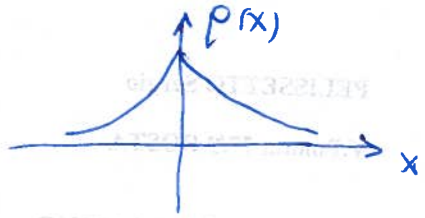
ESERCIZIO 1 

$\psi_\alpha(x) = \mathcal{N} e^{ik_0 x} e^{-k_0|x|}$

1.

$\langle\alpha|\alpha\rangle = 1 \Rightarrow \mathcal{N}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-2k_0|x|} = 2\mathcal{N}^2 \left[-\frac{1}{2k_0} e^{-2k_0 x}\right]_0^{\infty} = \frac{\mathcal{N}^2}{k_0} = 1$

$\mathcal{N} = \sqrt{k_0} \qquad \rho(x) = |\psi_\alpha(x)|^2 = k_0 e^{-2k_0|x|}$




2.

$\langle x\rangle = 0$ dato che $|\psi_\alpha(x)| = |\psi_\alpha(-x)|$

$\Delta x^2 = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2 = \mathcal{N}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, x^2 e^{-2k_0|x|} = 2k_0 \int_0^{\infty} dx\, x^2 e^{-2k_0 x}$

$\overset{(2k_0 x = y)}{=} \frac{2k_0}{(2k_0)^3} \int_0^{\infty} dy\, y^2 e^{-y} = \frac{1}{4k_0^2}\, 2! = \frac{1}{2k_0^2} \qquad \Delta x = \frac{1}{\sqrt{2}\, k_0}$

3.

$\langle p|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-ipx/\hbar} \mathcal{N} e^{ik_0 x} e^{-k_0|x|} \qquad h \equiv k_0 - \frac{p}{\hbar}$

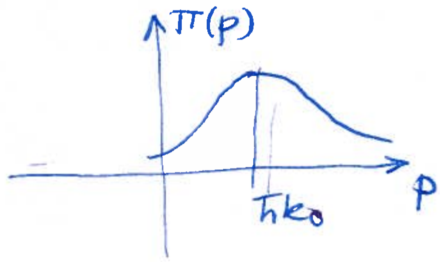
$= \sqrt{\frac{k_0}{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{ihx} e^{-k_0|x|}$

$= \sqrt{\frac{k_0}{2\pi\hbar}} \left[\int_0^{+\infty} dx\, e^{(ih-k_0)x} + \int_{-\infty}^{0} dx\, e^{(ih+k_0)x}\right]$

$= \sqrt{\frac{k_0}{2\pi\hbar}} \left[\frac{1}{ih-k_0}(-1) + \frac{1}{ih+k_0}\right]$

$= \sqrt{\frac{k_0}{2\pi\hbar}} \left[\frac{1}{k_0-ih} + \frac{1}{k_0+ih}\right] = \sqrt{\frac{k_0}{2\pi\hbar}}\, \frac{2k_0}{k_0^2+h^2}$

$\pi(p) = \frac{2k_0^3}{\pi\hbar} \frac{1}{\left[(p/\hbar - k_0)^2 + k_0^2\right]^2}$




4.

Curva simmetrica intorno a $p = \hbar k_0 \Rightarrow \langle p\rangle = \hbar k_0$

$$\Delta p^2 = \langle (p-\langle p\rangle)^2\rangle = \langle (p-\hbar k_0)^2\rangle$$

$$= \frac{2k_0^3}{\pi\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty} dp \frac{(p-\hbar k_0)^2}{[(p-\hbar k_0)^2/\hbar^2 + k_0^2]^2} \qquad \begin{array}{l} p-\hbar k_0 = x\hbar k_0 \\ dp = dx\,\hbar k_0 \end{array}$$

$$= \frac{2k_0^3}{\pi\hbar}(\hbar k_0)^3 \int dx \frac{x^2}{(x^2+1)^2 k_0^4}$$

$$= \frac{2}{\pi}(\hbar k_0)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{x^2}{(x^2+1)^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{(x^2+1)^2}\right] = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

Quindi $\Delta p^2 = (\hbar k_0)^2 \qquad \Delta p = \hbar k_0$

$$\Delta p \Delta x = \hbar k_0 \frac{1}{\sqrt{2}k_0} = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} > \frac{\hbar}{2}$$

5.

$[p, H] = 0 \qquad$ Quindi $\pi(p) = |\langle p|\psi\rangle|^2$ è indip. da $t$

Anche $\langle p\rangle$ è indipendente da $t$

In MQ valgono le equazioni di Hamilton in media

$$\frac{d}{dt}\langle\psi(t)|q|\psi(t)\rangle = \langle\psi(t)|\frac{\partial H}{\partial p}|\psi(t)\rangle =$$

$$= \langle\psi(t)|\frac{p}{m}|\psi(t)\rangle = \frac{\hbar k_0}{m}$$

Dato che $\langle\psi(0)|q|\psi(0)\rangle = 0$ segue

$$\langle\psi(t)|q|\psi(t)\rangle = \frac{\hbar k_0}{m}t$$

ESERCIZIO 2

Se le particelle sono distinguibili e $\alpha = 0$ i livelli sono

$$E = \frac{\hbar^2}{2I}\left[(\ell_1+1)\ell_1 + (\ell_2+1)\ell_2\right]$$

con autofunzioni $Y_{\ell_1}^{m_1}(\theta_1,\varphi_1)\,Y_{\ell_2}^{m_2}(\theta_2,\varphi_2)$ $\quad \left[|\ell_1 m_1\rangle_1 |\ell_2 m_2\rangle_2\right]$

I livelli più bassi sono

a)
$\ell_1 = \ell_2 = 0$ $\quad E = 0$ $\quad |00\rangle_1 |00\rangle_2$ $\quad$ non degenere

(b)
$$\begin{cases} \ell_1 = 0 \;\; \ell_2 = 1 \\ \ell_2 = 0 \;\; \ell_1 = 1 \end{cases} \quad E = \frac{\hbar^2}{2I}(2+0) = \frac{\hbar^2}{I} \quad \begin{cases} |00\rangle_1 |1m\rangle_2 \\ |1m\rangle_1 |00\rangle_2 \end{cases} \quad \text{deg } 3+3=6$$

(c)
$$\ell_1 = 1 \;\; \ell_2 = 1 \quad E = \frac{\hbar^2}{2I}(2+2) = \frac{2\hbar^2}{I} \quad |1\, m_1\rangle_1 |1\, m_2\rangle_2 \quad \text{deg } 3\times 3 = 9$$

Se $\alpha \neq 0$ gli stati $|\ell_1 m_1\rangle_1 |\ell_2 m_2\rangle$ non sono autostati di $H$. Dato che

$$E_\alpha = \frac{\alpha}{I}\vec{L}_1 \cdot \vec{L}_2 = \frac{\alpha}{2I}\left(L^2 - L_1^2 - L_2^2\right) \qquad \vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$$

gli stati rilevanti sono $|L_1 L_2 L L_z\rangle_L$. Quindi dobbiamo riscrivere gli stati dei livelli a), b), c) in termini di $|L_1 L_2 L L_z\rangle$

Livello a)

$L_1 = L_2 = 0 \Rightarrow L = 0$ $\quad E_\alpha = 0$

Quindi $\quad E = 0 \quad |00\rangle_1 |00\rangle_2 = |\overset{L_1}{0}\;\overset{L_2}{0}\;\overset{L}{0}\;\overset{L_z}{0}\rangle_L$

Livello b)

$$\begin{cases} L_1=0 & L_2=1 \\ L_2=0 & L_1=1 \end{cases} \Rightarrow L_1 \qquad E_\alpha = \frac{\alpha}{2I}\left(2\hbar^2-2\hbar^2-0\right)=0$$

Quindi $E=\frac{\hbar^2}{I}$ $\qquad \begin{cases} |00\rangle_1 |1m\rangle_2 = |0\,1\;1\,m\rangle_L \\ |1m\rangle_1 |00\rangle_2 = |1\,0\;1\,m\rangle_L \end{cases}$

Livello c)

$$L_1=L_2=1 \qquad L=\begin{cases} 2 & E_\alpha = \frac{\alpha\hbar^2}{2I}(6-2-2)=\frac{\alpha\hbar^2}{I} \\ 1 & E_\alpha = \frac{\alpha\hbar^2}{2I}(2-2-2)=-\frac{\alpha\hbar^2}{I} \\ 0 & E_\alpha = \frac{\alpha\hbar^2}{2I}(0-2-2)=-\frac{2\alpha\hbar^2}{\cancel{2}I} \end{cases}$$

Il livello si separa in 3 sottolivelli

$E=\frac{2\hbar^2}{I}-\frac{2\alpha\hbar^2}{I}$ $\quad [L=0] \quad |1\,1\;0\,0\rangle_L$ non deg.

$E=\frac{2\hbar^2}{I}-\frac{\alpha\hbar^2}{I}$ $\quad [L=1] \quad |1\,1\;1\,m\rangle_L$ deg $=3$

$E=\frac{2\hbar^2}{I}+\frac{\alpha\hbar^2}{I}$ $\quad [L=2] \quad |1\,1\;2\,m\rangle_L$ deg $=5$

Come ultimo passo dobbiamo imporre il principio di Pauli: gli stati devono essere simmetrici sotto scambio

Livello a) $E=0$ l'unico stato è simmetrico e quindi soddisfa il principio di Pauli

Livello b) Dobbiamo costruire gli stati simmetrici

$$|b)\,m\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|00\rangle_1|1m\rangle_2 + |1m\rangle_1|00\rangle_2\right]$$

che si può scrivere anche come

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|0\,1\;1\,m\rangle_L + |1\,0\;1\,m\rangle_L\right]$$

Gli stati $|b)\,m\rangle$ sono gli unici possibili.
La degenerazione è ridotta a 3.

Livello c)

Dobbiamo discutere le proprietà di scambio di

$$|1\,1\;0\,0\rangle_L\;,\;|1\,1\;1\,m\rangle_L\;\text{ e }\;|1\,1\;2\,m\rangle_L$$

Si utilizza qui il teorema generale che viene discusso di solito nell'ambito delle funzioni di spin

Se si hanno due particelle di spin 1 le autofunzioni con $S=2$ sono pari

$S=1$ dispari

$S=0$ pari

sotto scambio

Quindi

$|1\,1\;0\,0\rangle_L$ è pari [ok con Pauli]

$|1\,1\;1\,m\rangle_L$ è dispari [non accettabile per Pauli]

$|1\,1\;2\,m\rangle_L$ è pari [ok con Pauli]

Quindi solo due sottolivelli sono consistenti con Pauli: quelli con $L=0$ e $L=2$.

$$E=\frac{2\hbar^2}{I}-\frac{2a\hbar^2}{I} \qquad \text{non deg} \qquad [L=0]$$

$$E=\frac{2\hbar^2}{I}+\frac{a\hbar^2}{I} \qquad \text{deg. } 5 \qquad [L=2]$$

2. Dato che una misura di energia fornisce $E<\frac{5\hbar^2}{2I}$ si tratta di una combinazione degli stati dei livelli a) b) c) per i quali $L_1$ ed $L_2$ assumono solo i valori 0 e 1.

Nella misura di $L_{1z}/L_{2z}$ si ottiene solo $\pm\hbar$ e quindi si tratta di stati con $L_1=L_2=1$. Dato che $\psi$ deve essere symmetrico

$$|\psi\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\,1\rangle_1|1\,-1\rangle_2+|1\,-1\rangle_1|1\,1\rangle_2\right)$$

Per determinare $|\psi(t)\rangle$ dobbiamo cambiare base (6)
e passare a $|1\,1\,L\,L_z\rangle_L$.
Dalle tavole CG $1\times 1$:

$$|1-1\rangle_1|1\,1\rangle_2 = |\overset{m_1}{-1}\ \overset{m_2}{1}\rangle = \sqrt{\tfrac{1}{6}}|1\,1\,2\,0\rangle_L - \sqrt{\tfrac{1}{2}}|1\,1\,1\,0\rangle_L + \sqrt{\tfrac{1}{3}}|1\,1\,0\,0\rangle_L$$

$$|1\,1\rangle_1|1-1\rangle_2 = |1\,-1\rangle = \sqrt{\tfrac{1}{6}}|1\,1\,2\,0\rangle_L + \sqrt{\tfrac{1}{2}}|1\,1\,1\,0\rangle_L + \sqrt{\tfrac{1}{3}}|1\,1\,0\,0\rangle_L$$

$$|\psi\rangle = \sqrt{\tfrac{1}{3}}|1\,1\,2\,0\rangle_L + \sqrt{\tfrac{2}{3}}|1\,1\,0\,0\rangle_L$$

$$|\psi(t)\rangle = \sqrt{\tfrac{1}{3}}e^{-iE_{20}t/\hbar}|1\,1\,2\,0\rangle_L + \sqrt{\tfrac{2}{3}}e^{-iE_{00}t/\hbar}|1\,1\,0\,0\rangle_L$$

$$(\text{fase}) = \sqrt{\tfrac{1}{3}}e^{i(E_{00}-E_{20})t/\hbar}|1\,1\,2\,0\rangle_L + \sqrt{\tfrac{2}{3}}|1\,1\,0\,0\rangle_L$$

$$E_{00} - E_{20} = \frac{2\hbar^2}{I} - \frac{2\alpha\hbar^2}{I} - \frac{2\hbar^2}{I} - \frac{\alpha\hbar^2}{I} = -\frac{3\alpha\hbar^2}{I}$$

Definiamo $\omega = \frac{3\alpha\hbar}{I}$ per cui

$$|\psi(t)\rangle = \sqrt{\tfrac{1}{3}}e^{-i\omega t}|1\,1\,2\,0\rangle_L + \sqrt{\tfrac{2}{3}}|1\,1\,0\,0\rangle_L$$

3.

$L_z$ e $L^2$ commutano con $H$ per cui le probabilità non dipendono da $t$.

$\text{prob}(L^2=0) = \frac{2}{3}$ $\qquad$ $\text{prob}(L^2=6\hbar^2) = \frac{1}{3}$

$\text{prob}(L_z=0) = 1$

Per calcolare la probabilità di misurare un dato valore di $L_{1z}L_{2z}$ dobbiamo tornare alla base

$$|l_1\,m_1\rangle_1|l_2\,m_2\rangle_2$$

Dato che qui $l_1 = l_2 = 1$ sempre, usiamo una notazione semplificata

$$|1\, m_1\rangle_1 |2\, m_2\rangle_2 \equiv |m_1\, m_2\rangle_{12}$$

Dalle tavole CG 1x1

$$|\psi\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}e^{-i\omega t}\left(\frac{1}{\sqrt{6}}|1\,-1\rangle_{12} + \sqrt{\frac{2}{3}}|0\,0\rangle_{12} + \sqrt{\frac{1}{6}}|-1\,1\rangle_{12}\right)$$

$$+\sqrt{\frac{2}{3}}\left(\sqrt{\frac{1}{3}}|1\,-1\rangle_{12} - \sqrt{\frac{1}{3}}|0\,0\rangle_{12} + \sqrt{\frac{1}{3}}|-1\,1\rangle_{12}\right)$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{6}e^{-i\omega t}\right)\left(|1\,-1\rangle_{12} + |-1\,1\rangle_{12}\right)$$

$$+\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\left(1 - e^{-i\omega t}\right)|0\,0\rangle_{12}$$

$$\text{pro}(L_{1z}L_{2z} = -\hbar) = 2\left|\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{6}e^{-i\omega t}\right|^2$$

$$= 2\cdot\frac{2}{36}\left|2 + e^{-i\omega t}\right|^2$$

$$= \frac{1}{9}\left(4 + 1 + 4\cos\omega t\right) = \frac{1}{9}\left(5 + 4\cos\omega t\right)$$

$$\text{prob}(L_{1z}L_{2z} = 0) = \frac{2}{9}\left|1 - e^{-i\omega t}\right|^2 = \frac{2}{9}\left(2 - 2\cos\omega t\right)$$

$$= \frac{4}{9}\left(1 - \cos\omega t\right)$$

4.

Il secondo livello ha come base

$$|b)\, m\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|0\,0\rangle_1 |1\,m\rangle_2 + |1\,m\rangle_1 |0\,0\rangle_2\right]$$

Sono autofunzioni di $L_z = L_{1z} + L_{2z}$ con autovalore $\hbar m$.

Ora

$$\Delta H = \zeta\left(\cos^2\theta_1 + \cos^2\theta_2\right) = \frac{\zeta}{R^2}\left(z_1^2 + z_2^2\right) \quad (R \text{ raggio sfera})$$

È evidente che $[\Delta H, L_z] = 0$.
Quindi la perturbazione è diagonale.
Se $\Delta H = \Delta H_1 + \Delta H_2 = 5\cos^2\theta_1 + 5\cos^2\theta_2$ abbiamo

$$\langle b)\, m | \Delta H_1 | b)\, m \rangle =$$

$$= \frac{1}{2}\Big[ {}_1\langle 00| {}_2\langle 1m| \Delta H_1 |1m\rangle_2 |00\rangle_1 +$$

$${}_1\langle 1m| {}_2\langle 00| \Delta H_1 |1m\rangle_2 |00\rangle_1 + \rightarrow 0$$

$${}_1\langle 00| {}_2\langle 1m| \Delta H_1 |1m\rangle_1 |00\rangle_2 + \rightarrow 0$$

perchè ${}_2\langle 00|1m\rangle_2 = 0$

$$+ {}_1\langle 1m| {}_2\langle 00| \Delta H_1 |1m\rangle_1 |00\rangle_2 \Big]$$

$$= \frac{1}{2}\Big[ {}_1\langle 00|\Delta H_1|00\rangle_1 + {}_1\langle 1m|\Delta H_1|1m\rangle_1 \Big]$$

Dato che le funzioni d'onda sono simmetriche per scambio delle due particelle

$$\langle b)\, m | \Delta H_2 | b)\, m \rangle = \langle b)\, m | \Delta H_1 | b)\, m \rangle$$

Quindi

$$\langle b)\, m | \Delta H | b)\, m \rangle =$$

$$= 5\Big[ \langle 00|\cos^2\theta|00\rangle + \langle 1m|\cos^2\theta|1m\rangle \Big]$$

Ora

$$\langle 00|\cos^2\theta|00\rangle = \int d\Omega\, |Y_0^0|^2 \cos^2\theta$$

$$= \frac{1}{4\pi}\, 2\pi \int_{-1}^{1} d\cos\theta\, \cos^2\theta = \frac{1}{2}\cdot 2\int_0^1 dx\, x^2 = \frac{1}{3} \quad [x = \cos\theta]$$

$$\langle 1\pm1|\cos^2\theta|1\pm1\rangle = \int d\Omega\, |Y_1^{\pm1}|^2 \cos^2\theta =$$

$$= 2\pi \, \frac{3}{8\pi} \int d\cos\theta \, \sin^2\theta \cos^2\theta$$

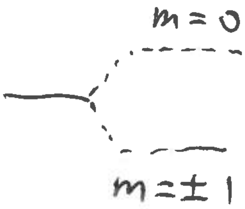
$$= \frac{3}{4} \cdot 2 \int_0^1 dx \, (1-x^2)\, x^2 = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{15} = \frac{1}{5}$$

$$\langle 1 \; 0 | \cos^2\theta | 1 \; 0 \rangle = \int d\Omega \, |Y_1^0|^2 \cos^2\theta$$

$$= 2\pi \, \frac{3}{4\pi} \int d\cos\theta \, \cos^4\theta$$

$$= \frac{3}{2} \cdot 2 \int_0^1 dx \, x^4 = 3 \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$$

Quindi il livello si separa in 2 sottolivelli




$$\Delta E = \zeta\left(\frac{1}{3} + \frac{3}{5}\right) = \frac{14}{15}\zeta \qquad \text{non deg.}$$

$$\Delta E = \zeta\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) = \frac{8}{15}\zeta \qquad \text{deg} = 2$$