TEOREMA 1 (aritmetica dei limiti)

Sia $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to+\infty} b_n = m \in \mathbb{R}$. Allora:

1) $\lim_{n\to+\infty} (a_n + b_n) = \ell + m$

2) $\lim_{n\to+\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \ell + \beta m$. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(Linearità del limite)

3) $\lim_{n\to+\infty} a_n b_n = \ell m$.

4) se $m \neq 0$ $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{m}$

5) se $m \neq 0$ $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\ell}{m}$

Prima di dimostrarlo, proviamo un risultato importante che ci servirà:

TEOREMA 2 Sia $\{a_n\}$ una successione convergente. (cioè $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}$). Allora $\{a_n\}$ è limitata (cioè: $\exists M \in \mathbb{R}$ t.c. $|a_n| \leq M$ $\forall n \in \mathbb{N}$).

OSS Il viceversa è falso: non tutte le succ^{ni} limitate sono convergenti, per es. $(-1)^n$ è limitata ma non ha limite

Dim. teor. 2 Sia $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow \forall \varepsilon \quad |a_n - \ell| < \varepsilon$ def^{te}.

Fissato $\varepsilon = 1$, $\exists\ \bar{n}$ t.c. $\forall n \geq \bar{n} \quad |a_n - \ell| < 1$

$$\Rightarrow \quad |a_n| = |a_n - \ell + \ell| \leq \underbrace{|a_n - \ell|}_{\wedge\, 1} + |\ell| < 1 + |\ell| \quad \forall n \geq \bar{n} \quad (*)$$

Restano da maggiorare $|a_0|, |a_1|, \dots, |a_{\bar{n}-1}|$ ma questi sono in numero finito.

$$M = \max\{|a_0|, |a_1|, |a_2|, \dots, |a_{\bar{n}-1}|, |\ell| + 1\}$$

Si ha
$$|a_n| \leq M \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$
(ovvio per $n = 0, 1, \dots, \bar{n}-1$, e segue da $(*)$ per $n \geq \bar{n}$.

$\square$

Dim. teor. aritmetica dei limiti

Sia $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}$ $\quad \lim_{n\to+\infty} b_n = m \in \mathbb{R}$.

1) $\lim_{n\to+\infty} (a_n + b_n) = \ell + m$

Hyp 1 $\quad \forall \varepsilon_1 > 0 \quad |a_n - \ell| < \varepsilon_1$ def^{te}.

Hyp. 2 $\quad \forall \varepsilon_2 > 0 \quad |b_n - m| < \varepsilon_2$ def^{te}.

Tesi $\quad \forall \varepsilon > 0 \quad |(a_n + b_n) - (\ell + m)| < \varepsilon$ def^{te}.

Fissiamo $\varepsilon > 0$.

$$\rightarrow \left|(a_n+b_n)-(\ell+m)\right| = \left|(a_n-\ell)+(b_n-m)\right| \underset{\text{dis. triangolare}}{\leq} \underbrace{|a_n-\ell|}_{<\varepsilon/2} + \underbrace{|b_n-m|}_{<\varepsilon/2} <$$

Scelgo $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}$ nell' hyp. 1. $\rightarrow$ def^{te} $|a_n-\ell| < \frac{\varepsilon}{2}$

" $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2}$ " " 2. $\Rightarrow$ def^{te} $|b_n-m| < \frac{\varepsilon}{2}$

$$\underset{\text{def}^{te}}{<} \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\square$

2) $\lim_{n\to+\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha\ell + \beta m \qquad \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}$

Abbiamo già provato che $\lim_{n\to+\infty} (\alpha a_n) = \alpha\ell$, $\lim_{n\to+\infty} (\beta b_n) = \beta m$

quindi basta applicare 1) per concludere

3) $\lim_{n\to+\infty} a_n b_n = \ell m$

Devo provare che $|a_n b_n - \ell m| \xrightarrow{n\to+\infty} 0$

$0 \leq |a_n b_n - \ell m| =$ aggiungo e tolgo $a_n m$

$= |(a_n b_n - a_n m) + (a_n m - \ell m)| \leq$ (dis. triangolare)

$\leq |a_n b_n - a_n m| + |a_n m - \ell m| =$

$$= \underbrace{\underbrace{|a_n|}_{\text{limitata per il teor. 2}} \underbrace{|b_n-m|}_{\to 0}}_{\to 0 \text{ prodotto di infinitesima x limitata}} + \underbrace{|m| \underbrace{|a_n-\ell|}_{\to 0}}_{\to 0} \xrightarrow{1)} 0$$

Per il teor. dei carabinieri, $|a_n b_n - \ell m| \to 0$ $\square$

4) se $m \neq 0$, allora $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{m}$.

OSS se $m \neq 0$, anche $b_n \neq 0$ def^{te}, per la permanenza del segno.

Devo provare che $\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{m}\right| \longrightarrow 0$ per $n \to +\infty$.

$$0 \le \left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{m}\right| = \frac{|m-b_n|}{|b_n||m|} = \frac{|b_n - m|}{m\, b_n} \le \frac{2}{m^2}\, |b_n - m| \to 0$$

definitivamente

b_n ha il segno di m.

Supponiamo $m>0$. $b_n \to m \Rightarrow$ def^{te} $b_n > \frac{m}{2}$

$$\underset{\text{def}^{te}}{\Longrightarrow} \quad m\, b_n > m \cdot \frac{m}{2} = \frac{m^2}{2}$$

se $m<0$, $b_n \to m$. $\Rightarrow$ def^{te} $b_n < \frac{m}{2}$

ma $m<0$ $\Longrightarrow$ $m\, b_n > \frac{m^2}{2}$

Quindi $\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{m}\right| \to 0$ $\square$

5) se $m \neq 0$ $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\ell}{m}$

$$\frac{a_n}{b_n} = \underset{\downarrow\, \ell}{a_n} \cdot \underset{\downarrow\, 1/m}{\left(\frac{1}{b_n}\right)} \xrightarrow{(3)} \ell \cdot \frac{1}{m} = \frac{\ell}{m}$$

$\square$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(2-\frac{7}{n^{-3}+1}\right)=2-7=-5$$

$n^{-3}\to 0$, $1 \to 1$

$$\frac{7}{n^{-3}+1}\to\frac{7}{1}=7$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{5-3^{-n}}{-1+\frac{1}{\sqrt{n}}}=-5$$

$3^{-n}\to 0$

$\frac{1}{\sqrt{n}} = n^{-1/2}\to 0$

Vogliamo "estendere" l'aritmetica dei limiti ai casi in cui almeno una tra $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ tenda a $\pm\infty$, oppure un denominatore vada a zero.

Esempio

$$\left.\begin{array}{l} a_n\to+\infty \\ b_n\to-2 \end{array}\right| \Longrightarrow a_n+b_n\to+\infty$$

PROP se $\lim_{n\to+\infty} a_n=+\infty$, $\lim_{n\to+\infty} b_n=m\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$

Allora $\lim_{n\to+\infty}(a_n+b_n)=+\infty$.

Dim

OSS se $b_n\to m\in\mathbb{R}$, sarà definitivamente $b_n>m-1$

$b_n\to+\infty$, sarà def^{te} $b_n>0$

cioè, nelle nostre ipotesi, abbiamo def^{te} $b_n>k\in\mathbb{R}$

$a_n+b_n \underset{\text{def}^{te}}{>} a_n+k \longrightarrow +\infty$ e per il teor. del carabiniere abbiamo finito

proviamo questo

Fissato $M>0$, $a_n+k>M \iff a_n > M-k$
vero def^{te} perché
$a_n \to +\infty$. $\square$

L'enunciato precedente si scrive sinteticamente

$$\text{"} +\infty + m = +\infty \text{"} \quad \forall m \in \mathbb{R}$$

$$\text{"} +\infty +\infty = +\infty \text{"}$$

OSS In realtà abbiamo provato di più: non occorre che $\{b_n\}$ ammetta limite, basta che sia limitata inferiormente

Per es. $\lim_{n\to+\infty} (\underbrace{n^4}_{+\infty} + \underbrace{(-1)^n}_{\text{limitata inferiorm.}}) = +\infty$.

> **PROP** $\left.\begin{array}{l} a_n \to +\infty \\ b_n \text{ limitata infer.} \end{array}\right| \Rightarrow a_n+b_n \to +\infty$

Analogamente si dimostra:

> **PROP.**
> se $\left.\begin{array}{l} a_n \to -\infty \\ b_n \to m \in \mathbb{R}\cup\{-\infty\} \end{array}\right| \Rightarrow a_n+b_n \to -\infty$
> in realtà basta $\{b_n\}$ limitata superiorm.

$$\text{"} -\infty + m = -\infty \quad \forall m \in \mathbb{R} \text{"}$$

$$\text{"} -\infty -\infty = -\infty \text{"}$$

OSS se $a_n \to +\infty$, $b_n \to -\infty$.

per a_n+b_n possono succedere varie cose.

1) $\left.\begin{array}{l} a_n = 2n \to +\infty \\ b_n = -n \to -\infty \end{array}\right| \Rightarrow a_n+b_n = 2n-n = n \to +\infty$

2) $a_n = n \to +\infty \;\Big|$

$b_n = -2n \to -\infty \Big| \Rightarrow a_n + b_n = n - 2n = -n \to -\infty$

3) $\left.\begin{array}{l} a_n = n+5 \to +\infty \\ b_n = -n \end{array}\right| \Rightarrow a_n + b_n = 5 \to 5$

4) $\left.\begin{array}{l} a_n = n + (-1)^n \to +\infty \\ b_n = -n \end{array}\right| \Rightarrow a_n + b_n = (-1)^n \quad \nexists$ limite

"$+\infty - \infty$" è una "forma indeterminata",

cioè bisogna esaminare caso per caso quanto vale il limite

Vediamo i prodotti.

PROP $\left.\begin{array}{l} a_n \to +\infty \\ b_n \to m \end{array}\right| \Longrightarrow a_n b_n \longrightarrow \begin{cases} +\infty & \text{se } m \in (0, +\infty] \\ -\infty & \text{se } m \in [-\infty, 0) \end{cases}$

Dim supp. $a_n \to +\infty$, $b_n \to m \in (0, +\infty)$

OSS $b_n > \frac{m}{2} > 0$ def^{te}.

$\Rightarrow \quad a_n b_n \underset{\text{def}^{te}}{>} a_n \frac{m}{2} \longrightarrow +\infty$

infatti $a_n \frac{m}{2} > M \Leftrightarrow a_n > \frac{2M}{m}$ vero def^{te}

se invece $b_n \to +\infty$, b_n sarà def^{te} > 1

$a_n b_n \underset{\text{def}^{te}}{>} a_n \longrightarrow +\infty$ $\square$

OSS In realtà basta che $\exists\, c > 0$ t.c.

$b_n \geq c > 0$ def^{te}.

Per. es. $\lim_{n\to+\infty} n\,\underbrace{(3+2\operatorname{sen} n)}_{\geq\, 3-2=1>0} = +\infty$

PROP $\left.\begin{array}{l} a_n \to -\infty \\ b_n \to m \end{array}\right| \Rightarrow a_n b_n \to \begin{cases} -\infty & \text{se } m \in (0,+\infty] \\ +\infty & \text{se } m \in [-\infty, 0) \end{cases}$

Sinteticamente:

$$“(+\infty)\cdot m = \begin{cases} +\infty & \text{se } m>0 \\ -\infty & \text{se } m<0 \end{cases}”$$

$$“(+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty”$$

$$“(+\infty)\cdot(-\infty) = -\infty”$$

$$“(-\infty)\cdot(-\infty) = +\infty”$$

$$“-\infty\cdot m = \begin{cases} -\infty & \text{se } m>0 \\ +\infty & \text{se } m<0 \end{cases}”$$

Resta escluso il caso “$\pm\infty\cdot 0$”, in cui in generale può succedere di tutto:

$$\left.\begin{array}{l} a_n = n^2 \to +\infty \\ b_n = \frac{1}{n} \to 0 \end{array}\right| \Rightarrow a_n\cdot b_n = n \to +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} a_n = n \to +\infty \\ b_n = \frac{1}{n^2} \to 0 \end{array}\right| \Rightarrow a_n b_n = \frac{1}{n} \to 0$$

Rapporti di successioni

PROP se $|b_n| \to +\infty \Rightarrow \frac{1}{b_n} \to 0$

in particolare è vero se $b_n \to +\infty$ opp. $b_n \to -\infty$

Es. $\frac{1}{n^2+4} \to 0$

DIM. $0 \le \left|\frac{1}{b_n}\right| = \frac{1}{|b_n|} \overset{?}{<} \varepsilon$

$\Updownarrow$

$|b_n| > \frac{1}{\varepsilon}$ vero def^{te} perché $|b_n| \to +\infty$

$\square$

$$\left.\begin{array}{l} a_n \to \ell \in \mathbb{R} \\ b_n \to \pm\infty \end{array}\right| \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \to 0$$

$$\frac{a_n}{b_n} = \underset{\downarrow\atop \ell}{a_n} \cdot \underset{\downarrow\atop 0}{\left(\frac{1}{b_n}\right)}$$