\text{f. i.}} = -\infty$$

Si mette in evidenza la potenza più alta.

$$3n^2 - 2n^5 + 7 = \underbrace{n^5}_{\downarrow\, +\infty} \Big(\underbrace{\underbrace{\frac{3}{n^3}}_{\downarrow\, 0} - 2 + \underbrace{\frac{7}{n^5}}_{\downarrow\, 0}}_{\downarrow\, -2} \Big) \longrightarrow -\infty$$

Questo si estende a tutti i polinomi in n.

$$P_k(n) = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + a_{k-2} n^{k-2} + \dots + a_1 n + a_0$$

dove $a_0, a_1, \dots a_k \in \mathbb{R}$, $a_k \neq 0$

$$\lim_{n\to+\infty} P_k(n) = \lim_{n\to+\infty} \underbrace{n^k}_{+\infty} \underbrace{\left(a_k + \underbrace{\frac{a_{k-1}}{n}}_{0} + \underbrace{\frac{a_{k-2}}{n^2}}_{0} + \dots + \underbrace{\frac{a_1}{n^{k-1}}}_{0} + \underbrace{\frac{a_0}{n^k}}_{0} \right)}_{a_k \neq 0}$$

$$= \begin{cases} +\infty & \text{se } a_k > 0 \\ -\infty & \text{se } a_k < 0 \end{cases}$$

Riferimenti sul testo consigliato:

§§ 2.5, 2.6, 2.8.