$$E = \{ x = n^3 - 3n \ : \ n \in \mathbb{N} \}$$

$\Rightarrow \sup E = +\infty$ già dimostrato.

$\inf E = ?$

$a_n = n^3 - 3n$

$a_0 = 0$

$a_1 = -2$

$a_2 = 2$

$a_3 = 18$

$a_4 = 81 - 12 = 69$

$a_5 = 228$

Diremo che la succ^{ne} $\{a_n\}$ è crescente (decrescente) se

$\forall n, m \in \mathbb{N}$ t.c. $n < m$ si ha $a_n \leq a_m$ ($\geq$)

Basta verificarlo per due interi successivi

$$a_n \leq a_{n+1}$$

Vediamo se la nostra successione è crescente, almeno da un certo indice n in poi

$$a_n \overset{?}{\leq} a_{n+1}$$

$$n^3 - 3n \overset{?}{\leq} (n+1)^3 - 3(n+1)$$

$$\cancel{n^3} - \cancel{3n} \overset{?}{\leq} \cancel{n^3} + 3n^2 + 3n + 1 - \cancel{3n} - 3$$

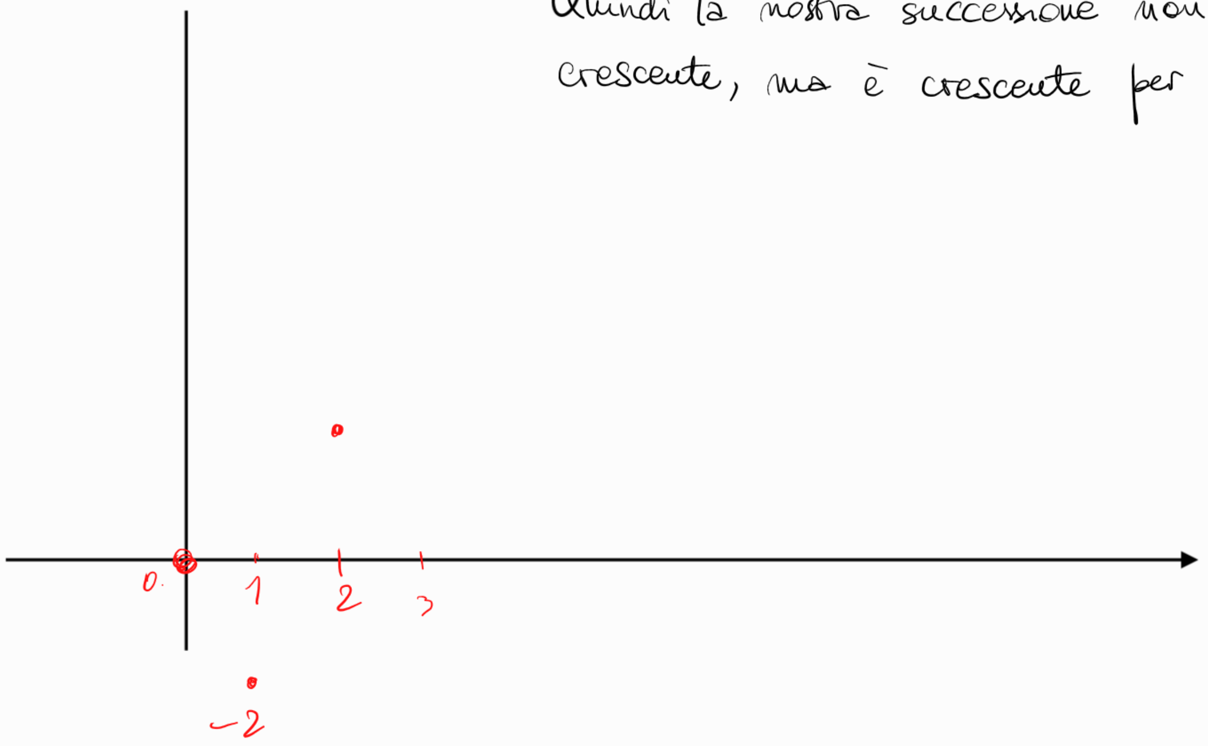
$$\underbrace{3n^2}_{\geq 3} + \underbrace{3n}_{\geq 3} - 2 \overset{?}{\geq} 0$$

$n \geq 1$

Falsa per $n = 0$
Vera per $n \geq 1$.

$\Rightarrow$ Per $n \geq 1$ $a_n \leq a_{n+1}$

Quindi la nostra successione non è crescente, ma è crescente per $n \geq 1$



$\Rightarrow$ $\inf E = \min E = a_1 = -2$

$$E = \left\{ x = (-1)^n \frac{6n^3 - 3}{n^3} \, , \, n \in \mathbb{N}^+ \right\}$$

$\inf E = \sup E = ?$

$$(-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ pari} \\ -1 & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases}$$

$$(-1)^n \frac{6n^3 - 3}{n^3} = \begin{cases} 6 - \frac{3}{n^3} & n \text{ pari} \\ -6 + \frac{3}{n^3} & n \text{ dispari} \end{cases}$$

$E = E_1 \cup E_2 \Rightarrow \sup E = \max\{\sup E_1, \sup E_2\}$

$$E_1 = \left\{ \cancel{(-1)^n\left(6-\frac{3}{n^3}\right)} = -6+\frac{3}{n^3} \quad : \quad n \in \mathbb{N}^+ \text{ dispari} \right\}$$

$$E_2 = \left\{ \cancel{(-1)^n\left(6-\frac{3}{n^3}\right)} = 6-\frac{3}{n^3} \quad ; \quad n \in \mathbb{N}^+ \text{ pari} \right\}.$$

$$a_n = 6 - \frac{3}{n^3} \qquad n \text{ pari} \qquad \text{crescente}$$

$$a_n \overset{?}{\leq} a_{n+2} \qquad \cancel{6} - \frac{3}{n^3} \overset{?}{\leq} \cancel{6} - \frac{3}{(n+2)^3}$$

$$\frac{\cancel{3}^{\,1}}{n^3} \overset{?}{\geq} \frac{\cancel{3}^{\,1}}{(n+2)^3} \qquad (n+2)^3 \overset{?}{\geq} n^3 \qquad \text{sì!}$$

$$\inf E_2 = \min E_2 = a_2 = 6 - \frac{3}{8} = \frac{45}{8}$$

$$\sup E_2 = 6$$

1) $6 \geq 6 - \dfrac{3}{n^2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^+,\ n \text{ pari}. \qquad$ ok

2) Fix $\varepsilon > 0$. Cerco $n \in \mathbb{N}^+$, n pari t.c.

$$\cancel{6} - \varepsilon < \cancel{6} - \frac{3}{n^2} \iff \varepsilon > \frac{3}{n^2} \iff n^2 > \frac{3}{\varepsilon}$$

$$\iff n > \sqrt{\frac{3}{\varepsilon}}$$

Basta prendere n pari $> \sqrt{\dfrac{3}{\varepsilon}}$

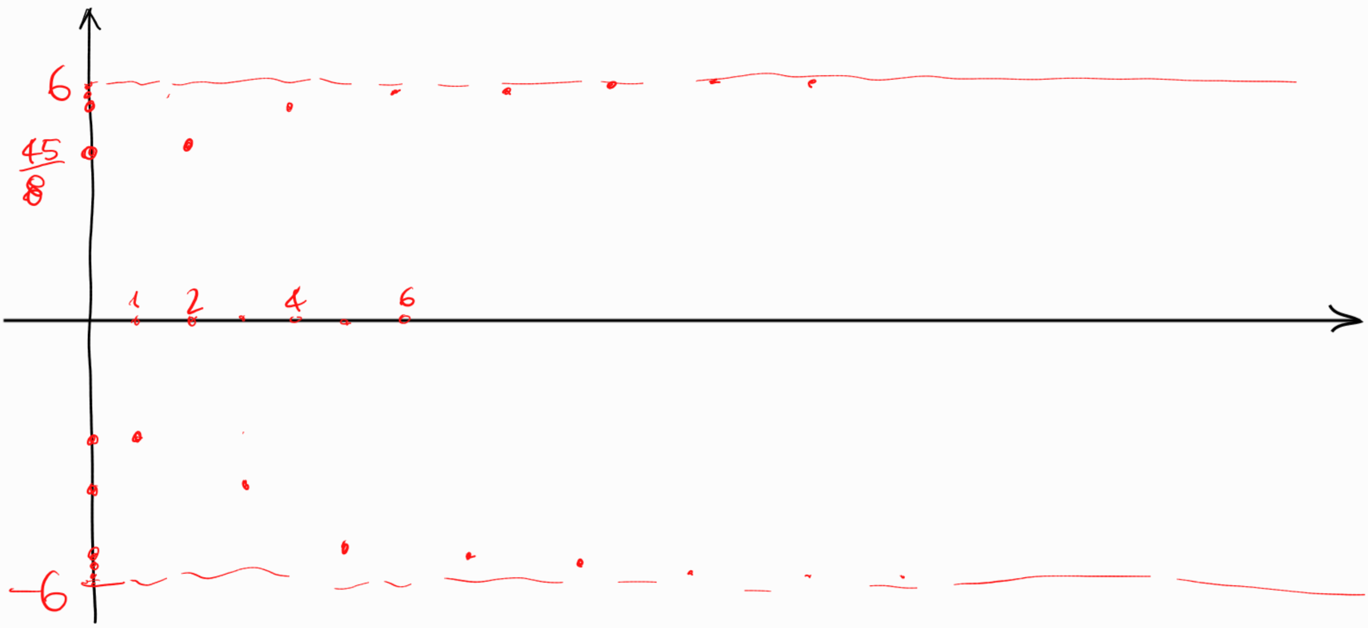
$$E_1 = \Big\{ \underbrace{-6+\frac{3}{n^3}}_{b_n}, \quad n \in \mathbb{N}^+,\ n \text{ dispari} \Big\}.$$

$$\sup E_1 = \max E_1 = b_1 = -3$$

$$\inf E_1 = -6$$

$$\sup E = \max\{\sup E_1, \sup E_2\} = \max\{-3, 6\} = 6$$

$$\inf E = \min\{\underbrace{\inf E_1}_{\substack{\parallel \\ -6}}, \underbrace{\inf E_2}_{\substack{\parallel \\ \frac{45}{8}}}\} = -6$$



Una <u>funzione</u> è una legge che associa ad ogni elemento x di un insieme X (detto <u>dominio</u> di f) un elemento $y = f(x)$ un insieme Y (detto <u>codominio</u>)

$$f : X \longrightarrow Y$$
$$x \longmapsto f(x) = y$$

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x^3$$

Chiamiamo <u>successione</u> una funzione il cui dominio è $\mathbb{N}$ (oppure $\mathbb{N}^+$)

$$\{a_n\}\ \cancel{f} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$n \longmapsto \cancel{f(n)}\ a_n$$

Usiamo una notazione del tipo a_n invece di $f(n)$.

$$\frac{1}{n} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & a_n = \frac{1}{n} \end{array}$$

$a_n = \sqrt{n-5}$ Attenzione, deve essere $n \geq 5$

$$n \longmapsto a_n = \sqrt{n-5} \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ t.c. } n \geq 5$$

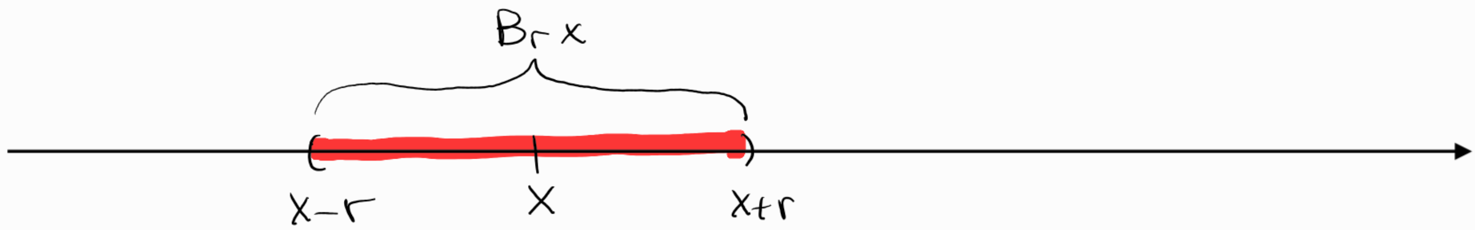
DEF Intorno di un numero reale.

Dato $x \in \mathbb{R}$, dato $r \in \mathbb{R}^+$ (cioè $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$).

si dice **intorno sferico di centro x e raggio r**

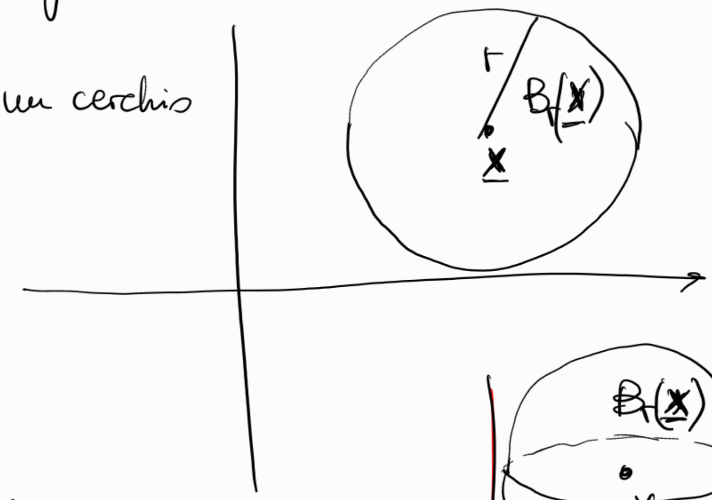
l'intervallo $B_r(x) = (x-r, x+r) = \{y \in \mathbb{R} : x-r < y < x+r\} =$

$$= \{y \in \mathbb{R} : |y-x| < r\}$$

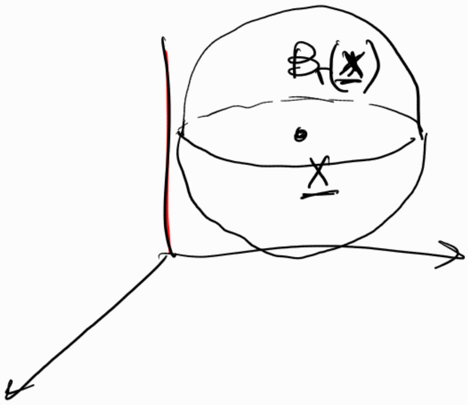


$$|y-x| = \left\{\begin{array}{ll} y-x & \text{se } y > x \\ x-y & \text{se } y < x \end{array}\right\} = \text{distanza di } x \text{ da } y.$$

In $\mathbb{R}^2$ un intorno sarà un cerchio

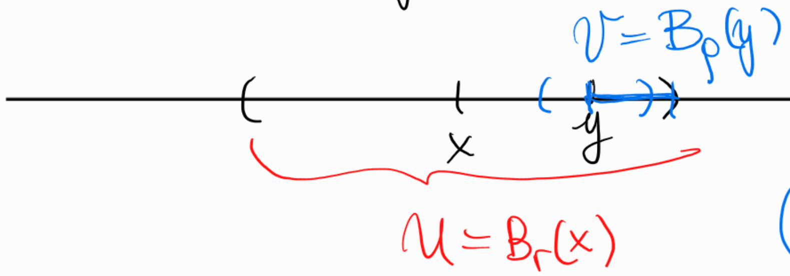


In $\mathbb{R}^3$ un intorno sarà una palla



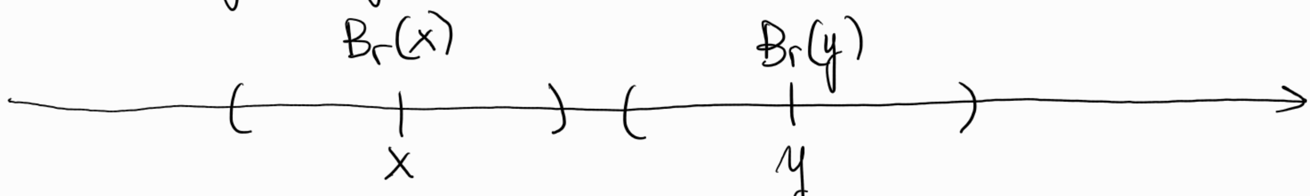
Proprietà degli intorni

1) se $\mathcal{U}$ è un intorno di x, $x \in \mathcal{U}$
2) se $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ sono intorni di x, $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ è ancora un intorno di x.
3) Se $\mathcal{U}$ è un intorno di x, e se $y \in \mathcal{U}$, allora esiste un intorno $\mathcal{V}$ di y tutto contenuto in $\mathcal{U}$



(Basta prendere $\rho \leq r - |y-x|$

4) (Separazione) Se $x \neq y$, allora esistono due intorni risp di x e di y disgiunti tra loro



Basta prendere $r \leq \frac{|y-x|}{2}$

Intorni di $+\infty$ e $-\infty$.

Si dice intorno di $+\infty$ una semiretta della forma

$$(a, +\infty] \qquad a \in \mathbb{R}$$

Si dice intorno di $-\infty$ una semiretta della forma

$$[-\infty, a) \qquad a \in \mathbb{R}$$

Consideriamo $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ retta reale estesa

Anche su $\mathbb{R}^*$
Continuano a valere le proprietà 1) – 4) viste prima

Proprietà vere definitivamente

Una certa proprietà $P(n)$ dipendente da $n \in \mathbb{N}$,
si dice vera definitivamente (per $n \to +\infty$) se $\exists\, \bar{n} \in \mathbb{N}$ t.c.

$P(n)$ è vera $\quad \forall n \geq \bar{n}$

$>$ si può usare indifferentemente "$>$" o "$\geq$"

Esempio 1 $\qquad P(n) \qquad \frac{1}{n} < \frac{1}{1000}$ definitivamente (per $n \to +\infty$)

$$\Updownarrow$$

$$n > 1000$$

$P(n)$ è vera $\quad \forall n > 1000$

$\qquad\qquad\quad\ \forall n \geq 1001$

$\boxed{\text{Quindi } P(n) \text{ è vera definitivamente}}$

Esempio 2 $\quad$ Gli angoli interni di un poligono regolare di n lati sono ottusi $\quad P(n)$

Falsa per $n = 3$
Falsa per $n = 4$
Vera da 5 in poi. , cioè vera definitivamente

Esempio 3 $\quad a_n = n^2 - 100n$ è definitivamente crescente.

$a_n \leq a_{n+1}$ $\qquad$ definitivamente.

$$n^2 - 100n \overset{?}{\leq} (n+1)^2 - 100(n+1)$$

$$\Updownarrow$$

$$\cancel{n^2} - \cancel{100n} \overset{?}{\leq} \cancel{n^2} + 2n + 1 - \cancel{100n} - 100.$$

$$\Updownarrow$$

$$2n - 99 \geq 0$$

$$n \geq \frac{99}{2} \qquad\qquad n \geq 50$$

Esempio 4

$$(-1)^n \geq 0 \qquad \text{definitivamente?}$$

NO, perché $\forall \bar{n} \ \exists n > \bar{n}$ dispari.

Esempio 5

$$P(n) \qquad 1 \overset{A}{<} \frac{n^2}{n^2-5} \overset{B}{<} \frac{11}{10}$$

A $\quad 1 < \dfrac{n^2}{n^2-5} \iff \dfrac{\cancel{n^2}-5}{n^2-5} < \dfrac{\cancel{n^2}}{n^2-5} \iff$

$$\iff \frac{-5}{n^2-5} < 0 \iff n^2-5>0 \iff \boxed{n > \sqrt{5}}$$

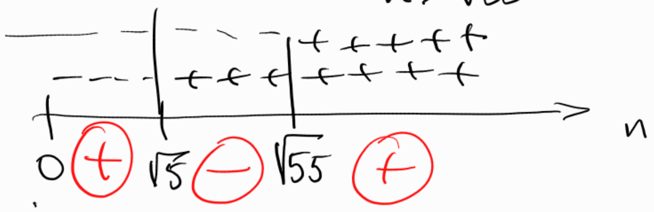
B $\quad \dfrac{n^2}{n^2-5} < \dfrac{11}{10} \iff \dfrac{10n^2}{\cancel{10}\,(n^2-5)} < \dfrac{11(n^2-5)}{\cancel{10}\,(n^2-5)}$

$$\iff \frac{n^2-55}{n^2-5} > 0 \iff n \leq 2 \text{ opp. } n > \sqrt{55}$$

$$\Uparrow$$

$n > \sqrt{55}$

$P(n)$ è vera $\forall n > \sqrt{55}$ $(\forall n \geq 8)$



Con questi ragionamenti, si prova che:

se $P(n)$ è vera definitivamente
$Q(n)$ " " "
$\Longrightarrow P(n) \wedge Q(n)$ sono vere definitivamente

Infatti $P(n)$ sarà vera $\forall n \geq \bar{n}_1$
$Q(n)$ sarà vera $\forall n \geq \bar{n}_2$
$\Longrightarrow P(n) \wedge Q(n)$ è vera $\forall n \geq \max\{\bar{n}_1, \bar{n}_2\}$