

Luciano Maiani:

. Lezione Fermi 29

Strumenti per le interazioni fondamentali: supersimmetria, stringhe e Kaluza-Klein

1. A ciascuno la sua matematica
2. Simmetrie e commutatori
3. Algebre di Lie graduate e supermultipletti
4. Nuove dimensioni spaziali
5. Traiettorie di Regge
6. Gabriele Veneziano scopre le stringhe
7. Supersimmetria, stringhe e Kaluza-Klein

1. A ciascuno la sua matematica

- Galileo: *La mathematica è l'alfabeto in cui Dio à scritto l'Universo*
- (piu' tardi Spinoza afferma: *Ethica, more geometrico demonstrata*)
- ma...**a ciascun periodo la sua Matematica:**
- Newton: inventa il *calcolo differenziale e integrale* e lo usa per descrivere il moto dei pianeti;
- Lagrange, Laplace etc. ne fanno lo strumento matematico per eccellenza
- Riemann: inventa la *geometria differenziale*, che sarà la base della Relatività Generale di Einstein;
- Schroedinger, Heisenberg e Dirac, introducono *Spazi di Hilbert e Operatori Lineari Hermitiani* per rappresentare gli stati dei sistemi fisici e le osservabili quantistiche;
- Weyl e Wigner, usano la *Teoria dei Gruppi*, per esplorare le conseguenze della simmetria per rotazioni e per trasformazioni di Lorentz;
- Gell-Mann e Ne'eman introducono la *Simmetria globale SU(3)* per descrivere le proprietà delle particelle subnucleari;
- la Teoria Standard si basa sulle *Simmetrie locali*, o di gauge, introdotte da Yang e Mills.

Matematiche del futuro ?

- Diversi problemi che attendono ancora soluzione ci potrebbero portare verso nuove strutture formali. Vediamone alcuni.
1. le particelle adroniche si presentano in stati con diversi valori dello spin:
 - barioni: ottetto di spin $1/2$, decupletto di spin $3/2$ (la Ottuplice Via di Gell-Mann)
 - mesoni: nonetto di spin 0 , nonetto di spin 1
 - queste strutture si ripetono a masse via via crescenti e con momenti angolari anche crescenti
 2. C'e' relazione tra massa e spin delle particelle di un dato tipo?
 3. C'e' relazione tra le particelle delle due grandi famiglie di particelle elementari ?
 1. spin $1/2$ (quark, leptoni), statistica di Fermi-Dirac
 2. spin $1, 0$ (gauge, Higgs), statistica di Bose-Einstein
 4. unificazione delle interazioni di gauge (SU(5) e simili) ?
 5. unificazione delle interazioni di gauge con la gravita' ?
 6. Risposte solo parziali...spunti interessanti...vicoli ciechi...

Supersimmetria, Kaluza-Klein, Stringhe e Superstringhe

2. Simmetrie e commutatori (lez. 8)

- In un GRUPPO continuo, es. le rotazioni, le trasformazioni prossime all'identita' sono caratterizzate dai Generatori Infinitesimi, matrici che obbediscono a regole di commutazione:

$$T_i T_j - T_j T_i = [T_i, T_j] = C_{ijk} T_k$$

$$[T_k, [T_i, T_j]] + [T_j, [T_k, T_i]] + [T_i, [T_j, T_k]] = 0$$

- le costanti C, antisimmetriche nei primi due indici, si chiamano costanti di struttura dell'algebra.
- ***(1) i generatori infinitesimi formano uno spazio lineare***
- ***(2) lo spazio dei generatori e' chiuso sotto l'operazione di prendere il commutatore***
- le soluzioni di queste equazioni per le costanti di struttura sono le algebre semplici trovate da Cartan, tutte e sole!
- Negli anni '60, Feza Gursey e Luigi Radicati propongono una simmetria che unifichi trasformazioni che agiscono sullo spin dei quark, SU(2), e trasformazioni che agiscono sul sapore dei quark, SU(3),:

$$Su^\uparrow = u^\downarrow; Qu^\uparrow = d^\uparrow, \text{ etc.}$$

- la soluzione piu' semplice: $SU(2) \otimes SU(3) \Rightarrow SU(6)$,
- SU(6) ammette multipletti che "spiegano" l'esistenza di 8 barioni di spin 1/2 e 10 di spin 3/2 e mesoni con spin 0 e 1

The quest for Relativistic SU(6)

- many attempts to find the relativistic SU(6) (notably by Salam and collaborators): U(12), SU(6)_w, etc..
- it was soon realized by Sidney Coleman (1965) that “unifying “ internal symmetries with the Lorentz group was troublesome;
- the story ended with the no-go theorem by S. Coleman and J. Mandula: non-trivial S-matrix requires factorization of the internal symmetry and Poicare group.

PHYSICAL REVIEW

VOLUME 138, NUMBER 5B

7 JUNE 1965

Trouble with Relativistic SU(6)*

SIDNEY COLEMAN†

Lyman Laboratory of Physics, Harvard University, Cambridge, Massachusetts

(Received 18 January 1965; revised manuscript received 5 February 1965)

PHYSICAL REVIEW

VOLUME 159, NUMBER 5

25 JULY 1967

All Possible Symmetries of the S Matrix*

SIDNEY COLEMAN† AND JEFFREY MANDULA‡

Lyman Laboratory of Physics, Harvard University, Cambridge, Massachusetts

(Received 16 March 1967)

- non relativistic SU(6) is justified by the constituent quark model: effective quarks move non-relativistically
- approximate description of the properties of lowest baryons and perhaps first orbital excitations (70, L=1) to organize negative parity resonances
- in naive quark model, there are only spin 1/2 constituents: no need to unify different spins
- but how can we unify “fundamental” particles with different spin ?

Volume 49B, number 1

PHYSICS LETTERS

18 March 1974

**A LAGRANGIAN MODEL INVARIANT UNDER
SUPERGAUGE TRANSFORMATIONS**

J. WESS

Karlsruhe University, Germany

and

B. ZUMINO

CERN, Geneva, Switzerland

Received 4 January 1974

answer is supersymmetry:
operators that change spin
are FERMIONIC, graded
Lie algebras evade C&M
theorem !

3. Algebre di Lie graduate e supermultipletti

- Ai generatori delle traslazioni dello spazio tempo, P_μ , si aggiungono degli operatori Q_α che sono
 - spinori di Weyl
 - obbediscono a regole di anti-commutazione

$$[P_\mu, P_\nu] = 0; \quad [P_\mu, Q_\alpha] = 0$$

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_\beta\} = \sigma_{\alpha\beta}^\lambda P_\lambda$$

- Q porta 1/2 unita' di spin e trasforma bosoni in fermioni e viceversa

- Multipletti supersimmetrici a massa =0:

- Scalare: uno spinore di Majorana e due scalari:
- vettoriale: un vettore e uno spinore di Majorana
- gravitone: tensore e uno spinore di Majorana

- materia: due multipletti scalari (fermione di Dirac e due scalari carichi): elettrone+2 (s-elettroni), quark + 2(s-quark)...etc.

elicitá	gravitá	gauge	materia
+2	g^{++}	–	–
$+\frac{3}{2}$	$\psi_g^{\uparrow+}$	–	–
+1	–	A^+	–
$+\frac{1}{2}$	–	χ_A^\uparrow	ψ^\uparrow
0	–	–	A, B
$-\frac{1}{2}$	–	χ_A^\downarrow	ψ^\downarrow
-1	–	A^-	–
$-\frac{3}{2}$	$\psi_g^{\downarrow+}$	–	–
-2	g^{--}	–	–

• fotone+fotino

• bosone di Higgs+higgsino

• gravitone+gravitino

Neutralini = Materia Oscura ???

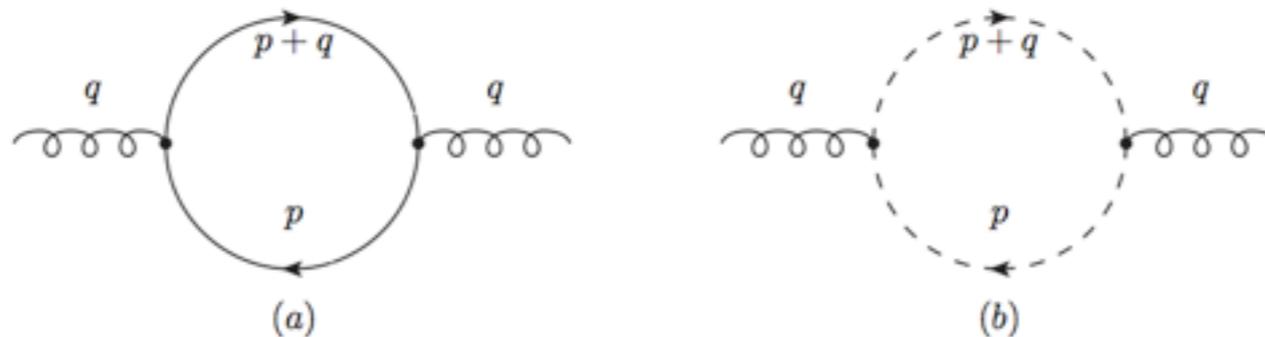
Super Traccia

- In un multipletto: # gradi di liberta' fermionici = # g.d.l. bosonici
- definiamo la SuperTraccia:

$$STr[\mathcal{O}] = \sum_i (-1)^{2J} \mathcal{O}_{ii};$$

$$STr[1] = 0$$

- le correzioni dovute alle particelle in un loop tendono a cancellarsi



- solo divergenze logaritmiche!

$$A = \sum (-1)^{2J} \left[A \Lambda^2 + B \log\left(\frac{M_J^2}{\Lambda^2}\right) + C_J \right] =$$

$$= STr \left[B \log\left(\frac{M^2}{\Lambda^2}\right) + C \right]$$

4. Nuove dimensioni spaziali

- Se lo spazio-tempo avesse 5 dimensioni (1 tempo+ 4 spazio)?
- Theodore Kaluza, 1919, in 5 dimensioni il tensore metrico si riduce:
$$g^{AB} \rightarrow g^{\mu\nu}, \quad g^{\mu 5} = g^{5\mu}, \quad g^{55} \quad (\mu, \nu = 1, 4)$$
- le equazioni di Einstein si riducono alle equazioni di Maxwell per $g^{\mu 5} = A^\mu$
- gravitazione, elettromagnetismo + un campo scalare supplementare: una teoria unificata di Maxwell-Einstein !
- ma come riconciliare la 5 dimensione con quello che vediamo?
- Oscar Klein, 1926: Meccanica Quantistica + Relativita' Generale
 - La dimensione 5 e' curvata dalla gravita' in un cerchio di raggio R
 - le onde che si propagano nel cerchio devono avere lunghezza d'onda sottomultiplo della circonferenza: $n\lambda = 2\pi R$, ovvero, con De Broglie:

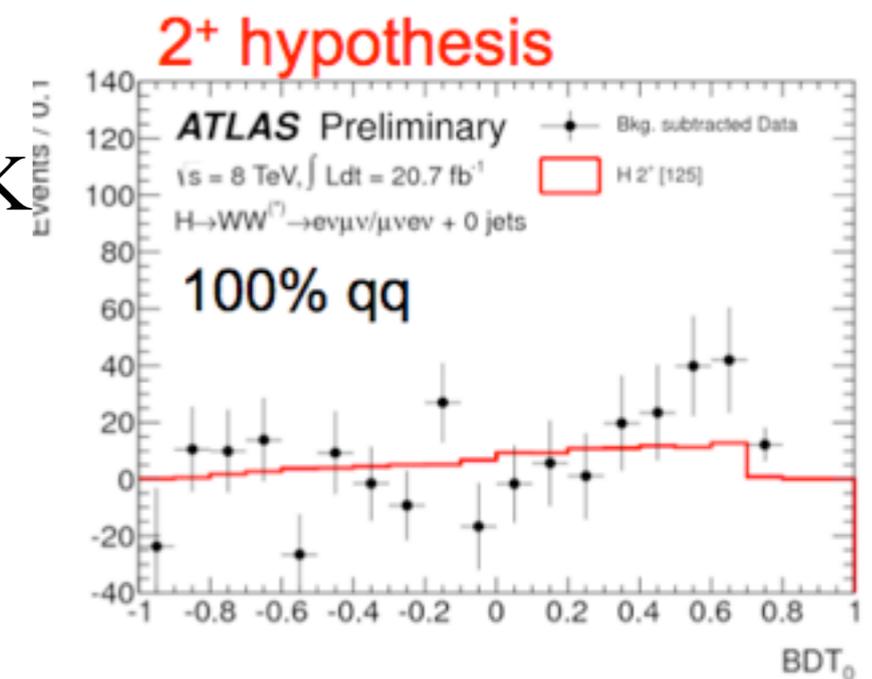
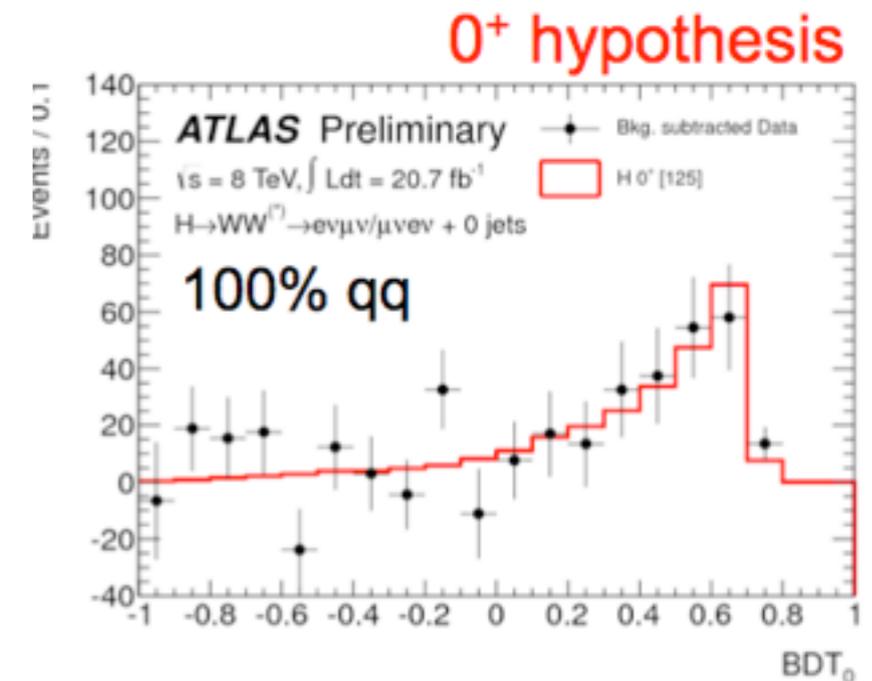
$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{\hbar 2\pi}{\lambda} = \frac{\hbar n}{R}$$

Ricorrenze di Kaluza-Klein

- se R e' piccolissimo, solo particelle di alta o altissima energia possono esplorare le dimensioni addizionali (LHC?)
- per lo stesso motivo, una particella di massa zero in 5 dimensioni, deve avere:

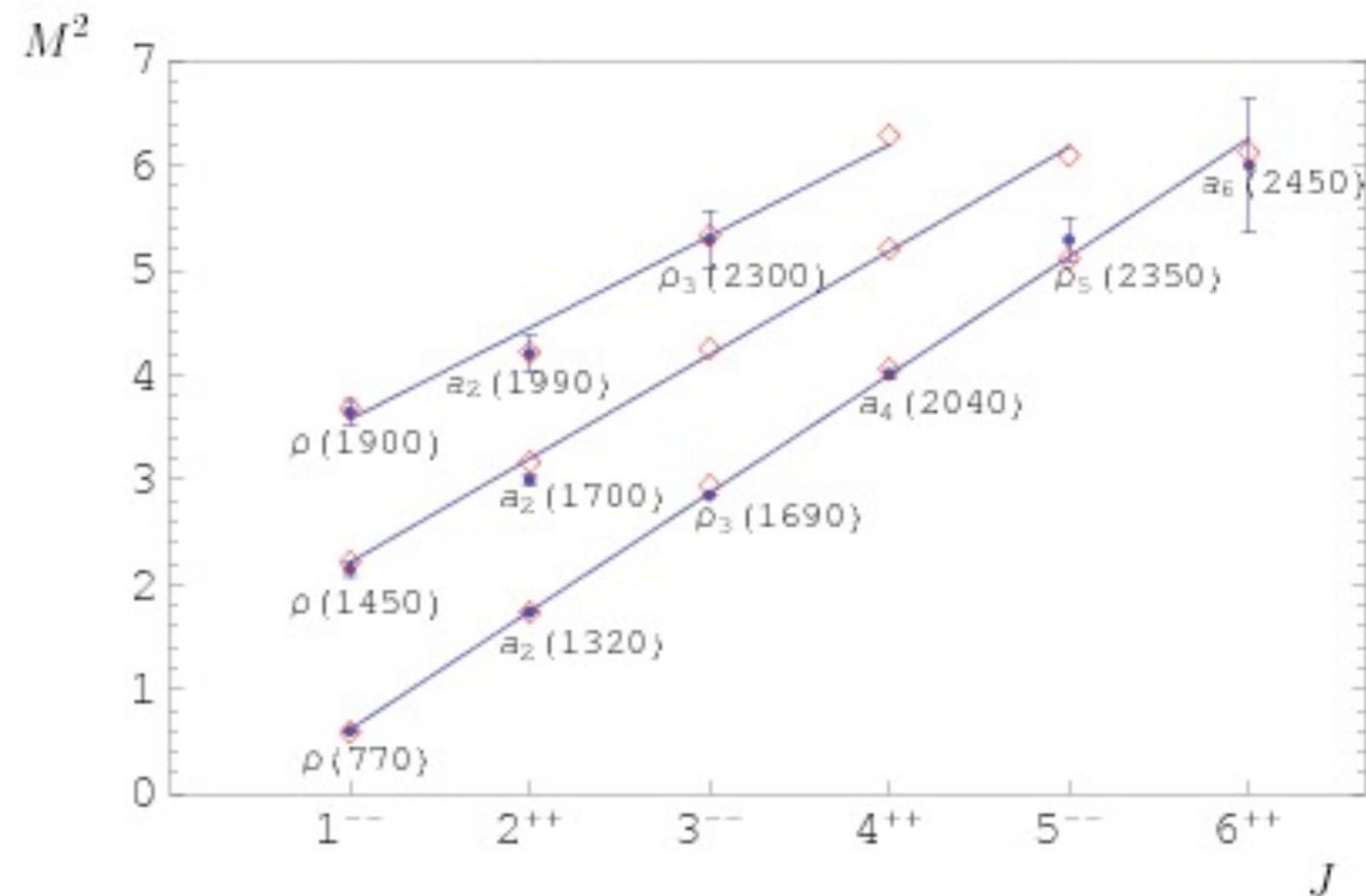
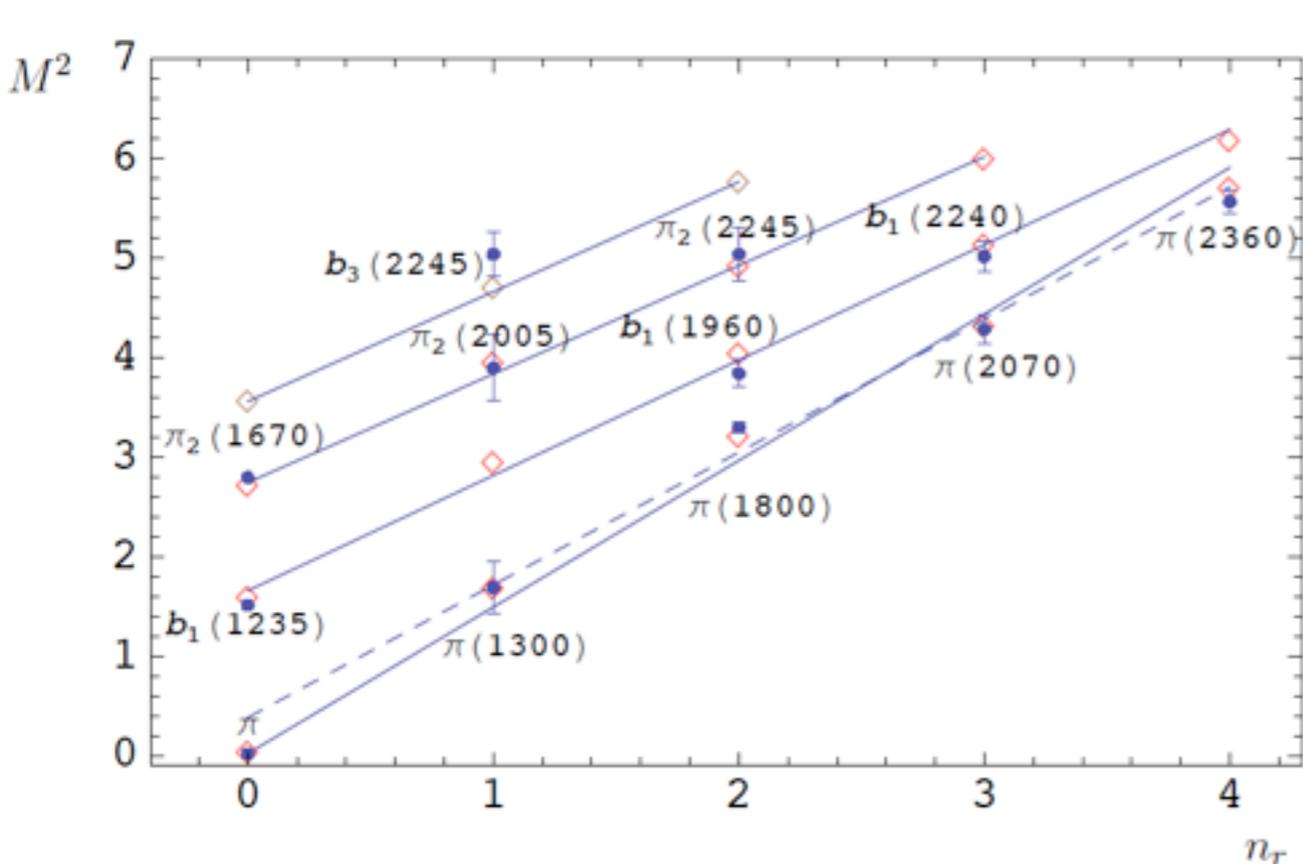
$$E^2 = \sum_1^3 (p^i)^2 + (p^5)^2 = \mathbf{p}^2 + \left(\frac{\hbar}{R}\right)^2 n^2 = \mathbf{p}^2 + M_n^2$$

- in uno spazio multidimensionale con extra dimensioni compatte, le particelle devono avere ricorrenze di massa elevata, proporzionale a n (KK tower)
- il “bosone di Higgs” non potrebbe essere la prima ricorrenza KK del gravitone?
- non sembra, ma bisogna guardare meglio....



5. Traiettorie di Regge

- Traiettorie di Regge: $J=\alpha(M^2)$
- Traiettorie lineari: $J=\alpha'(0)M^2+ b$, ovvero: $M^2=[\alpha'(0)]^{-1} (J-b)$
- mesoni e barioni si comportano in modo simile
- tutto fa pensare che le traiettorie proseguano all'infinito (non c'è ionizzazione dei quark: le forze di colore confinano in modo permanente)



The (n_r, M^2) Regge trajectories for spin-singlet isovector mesons π , b_1 , π_2 and b_3

Dualita' DHS

- in teoria dei campi (QED) una sola particella scambiata (o poche)
- per avere l'ampiezza del processo dobbiamo sommare le ampiezze delle due storie, canale s e canale t

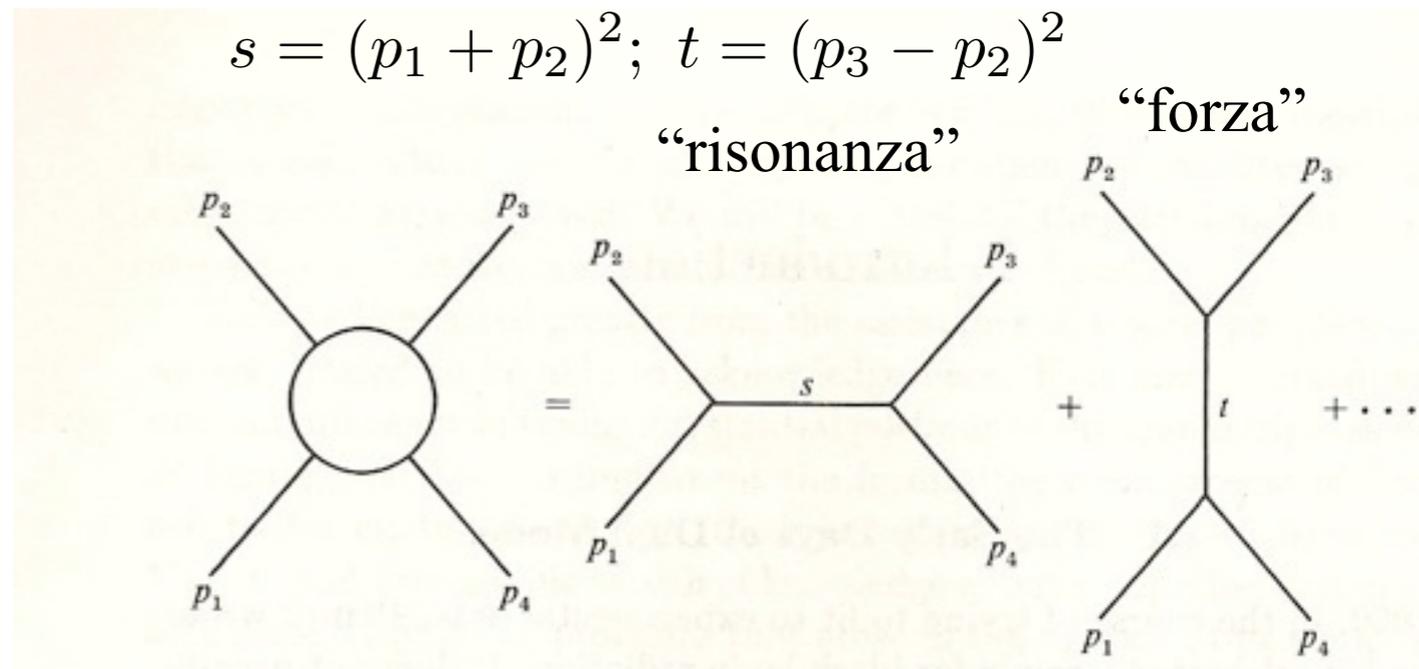
$$A(s, t) = A_s(s, t) + A_t(s, t)$$

$$A_s = g_J^2 \frac{t^J}{s - M_J^2}; \quad A_t = g_J^2 \frac{s^J}{t - M_J^2}$$

- per una data particella di spin J, A(s) e' una funzione regolare di t e non riproduce la singolarita' richiesta per lo scambio della particella nel canale t
- ma che succede se ci sono infinite risonanze (traiettorie di Regge)?
- l'ipotesi di "dualita'" (Dolen, Horn, Schmidt, 1968) dice che **sommare solo in un canale basta**:

$$A(s, t) = \sum_J g_J^2 \frac{(-t)^J}{s - M_J^2} \quad \left[= \sum_J g_J^2 \frac{(-s)^J}{t - M_J^2} \right]$$

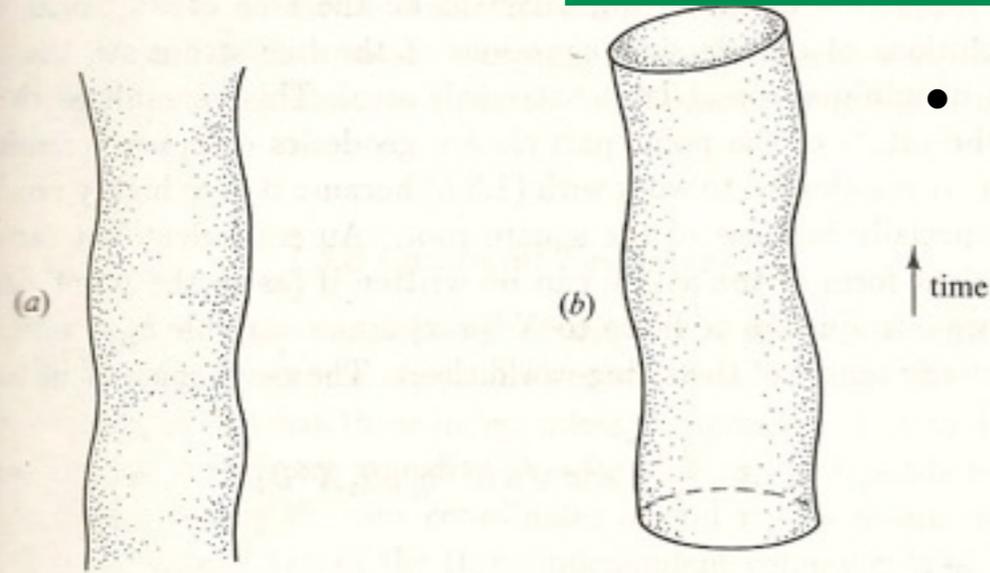
- la somma infinita puo' ben produrre una complessa struttura analitica in t.



6. Gabriele Veneziano scopre le stringhe

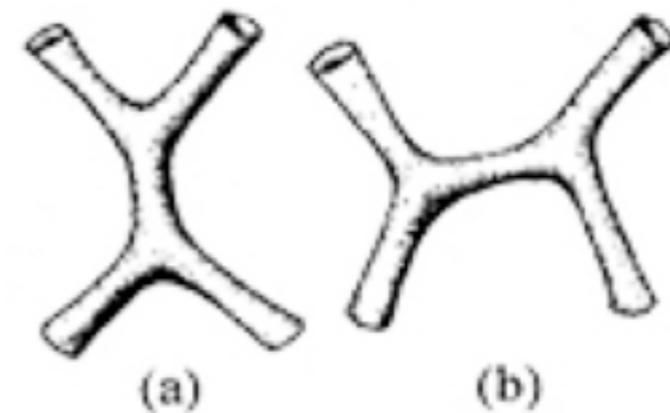
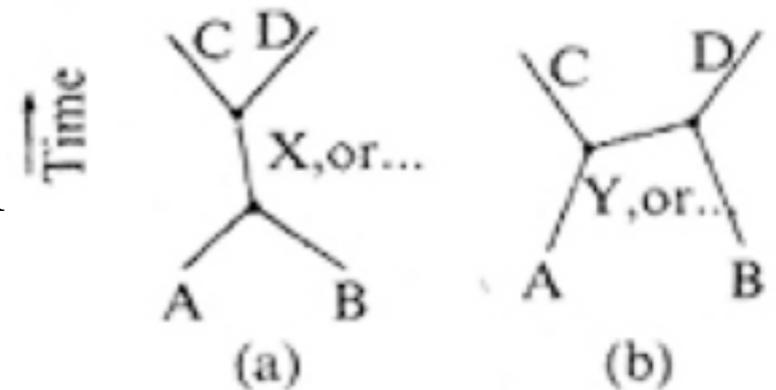
- la dualita' e' coerente con l'idea del bootstrap:
 - le forze “generano” le risonanze
 - ma, allo stesso modo, posso pensare che le risonanze generino le forze
 - la condizione: particelle-forza=particelle-risonanza determina l'ampiezza.
- La chiusura del cerchio e' stata ottenuta da Gabriele Veneziano (1969) che ha prodotto un formula analitica per l' ampiezza mesone-mesone ***che soddisfa le tre condizioni.***
- La “formula di Veneziano” e' stata paragonata alla formula di Planck del corpo nero: come quella, ha dato inizio ad una vera e propria rivoluzione scientifica;
- le singularita' della formula di Veneziano corrispondono ad un ricco spettro di stati che e' stato identificato (T. Goto e Y. Nambu, 1970) con lo spettro quantistico di una stringa, aperta o chiusa, che si propaga in uno spazio tempo di dimensione arbitraria, D .
- L'Azione della stringa scritta da Goto e Nambu e' semplicemente proporzionale all' area spazzata dalla stringa nel passare dalla configurazione iniziale a quella finale

Stringhe e dualita'

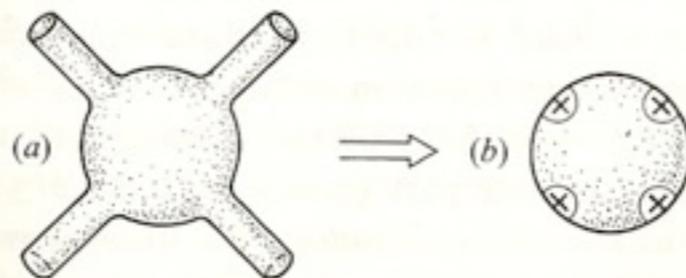


- Propagazione di una stringa aperta (a) e chiusa (b).

- Dualita' nelle stringhe: la rappresentazione in termini di stringa (chiusa) delle ampiezza di diffusione (a) e (b), in alto, portano alle figure (a) e (b) in basso che *sono in realta' la stessa figura*, perche' hanno la stessa topologia.
- C'e' un solo grafico di stringa (a livello zero loop) e una sola ampiezza, che possiamo raffigurare come una sfera con quattro uscite, relative alle particelle iniziali e finali.

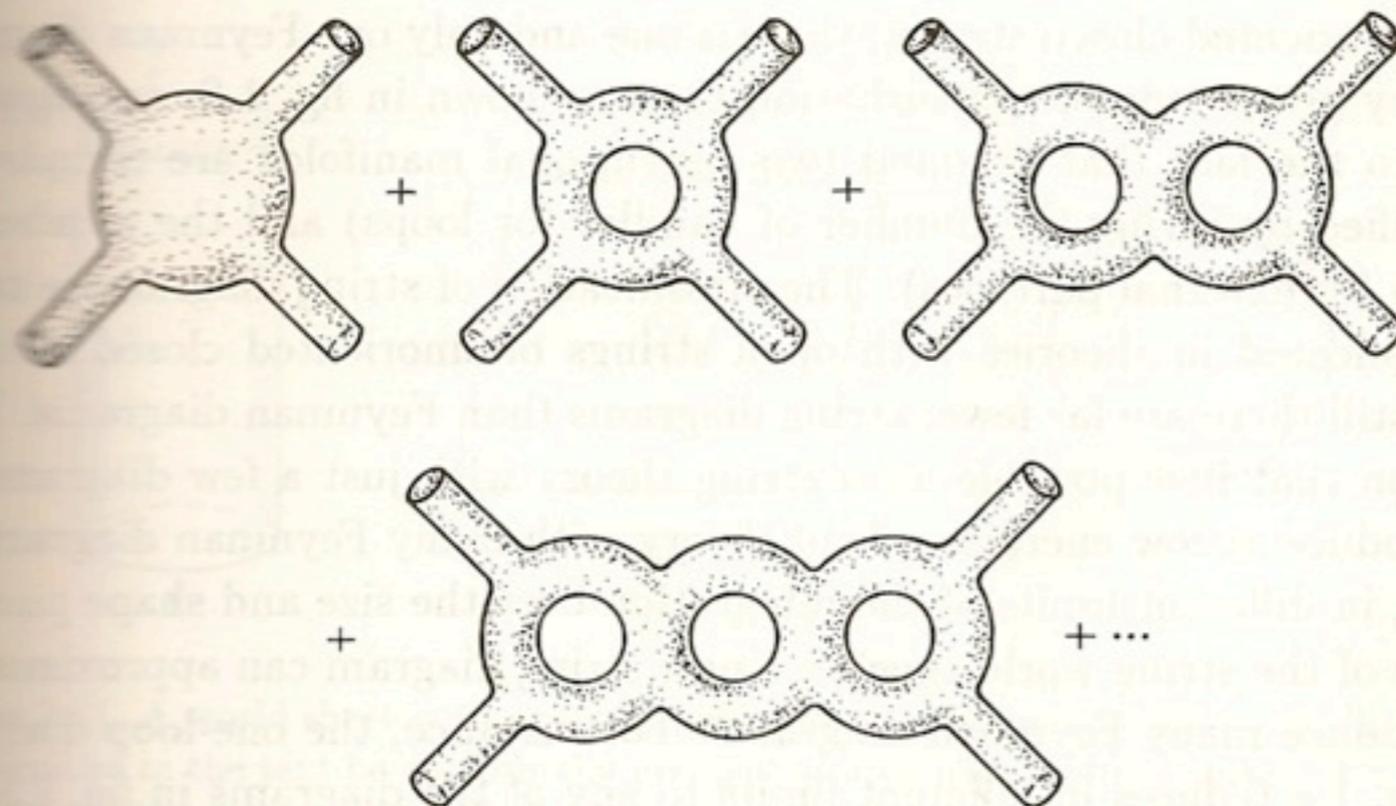
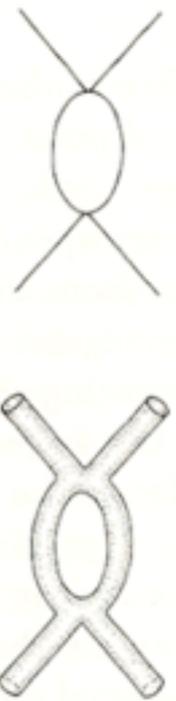
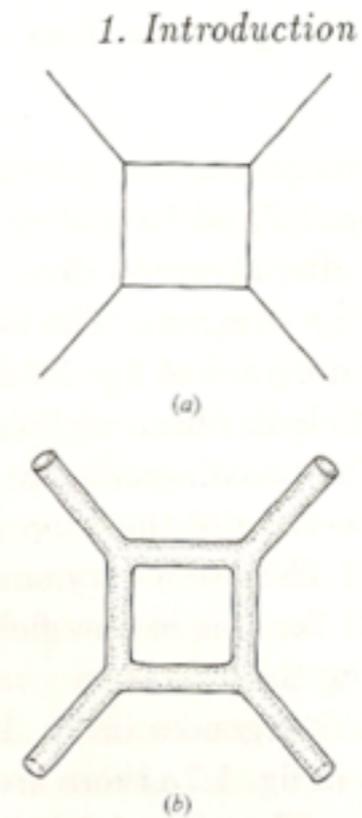
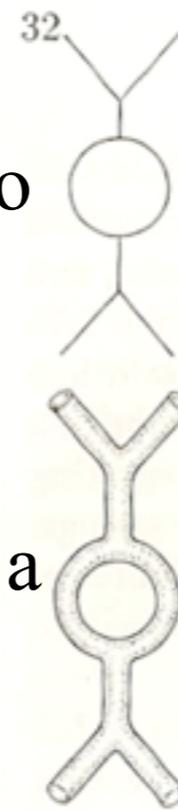


1.4 String Interactions

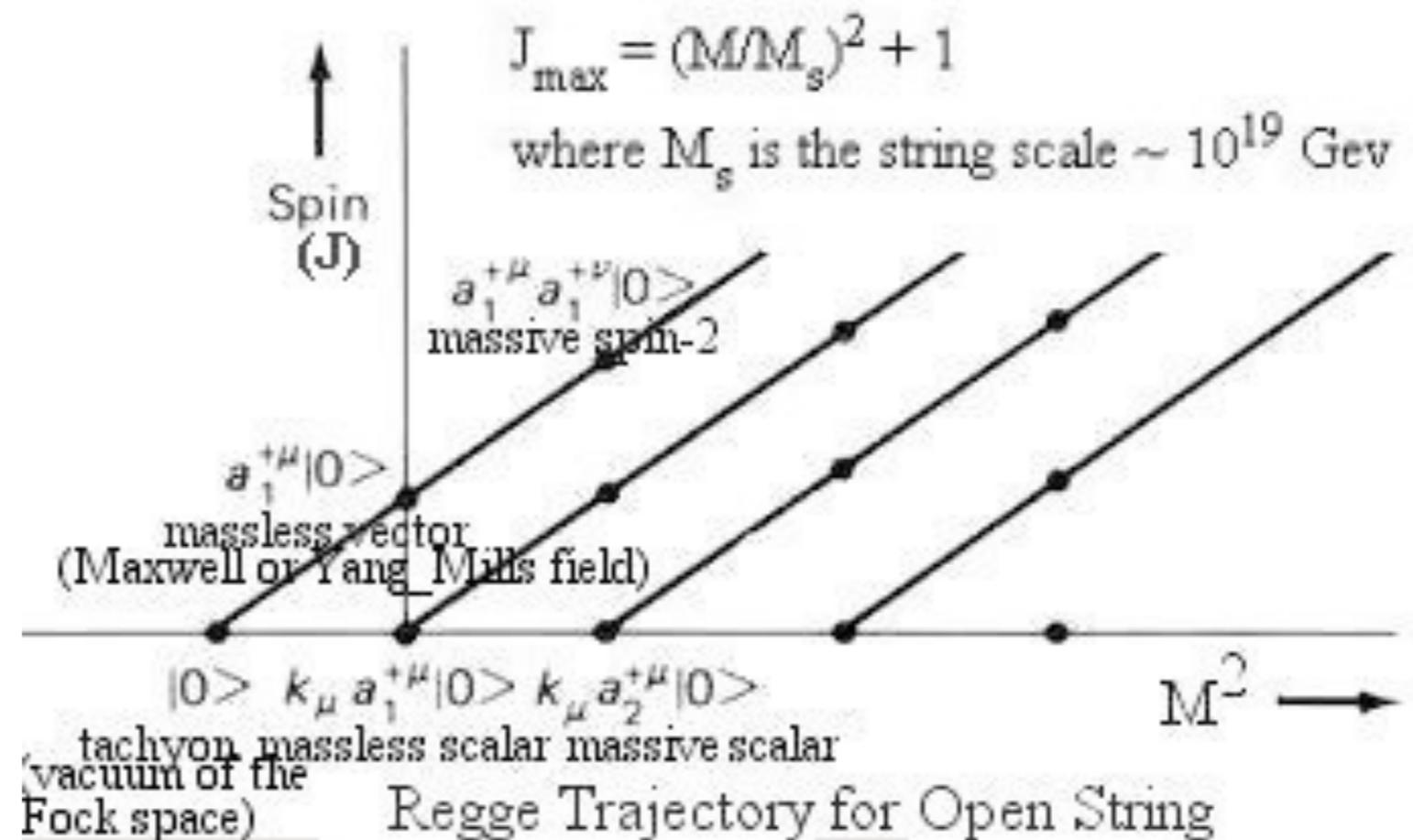
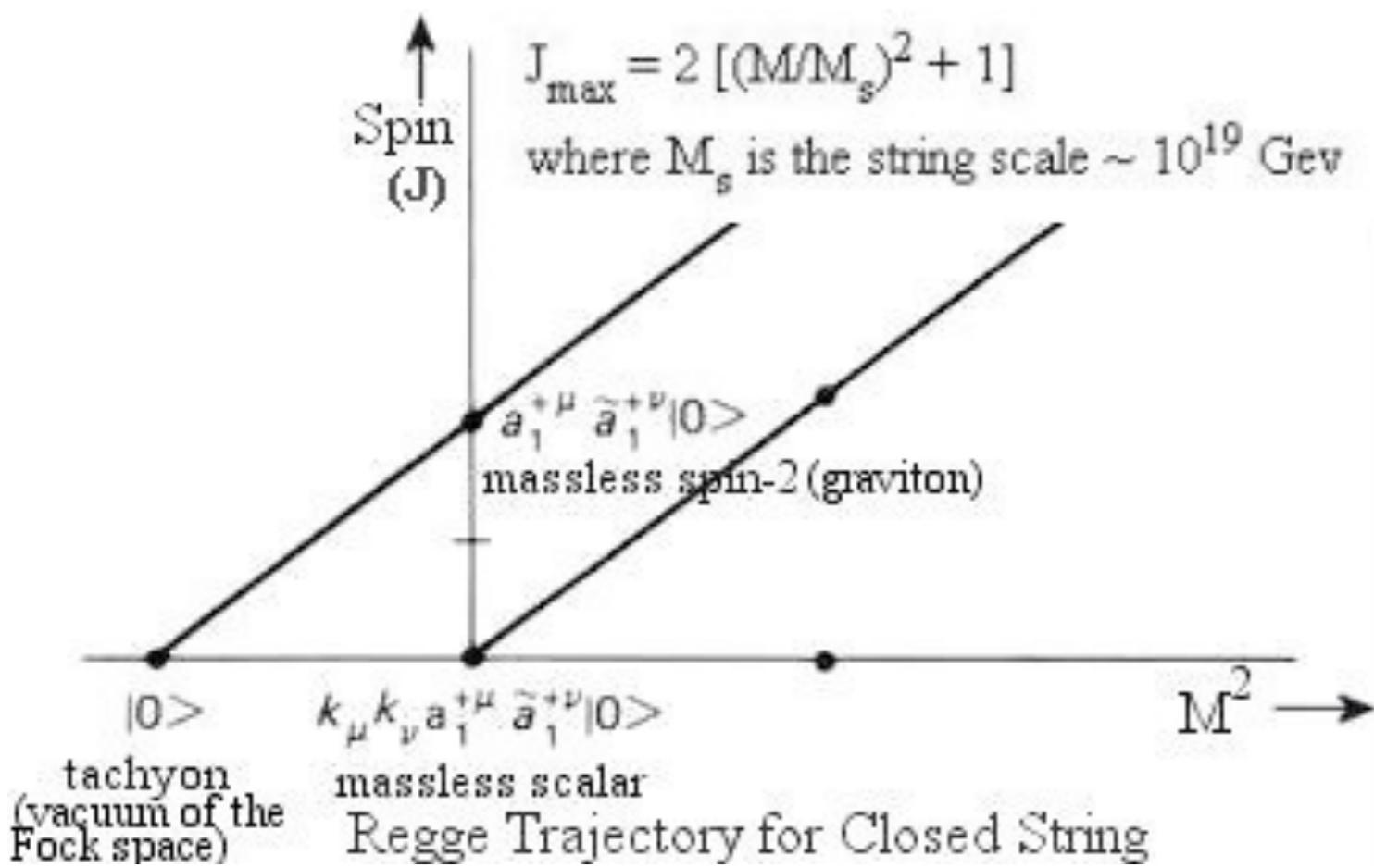


Loop

- I diversi processi a un loop si riassumono in grafici di stringa, tutti con un solo anello
- di nuovo un solo grafico
- lo sviluppo in loop, qui sotto, e' relativo a a grafici topologicamente inequivalenti, con zero, uno, due...manici



- la natura estesa della stringa e' tale che l'integrazione sugli stati intermedi non da' luogo a divergenze ultraviolette.



Supersimmetria, stringhe e Kaluza-Klein

- Inizio anni '70: QCD descrive le interazioni forti (liberta' asintotica) anche nelle reazioni profondamente inelastiche, a differenza delle stringhe
- la supersimmetria permette di includere i fermioni
- Green e Schwarz fanno rivivere la teoria delle (super)stringhe come teoria della gravita' quantistica: lo spettro delle stringhe contiene una particella con $M=0$ e $J=2$, accoppiata come il gravitone nella teoria di Einstein
- Il pericolo per le stringhe non sono le divergenze, ma la possibile esistenza di ghost e altre patologie;
- puo' succedere che il valore $J=0$ corrisponda a $M^2 < 0$
- si parla in questo caso di un tachione (particella con velocita' $> c$)
$$E^2 = \mathbf{p}^2 + M^2 \rightarrow E < |\mathbf{p}| \rightarrow v = c \frac{|\mathbf{p}|}{E} > c$$
- l'assenza di tachioni richiede $D=26$ (Veneziano, stringa aperta, oppure Shapiro-Virasoro, stringa chiusa);
- oppure $D=10$ (superstringhe).
- Kaluza-Klein rivive !

- L'approfondimento degli aspetti matematici e fisici delle stringhe ha portato ad una mole monumentale di lavori di fisica teorica e matematica: andiamo verso la “teoria del tutto”?
- e ad una comunità vasta e agguerrita
- diffidenze persistono:
- qual'è la base fisica per cui gravità quantistica = teoria di stringa?
- quali le applicazioni “fenomenologiche”? per ora solo una migliore comprensione dei buchi neri...ancora in evoluzione
- ma se si potessero vedere i segnali dall'inflazione cosmica, tutto potrebbe cambiare...
- sarà la Math dei prossimi venti anni?