



Dipartimento di Fisica
UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI GENOVA



Appunti di
Radioattività

Anno Accademico 2002/2003

P. Corvisiero

Indice

Cap 1	il nucleo atomico: generalità	pag. 1
Cap 2	Le leggi del decadimento radioattivo	pag. 15
Cap 3	Modello a goccia di liquido	pag. 28
Cap 4	decadimento alfa	pag. 36
Cap 5	decadimento beta	pag. 44
Cap 6	emissione gamma	pag. 62
Cap 7	Esempi di decadimenti	pag. 68
Cap 8	Modelli a particelle indipendenti	pag. 78
Cap 9	la fissione e la fusione	pag. 93
Cap 10	l'origine degli elementi	pag. 105
Cap 11	Le reazioni nucleari	pag. 122
Cap 12	Interazione particelle cariche - materia	pag. 152
Cap 13	Interazione fotoni - materia	pag. 173
Cap 14	Interazione neutroni - materia	pag. 189
Cap 15	La radioattività naturale	pag. 201
Cap 16	Gli acceleratori di particelle	pag. 230
Cap 17	I rivelatori di particelle	pag. 248
Cap 18	Elementi di dosimetria	pag. 291
Cap 19	Calcoli di schermature	pag. 330
Cap 20	Attivazione neutronica	pag. 362
Cap 21	Datazioni archeologiche e geologiche	pag. 374

Una copia del testo si trova al seguente indirizzo web:

<http://www.ge.infn.it/~corvi/doc/radioattivita/>

Indirizzi web utili (masse atomiche, dE/dx , coeff. atten., ...):

<http://www.ge.infn.it/~corvi/bookmarks.html> → radioattivita'

Capitolo 1

Il nucleo atomico: generalità

1.1 Struttura e sistematica del nucleo

La Fisica atomica era nata con la scoperta dell'elettrone (J.J.Thomson 1897). A distanza di poco più di 30 anni, con la scoperta del neutrone (Chadwick 1932) nasce la fisica nucleare. Nasce così la concezione dell'atomo costituito da una nuvola di elettroni distribuita in una zona di dimensioni 10^{-8} cm e da un nucleo centrale costituito da protoni e neutroni con dimensioni di 10^{-13} cm. Una dettagliata teoria dell'atomo e del nucleo è stata usata per la prima volta da Heisenberg nel 1932.

Precedentemente non era netta la distinzione tra atomo e nucleo: nel modello di Thomson gli atomi venivano descritti come distribuzioni sferiche di carica positiva, delle dimensioni di 10^{-8} cm all'interno delle quali erano sistemati gli elettroni in numero tale da garantire una carica complessivamente nulla all'atomo. Il modello tuttavia non rendeva conto dei risultati dell'esperimento di diffusione delle particelle α su atomi pesanti (un sottile foglio di oro dello spessore di $5 \cdot 10^{-4}$ mm) effettuato da Rutherford. Nel modello di Thomson le particelle α interagiscono con una sfera essenzialmente neutra (teorema di Gauss) e non possono quindi subire deflessioni a grandi angoli. Sperimentalmente si trovò invece che alcune particelle α erano deflesse ad angoli anche maggiori di 90° . Rutherford immaginò che l'atomo fosse composto da un nucleo centrale con carica positiva $+Ze$ delle dimensioni di $R_N \approx 10^{-12}$ cm; gli Z elettroni erano sistemati attorno al nucleo ad una distanza dell'ordine del raggio atomico $R_a \approx 10^{-8}$ cm.

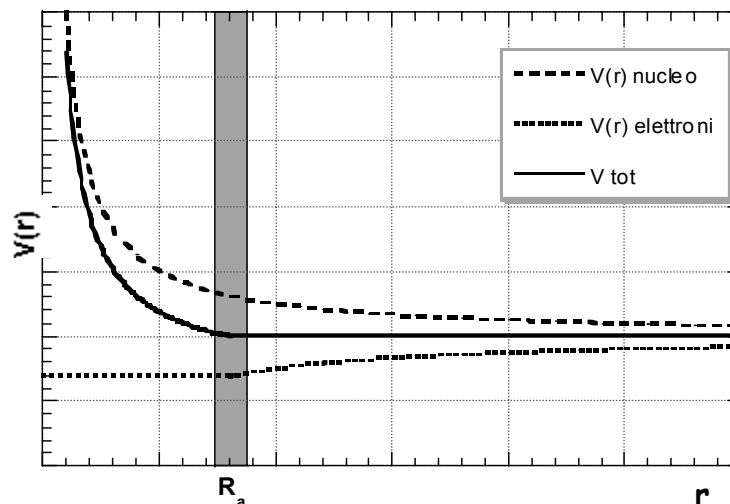


Figura 1.1 andamento del potenziale coulombiano dovuto al nucleo e agli elettroni

In questo modo le particelle α che passano ad una distanza inferiore a R_a dal nucleo centrale "vedono" una carica effettiva $+Ze$ e possono quindi subire deflessioni considerevoli. Gli elettroni esercitano una sorta di schermo elettrostatico a distanze maggiori del raggio atomico. In figura 1.1 è riportato il potenziale elettrostatico dovuto al nucleo centrale e agli elettroni, schematizzati come una corteccia sferica di raggio R_a e carica $-Ze$.

Una stima della dimensione del nucleo può essere ricavata dal seguente ragionamento. Il minimo parametro d'urto è dell'ordine delle dimensioni del nucleo e, se sono possibili deflessioni delle particelle α a grandi angoli, significa che vi può essere una quasi totale trasformazione dell'energia cinetica incidente in energia potenziale (per grandi angoli, nel limite di una retrodiffusione a 180° , la particella si ferma per un istante alla minima distanza dal centro del potenziale). Quindi:

$$\Delta E_\alpha = -E_\alpha = V(R_N) = -\frac{2Ze^2}{R_N} \qquad R_N = \frac{2Ze^2}{E_\alpha}$$

Poiché $e^2=1.44 \text{ MeV}\cdot\text{fm}$, e per $Z \approx 80$ ed $E_\alpha \approx 10 \text{ MeV}$, si ricava appunto che il raggio nucleare vale $R_N \approx 10^{-12} \text{ cm}$. (per una descrizione delle unità usate vedi paragrafi 1.3 e 1.5)

La scoperta del neutrone effettuata da Chadwick nel 1932 suggellò definitivamente il modello del nucleo atomico. E' da notare comunque che già nel 1920 era stata suggerita da Rutherford la possibilità che un elettrone ed un protone potessero essere così vicini nel nucleo da formare una particella neutra, e a questa particella diede appunto il nome di neutrone. Inoltre, poiché la massa dell'elettrone è circa 2000 volte più piccola della massa del protone, questa ipotetica particella avrebbe avuto la massa praticamente uguale a quella del protone, come di fatto è per il neutrone.

Il nuclide è un ben definito nucleo costituito da un determinato numero di protoni e di neutroni. Esso viene indicato come ${}^A_Z X_N$ o spesso più semplicemente ${}^A_Z X$ dove:

- X sta a indicare l'elemento chimico;
- Z è il numero atomico dell'elemento, cioè il numero di protoni nel nucleo (anche uguale al numero di elettroni atomici);
- A è il numero di massa del nucleo, cioè il numero totale di protoni (Z) e neutroni (N). I protoni ed i neutroni vengono chiamati genericamente nucleoni

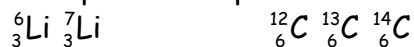
Ne risulta ovviamente che $N=A-Z$

Tutti i nuclidi con lo stesso numero di protoni Z si chiamano isotopi. Essi hanno lo stesso numero di elettroni e quindi le stesse proprietà chimiche, e sono indicati dallo stesso elemento X.

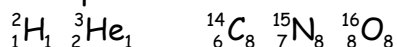
Tutti i nuclidi con lo stesso numero di neutroni N si chiamano isotoni: essi non hanno in generale lo stesso numero di protoni (e di elettroni) e quindi appartengono ad elementi chimici diversi.

Tutti i nuclidi con lo stesso numero di massa A si chiamano isobari: anche questa volta non possono appartenere allo stesso elemento.

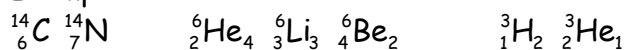
Esempio di isotopi:



Esempio di isotoni:



Esempio di isobari:



Il nome degli elementi è noto dalla chimica o dalla fisica atomica.

Un quantità importante del nuclide è la massa nucleare, cioè l'esatto valore della massa del nucleo. Esso non va confuso con la massa atomica, che comprende anche la massa degli elettroni. Le due quantità comunque sono numericamente molto vicine, dato che gli elettroni sono molto meno massivi.

La massa di un nucleo costituito da Z protoni e N neutroni $M(Z,N)$ non è uguale alla somma delle masse dei nucleoni costituenti:

$$M(Z,A) \neq Zm_p + (A-Z)m_n$$

essendo rispettivamente m_p e m_n la massa del protone e del neutrone.

Questo deriva dal principio di equivalenza massa-energia, principio fondamentale della meccanica relativistica di Einstein espresso dalla famosa relazione: $E=mc^2$, ed ampiamente verificato nella fisica nucleare: "Massa ed energia sono essenzialmente simili, sono soltanto espressioni differenti dello stesso concetto. La massa di un corpo non è costante, essa varia al variare della sua energia". Ad una variazione di energia ΔE di un sistema isolato deve essere associata una variazione di massa $\Delta m = \Delta E/c^2$ e viceversa. Questo principio si applica anche alla massa a riposo dei nuclei. L'energia potenziale dei nucleoni dentro il nucleo è negativa (stato legato): occorre infatti compiere del lavoro per rimuovere protoni e neutroni dal nucleo. La forza nucleare è infatti attrattiva, dovendo come minimo superare la enorme forza di repulsione elettrostatica con la quale i protoni si respingono. Alla energia potenziale negativa corrisponde una diminuzione di massa inerziale. Si definisce difetto di massa di un nucleo la differenza:

$$\Delta m = Zm_p + (A-Z)m_n - M(Z,A)$$

Il difetto di massa rappresenta quindi anche l'energia di legame del nucleo, cioè il lavoro che si deve compiere per portare tutti i nucleoni allo stato libero. Vediamo ora come si misurano le masse atomiche (da queste si deducono le masse nucleari).

1.2 Lo spettrometro di massa

Lo spettrometro di massa dà informazioni sulla massa atomica caratteristica di un particolare valore di Z ed A. Da questo valore, sottraendo Z volte la massa dell'elettrone, si ottiene la massa del nucleo. In effetti, essendo gli elettroni legati, la loro massa nell'atomo è minore della massa dell'elettrone libero: per il calcolo esatto (valori riportati nelle tabelle dei nuclidi) va sottratta quindi l'energia di legame atomica degli elettroni nell'atomo. Tuttavia questa energia di legame

elettronico rappresenta una correzione piccola, essendo dell'ordine del centinaio di eV o al più di qualche keV.

Il funzionamento dello spettrometro è schematizzato in figura 1.2 (spettrometro tipo Bainbridge)

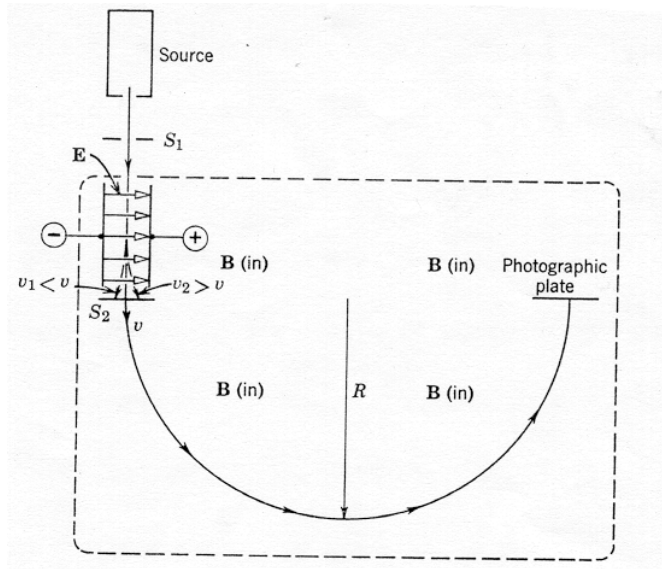


Figura 1.2 Lo spettrometro di massa

La sorgente produce atomi ionizzati con carica $+ne$, massa M , ed una certa distribuzione di velocità. Si noti che la carica ne dello ione non corrisponde alla carica Ze dell'atomo, in quanto la ionizzazione non è completa: essa è prodotta per effetto termoionico e quindi, di solito $n=1$ o al massimo $n=2$. Gli atomi ionizzati passano attraverso il foro S_1 e raggiungono la zona di campo magnetico B ed elettrico E . L'insieme di questi due campi agisce come selettore di velocità. Infatti, oltre la zona di campi B ed E vi è un secondo foro S_2 , e solo gli ioni che hanno una ben determinata velocità lo attraversano. La velocità selezionata dai collimatori è legata al valore di E e di B . Infatti le particelle si muovono di moto rettilineo solo se le forze elettrica e magnetica si annullano, cioè quando: $neE = nevB$. Ossia: $v = E/B$ non dipende dal valore di n (nel seguito assumeremo $n=1$). Gli ioni di velocità fissata, oltrepassato il foro S_2 , sono soggetti solo al campo magnetico costante e quindi seguono una traiettoria circolare di raggio R , tale che:

$evB = \frac{Mv^2}{R}$. Da cui si ricava: $M = \frac{RBe}{v} = \frac{RB^2e}{E}$. La massa atomica può essere determinata dalla misura assoluta di R , B ed E . In pratica si fa uso di masse note

per calibrare l'apparato. Con questo metodo si possono fare misure estremamente accurate di masse atomiche. Inoltre con lo spettrometro di massa si possono misurare, in un campione chimico, le percentuali isotopiche.

Un altro tipo di spettrometro di massa (tipo Dempster) è rappresentato in figura 1.3 In questo caso gli atomi ionizzati sono accelerati tra A e C da una d.d.p. V ed escono dal foro S_1 con energia cinetica data da:

$$eV = \frac{1}{2}Mv^2 \quad (1)$$

Incontrano la zona di campo magnetico B e vengono deflessi in un moto circolare definito dalla solita relazione:

$$evB = \frac{Mv^2}{R} \quad (2)$$

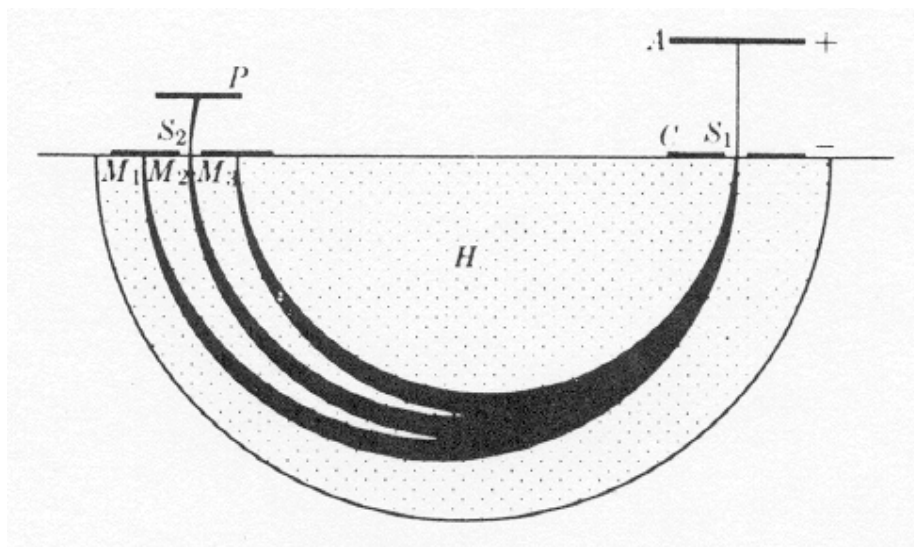


Figura 1.3

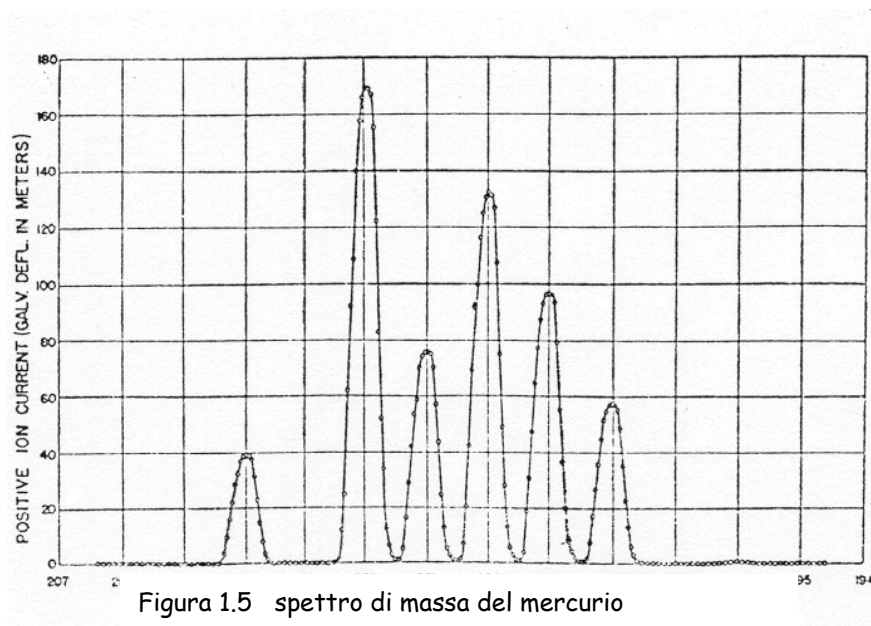
Affinché gli ioni attraversino la fenditura S_2 e siano rivelati in P, il raggio della traiettoria deve avere un particolare valore, legato al rapporto $\frac{e}{M}$. Infatti:

dalla (1): $v^2 = \frac{2eV}{M}$, e dalla (2): $v = \frac{eBR}{M}$. Eliminando quindi la velocità v : $\frac{e}{M} = \frac{2V}{B^2R^2}$.

Da cui si ricava il valore della massa $M = \frac{e \cdot B^2R^2}{2V}$

Per un fissato valore di R ogni $\frac{e}{M}$ corrisponde ad una data combinazione di V e B: variando quindi V, B o entrambi, saranno selezionate dal foro diverse masse M.

Anche in questo caso lo strumento è calibrato sulla misura di masse note. Le figure 1.4 e 1.5 che seguono riportano alcuni spettri di massa.



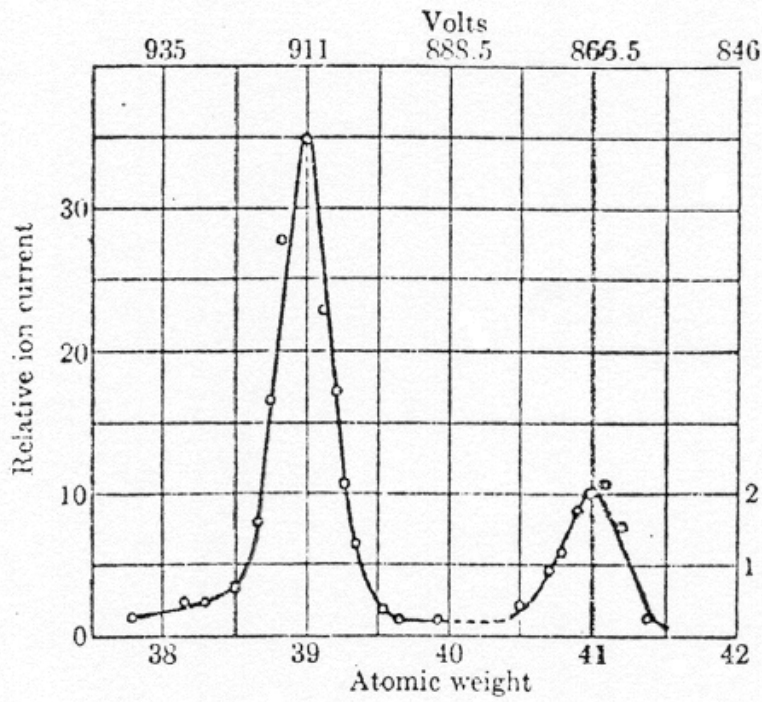


Figura 1.4 spettro di massa del potassio

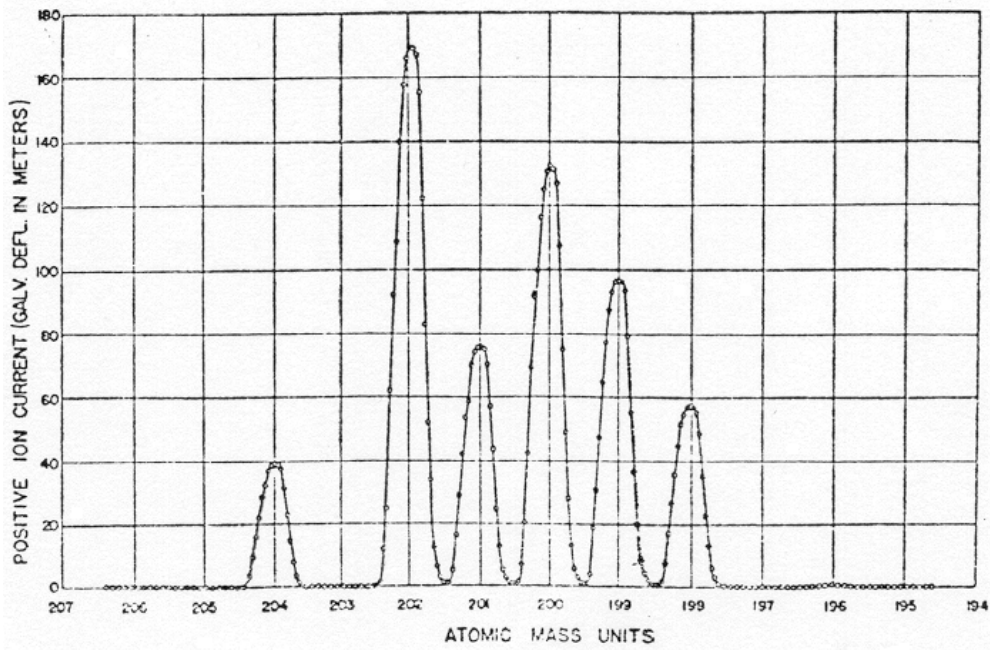


Figura 1.5 spettro di massa

1.3 Unità di misura per massa ed energia

In fisica nucleare la massa di un nucleo (e di un atomo) è misurata in unità di massa atomica. L'unità di massa atomica (amu, da: atomic mass unit) è stata scelta come un dodicesimo della massa atomica di un atomo neutro di ^{12}C . Il valore di 1 amu può essere facilmente espresso in grammi, ed è pari al reciproco del numero di Avogadro. Infatti:

$$1 \text{ amu} = \frac{1}{12} m(^{12}\text{C}) = \frac{1}{12} \frac{12}{N_{\text{Av}}} = 1.66 \cdot 10^{-24} \text{ g}$$

Noi useremo però un'altra unità di misura, molto più pratica specie quando si devono fare conti numerici che spesso coinvolgono energia e quantità di moto.

Dalla relazione di equivalenza massa-energia $E=mc^2$ si ricava per l'energia a riposo di una particella: $E_0 = m_0 c^2$. Ad esempio, l'energia a riposo di un elettrone vale:

$$E_0^e = m_0 c^2 = (9.11 \cdot 10^{-31}) \cdot (3 \cdot 10^8)^2 = 8.2 \cdot 10^{-14} \text{ J}; \text{ per un protone si ha invece: } E_0^p = m_0 c^2 = (1.67 \cdot 10^{-27}) \cdot (3 \cdot 10^8)^2 = 1.5 \cdot 10^{-10} \text{ J. Tali unità di misura sono inadeguate per la misura delle energie in fisica atomica e nucleare. Si ricorre ad un'altra unità di misura: l'elettronvolt (eV) ed i suoi multipli (keV, MeV). Quando si accelera una carica q tramite una differenza di potenziale V, il guadagno di energia cinetica vale: } \Delta T = qV.$$

Un elettronvolt è l'energia acquistata da una particella avente la carica unitaria (la carica di un elettrone) attraverso una differenza di potenziale di un Volt:

$$1 \text{ eV} = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ Coulomb} \cdot \text{Volt} = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ Joule} = 1.602 \cdot 10^{-12} \text{ erg}$$

$$\text{con i rispettivi multipli: } 1 \text{ keV} = 10^3 \text{ eV} \quad \text{e} \quad 1 \text{ MeV} = 10^6 \text{ eV}$$

In queste unità di misura: $E_0^e = 0.511 \text{ MeV}$ e $E_0^p = 938.21 \text{ MeV}$.

L'unità di misura della massa si ricava dalla solita equivalenza $E=mc^2$. Si esprime $m = E/c^2$, e si prende come unità di misura della massa il valore espresso in MeV/c^2

Così l'energia a riposo dell'elettrone vale 0.511 MeV , la sua massa a riposo vale $0.511 \text{ MeV}/c^2$; l'energia a riposo del protone vale 938.21 MeV , la sua massa a riposo vale $938.21 \text{ MeV}/c^2$. Possiamo introdurre una ulteriore semplificazione: specie quando si fanno conti relativistici, è molto più utile usare il cosiddetto "sistema $c=1$ ": come unità di misura della velocità scegliamo la velocità della luce nel vuoto ($c = 2.99796 \cdot 10^8 \text{ m/s} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$) e poniamo quindi $c=1$: lunghezza e tempo hanno le stesse dimensioni:

$$1\text{s} \rightarrow 3 \cdot 10^8 \text{m} \quad \text{e} \quad 1\text{m} \rightarrow 3.3 \cdot 10^{-9} \text{s}$$

Quindi la velocità, indicata con β ($\beta = v/c$ appunto), è una grandezza adimensionale. Inoltre, dalla relazione $E=mc^2$ si vede che energia e massa hanno le stesse dimensioni: scegliamo come unità di misura per entrambe il MeV. Anche il momento $p=mv$ ha le stesse dimensioni di m e di E , e sarà misurato anch'esso in MeV.

Vediamo alcune formule relativistiche che ci saranno utili nel seguito. Nel sistema $c=1$ la relazione: $E = mc^2$ diviene semplicemente: $E = m$

Nel caso di una particella in quiete: $E = m_0$, avendo indicato con m_0 la massa a riposo della particella. Se indichiamo con T l'energia cinetica possiamo scrivere:

$$E = m = m_0 + T$$

D'altra parte, sempre dalla relatività ristretta, sappiamo che $m = m_0\gamma$, dove $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$

$$T = m - m_0 = m_0(\gamma - 1)$$

Nel caso classico, dove $\beta \ll 1$ (ossia: $v \ll c$) si può sviluppare γ in serie ed arrestarsi al primo termine: $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}\beta^2$ che, sostituito nella espressione di T fornisce la usuale relazione classica: $T = m_0(\gamma - 1) \approx m_0\left(1 + \frac{1}{2}\beta^2 - 1\right) = \frac{1}{2}m_0\beta^2$

La quantità di moto si scrive: $p = m\beta = E\beta$. Pertanto il valore di β per una particella è dato dal rapporto tra il suo momento p e la sua energia totale: $\beta = \frac{p}{E}$

La quantità di moto si può anche scrivere: $p = m\beta = m_0\beta\gamma$. Quadrando: $p^2 = m_0^2\beta^2\gamma^2$

Le relazioni tra β e γ sono: $\gamma^2 = \frac{1}{(1 - \beta^2)}$, $\beta^2 = \frac{(\gamma^2 - 1)}{\gamma^2}$, $\beta^2\gamma^2 = (\gamma^2 - 1)$.

Pertanto: $p^2 = m_0^2(\gamma^2 - 1) = m^2 - m_0^2 = E^2 - m_0^2$ che fornisce le importanti relazioni:

$$E^2 = p^2 + m_0^2, \text{ ossia: } E = \sqrt{p^2 + m_0^2}, \quad p = \sqrt{E^2 - m_0^2}$$

D'altra parte, poichè $E = T + m_0$, si ha:

$$E^2 = p^2 + m_0^2 = T^2 + m_0^2 + 2Tm_0, \text{ da cui si ricava la relazione relativistica tra } p \text{ e } T:$$

$$p = \sqrt{T \cdot (T + 2m_0)}$$

che nel limite classico di basse velocità, quindi con $T \ll m_0$, si riduce a: $p = \sqrt{2m_0T}$

Vediamo ora alcuni esempi di impiego delle tabelle delle masse ed il loro utilizzo per il calcolo dei difetti di massa e delle energie di legame. Cominciamo con il nucleo "composto" più semplice esistente in natura, il deutone (nucleo dell'atomo di deuterio) ${}^2_1\text{H}_1 = d$, composto da un protone e da un neutrone, per il quale $Z=1$ e $A=2$. Sulle tavole non si trovano le masse "nucleari" (che nel seguito indicheremo con m , in minuscolo) ma le masse "atomiche" M .

$M_d = 1876.007 \text{ MeV}$ è la massa dell'atomo di deuterio

$M_p = 938.72 \text{ MeV}$ è la massa dell'atomo di idrogeno

$m_n = 938.51 \text{ MeV}$ è la massa del neutrone

Poiché sia l'atomo di deuterio che quello di idrogeno contengono un solo elettrone, si ha che:

$$M_d = m_d + m_e$$

$$M_p = m_p + m_e$$

Come è facile verificare, a causa dell'energia di legame, risulta: $m_d < m_p + m_n$. Il difetto di massa è pari a: $\Delta m = m_p + m_n - m_d = M_p + m_n - M_d = 2.22 \text{ MeV}$. Questa è appunto l'energia di legame del deutone, e rappresenta il lavoro che bisogna fare per separare il protone ed il neutrone.

Notare che abbiamo usato la masse atomiche, non quelle nucleari. Ma poiché il numero degli elettroni che compare nei due termini della differenza è lo stesso, il loro contributo in massa si cancella automaticamente. Questo è vero in genere, per tutti i nuclei. In effetti nella massa a riposo bisognerebbe tener presente che gli

elettroni sono legati, e quindi sottrarre la loro energia di legame. Questa è comunque dell'ordine di $13.5 \cdot Z$ eV e quindi almeno 8 ordini di grandezza minore della energia a riposo del nucleo ($\approx A \cdot 10^9$ eV)

Vediamo qualche altro esempio:

Carbonio 12: $M_{6,12} = 11177.24$ MeV
 $\Delta M_{6,12} = 6M_p + 6m_n - M_{6,12} = 92$ MeV

Alluminio 27: $M_{13,27} = 25131.57.24$ MeV
 $\Delta M_{13,27} = 13M_p + 14m_n - M_{13,27} = 229.4$ MeV

Calcio 40: $M_{20,40} = 37222.58$ MeV
 $\Delta M_{20,40} = 20M_p + 20m_n - M_{20,40} = 342.0$ MeV

Iodio 127: $M_{53,127} = 118203.5$ MeV
 $\Delta M_{53,127} = 53M_p + 74m_n - M_{53,127} = 1072.3$ MeV

1.4 Energia di legame. Proprietà generali dei nuclei

Si definisce "Energia di legame media per nucleone" l'energia di legame del nucleo divisa per il numero di nucleoni che lo costituiscono.

$$B_{Z,A} = \Delta M_{Z,A} \quad \frac{B}{A} = \frac{B_{Z,A}}{A} = \frac{\Delta M_{Z,A}}{A}$$

Dai valori calcolati prima, ricaviamo:

nuclide	B (MeV)	B/A (MeV)
^2H	2.22	1.11
^{12}C	92.1	7.68
^{27}Al	224.9	8.33
^{40}Ca	342.0	8.55
^{127}I	1072.3	8.44

Possiamo notare che, ad eccezione del deuterio, l'energia di legame per nucleone è pressoché costante e dell'ordine di 8 MeV.

In tabella 1.1 sono riportate le energie di legame e le caratteristiche di alcuni nuclei.

Nuclide	Z	N=A-Z	B (MeV)	B/A (MeV)
n ¹	0	1	-	-
H ¹	1	0	-	-
H ²	1	1	2.225	1.113
He ⁴	2	2	28.29	7.07
Li ⁷	3	4	39.24	5.61
Be ⁹	4	5	58.15	6.46
B ¹¹	5	6	76.19	6.93
C ¹²	6	6	92.14	7.68
C ¹³	6	7	97.09	7.47
N ¹⁴	7	7	104.63	7.47
O ¹⁶	8	8	127.58	7.97
O ¹⁷	8	9	131.73	7.75
O ¹⁸	8	10	139.80	7.77
F ¹⁹	9	10	147.75	7.78
Ne ²⁰	10	10	160.62	8.03
Al ²⁷	13	14	224.92	8.33
Si ²⁸	14	14	236.51	8.45
P ³¹	15	16	262.88	8.48
S ³²	16	16	271.74	8.49
Cl ³⁵	17	18	298.13	8.52
Cl ³⁷	17	20	317.00	8.57
A ⁴⁰	18	22	313.71	8.59
Ca ⁴⁰	20	20	341.92	8.55
Fe ⁵⁶	26	30	493.11	8.79
Cu ⁶³	29	34	551.92	8.75
As ⁷⁵	33	42	652.23	8.70
Sr ⁸⁸	38	50	768.13	8.73
Mo ⁹⁸	42	56	845.73	8.63
Sn ¹¹⁶	50	66	988.14	8.52
Sn ¹²⁰	50	76	1020.2	8.50
Xe ¹³⁰	54	76	1096.6	8.44
Xe ¹³⁶	54	82	1141.5	8.39
Nd ¹⁵⁰	60	90	1237.1	8.25
Hf ¹⁷⁶	72	104	1419.1	8.06
W ¹⁸⁴	74	110	1473.5	8.01
Au ¹⁹⁷	79	118	1560.0	7.92
Pb ²⁰⁶	82	124	1623.7	7.88
Th ²³²	90	142	1763.0	7.62
U ²³⁸	92	146	1803.1	7.58

La figura 1.6 rappresenta invece l'andamento di B/A in funzione di A.

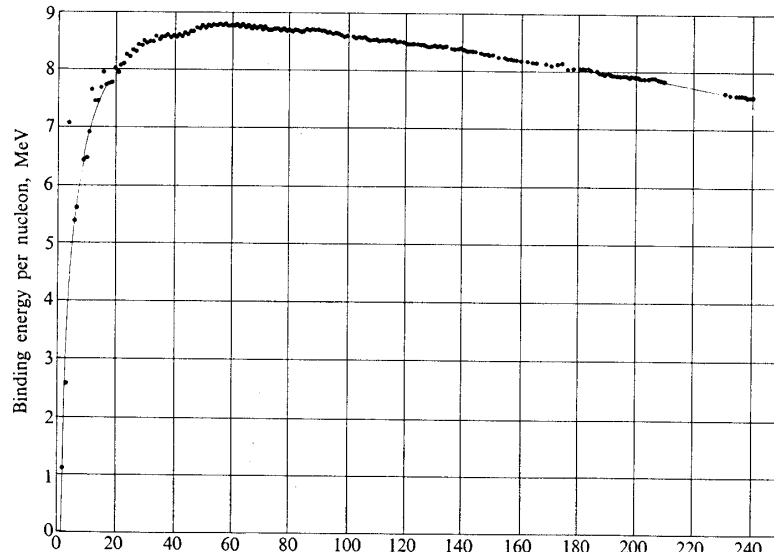


Figura 1.6 andamento di B/A in funzione di A

Esiste inoltre una correlazione tra il numero di protoni Z ed il numero di neutroni N che compongono un nucleo: se osserviamo infatti come sono disposti i nuclei nel piano Z - N (fig 1.7), notiamo che questi si addensano in una regione ristretta del piano e quindi secondo una relazione del tipo $Z=Z(N)$, oppure $Z=Z(A)$. Per i nuclei stabili si ottiene:

$$Z = \frac{A}{2.0 + 0.015 \cdot A^{2/3}}$$

In particolare, per $A < 40$ si ha che $N \approx Z$; per nuclei più pesanti N aumenta più velocemente di Z . Il motivo, che sarà meglio spiegato nel seguito, è il seguente: tutti i nucleoni, cioè sia i protoni sia i neutroni, subiscono indistintamente la forza nucleare attrattiva, mentre solo i protoni subiscono la forza elettrostatica repulsiva. Quando Z cresce, la stabilità del nucleo tende a diminuire a causa della repulsione coulombiana, le forze nucleari attrattive devono quindi aumentare ed è necessario un numero N di neutroni percentualmente maggiore.

1.5 Valori di alcune costanti utili.

Abbiamo introdotto nuove unità di misura per l'energia e la massa.

La lunghezza è spesso misurata in "fermi", (fm)

$$1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m} = 10^{-13} \text{ cm}$$

Già che siamo in argomento, apriamo una parentesi riguardante i valori numerici di alcune costanti espresse in MeV e fermi. E' utile ricordarli: questo semplificherà di molto i calcoli che faremo nel seguito del corso.

la costante di struttura fine (adimensionale) vale: $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}$

la costante di Planck, espressa in MeV·s, vale:

$$\hbar = 6.58 \cdot 10^{-22} \text{ MeV}\cdot\text{s}$$

la velocità della luce vale invece:

$$c = 3 \cdot 10^{10} \text{ cm/s} = 30 \text{ cm/ns} = 3 \cdot 10^{23} \text{ fm/s}$$

Ricaviamo allora due importanti valori numerici, che incontreremo spesso nel seguito:

$$\hbar c = 197.4 \text{ MeV}\cdot\text{fm}$$

$$e^2 = \frac{\hbar c}{137} = 1.44 \text{ MeV}\cdot\text{fm}$$

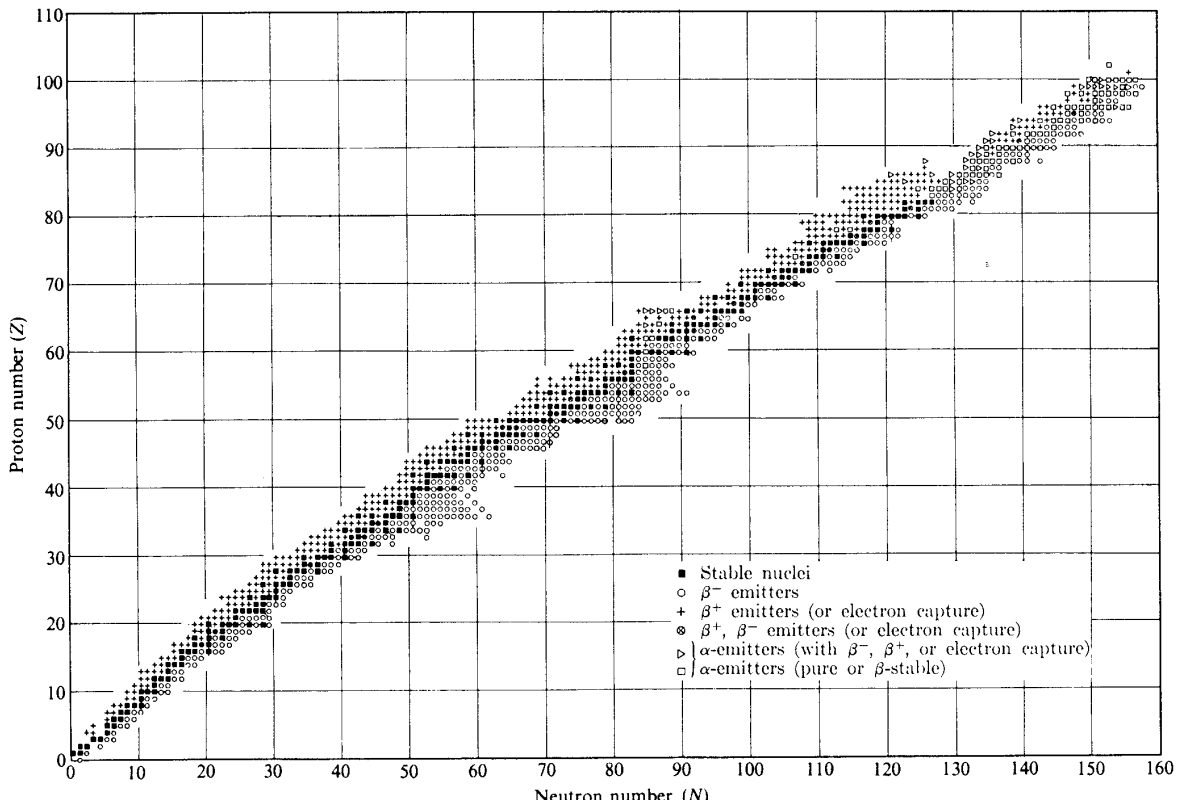


Figura 1.7 la rappresentazione dei nuclei stabili nel piano Z-N

Capitolo 2

Le leggi del decadimento radioattivo

2.1 Stabilità e instabilità nucleare

Se analizziamo attentamente la carta dei nuclidi, vediamo che in essa sono rappresentati, oltre ai nuclei stabili, anche vari nuclei instabili. Con il termine instabile si intende definire un nucleo che spontaneamente subisce una trasformazione per raggiungere uno stato stabile (o più stabile). Così nuclei che nel piano N-Z hanno un eccesso di protoni rispetto a quanto previsto dalla curva di stabilità, tenderanno a "trasformare" un protone in un neutrone, e viceversa tenderanno a fare i nuclei con un eccesso di neutroni. Le trasformazioni spontanee più comuni sono:

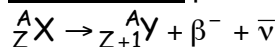
- decadimento α

il nucleo emette una particella α , cioè un nucleo di Elio4. L'Elio è infatti molto stabile, avendo un valore $B/A=7.07$ MeV, molto alto rispetto a tutti gli altri nuclei leggeri.

- decadimento β^- $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}$
- decadimento β^+ $p \rightarrow n + e^+ + \nu$
- cattura elettronica ϵ $p + e^- \rightarrow n + \nu$

Le reazioni indicate sopra riguardano trasformazioni di singoli protoni e neutroni all'interno del nucleo: l'elettrone negativo o positivo (positrone) emesso si chiamano particelle beta, ma a parte l'origine nucleare, sono del tutto identici all'elettrone o positrone atomico. Nella cattura elettronica, un elettrone atomico (generalmente della shell K, più interna) avente una funzione d'onda sensibilmente diversa da zero nel volume del nucleo, viene catturato da un protone nucleare: le particelle si trasformano in un neutrone nucleare. La particella che si accompagna all'elettrone è il neutrino o l'anti-neutrino. Vedremo nel seguito in dettaglio questi decadimenti: per ora vogliamo solo analizzarli dal punto di vista energetico, stabilire cioè mediante l'utilizzo delle tavole delle masse quali e quando sono possibili. Nei conti che seguono consideriamo nulla la massa del neutrino.

decadimento β^- : $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}$



Nel bilancio energetico vanno considerate le masse nucleari. Affinché la reazione avvenga deve ovviamente essere: $m(Z,A) \geq m(Z+1,A) + m_e$

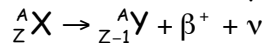
Tuttavia, nella maggior parte delle tabelle sono riportate le masse atomiche, non quelle nucleari. Risulta quindi utile ragionare in termini di masse atomiche.

Se aggiungiamo Zm_e ad entrambi i membri:

$$m(Z,A) + Zm_e \geq m(Z+1,A) + (Z+1)m_e \quad \text{ossia:} \quad M(Z,A) \geq M(Z+1,A)$$

Introducendo le masse atomiche abbiamo considerato legato anche lo (Z+1)-esimo elettrone (pochi eV).

decadimento β^+ : $p \rightarrow n + e^+ + \nu$



Deve ovviamente essere: $m(Z,A) \geq m(Z-1,A) + m_e$

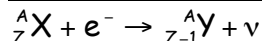
Se aggiungiamo Zm_e ad entrambi i membri:

$$m(Z,A) + Zm_e \geq m(Z-1,A) + Zm_e + m_e = m(Z-1,A) + (Z-1)m_e + 2m_e$$

$$\text{ossia: } M(Z,A) \geq M(Z-1,A) + 2m_e$$

Qui abbiamo invece considerato libero un elettrone che in effetti è legato (pochi eV).

cattura elettronica ϵ : $p + e^- \rightarrow n + \nu$



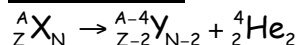
Deve risultare: $m(Z,A) + m_e \geq m(Z-1,A)$

Se aggiungiamo $(Z-1)m_e$ ad entrambi i membri:

$$m(Z,A) + (Z-1)m_e + m_e = m(Z,A) + Zm_e \geq m(Z-1,A) + (Z-1)m_e$$

$$\text{Ossia: } M(Z,A) \geq M(Z-1,A)$$

decadimento α



$$m(Z,A) \geq m(Z-2,A-4) + m({}^4\text{He})$$

Se aggiungiamo Zm_e ad entrambi i membri:

$$m(Z,A) + Zm_e \geq m(Z-2,A-4) + (Z-2)m_e + m({}^4\text{He}) + 2m_e$$

$$\text{ossia: } M(Z,A) \geq M(Z-2,A-4) + M({}^4\text{He})$$

trascurando la diversa energia di legame degli elettroni nei nuclei X,Y ed He

Riassumendo, e indicando al solito rispettivamente con M e m le masse atomiche e nucleari:

$M(Z,A) - M(Z+1,A) > 0$ $m(Z,A) - m(Z+1,A) > m_e$	decadimento β^- possibile
$M(Z,A) - M(Z-1,A) > 0$ $m(Z,A) + m_e \geq m(Z-1,A)$	cattura elettronica ϵ possibile
$M(Z,A) - M(Z-1,A) > 2m_e$ $m(Z,A) - m(Z-1,A) > m_e$	decadimento β^+ e cattura elettronica possibili
$M(Z,A) - M(Z-2,A-4) > M({}^4\text{He})$ $m(Z,A) - m(Z-2,A-4) > m({}^4\text{He})$	decadimento α possibile

Vediamo qualche esempio.

Il neutrone è instabile per decadimento beta?

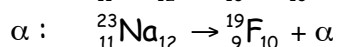
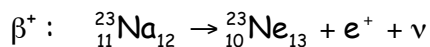
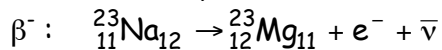
Dalle tavole ricaviamo che: $m_n > m_p + m_e$

e precisamente: $m_n = 939.5054 \text{ MeV}$, $m_p = 938.213 \text{ MeV}$, $m_e = 0.511 \text{ MeV}$

pertanto il decadimento beta del neutrone isolato è possibile. In effetti si osserva sperimentalmente: la massima energia dell'elettrone emesso (per una trattazione più estesa si rimanda al capitolo che descrive in maggior dettaglio il decadimento beta) è appunto pari a: $T_{e\max} = m_n - m_p - m_e = 0.781 \text{ MeV}$



Può avvenire qualche decadimento?



Le masse dei nuclidi eventualmente coinvolti sono:

$$M({}^{23}_{11}\text{Na}) = 21413.53 \text{ MeV}$$

$$M({}^{23}_{12}\text{Mg}) = 21417.59 \text{ MeV}$$

$$M({}^{23}_{10}\text{Ne}) = 21417.91 \text{ MeV}$$

$$M({}^{19}_{9}\text{F}) = 17695.82 \text{ MeV}$$

$$M({}^4_2\text{He}) = 3728.17 \text{ MeV}$$

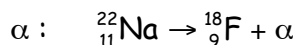
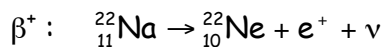
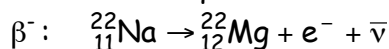
$$M({}^{19}_{9}\text{F}) + M({}^4_2\text{He}) = 21423.99 \text{ MeV}$$

Facendo i conti, si vede che nessuno dei decadimenti è energeticamente possibile. Pertanto, come c'era da aspettarsi, il nucleo ${}^{23}_{11}\text{Na}$ è stabile

Vediamo ora con un altro isotopo del sodio.



Può avvenire qualche decadimento?



Le masse dei nuclidi eventualmente coinvolti sono:

$$M({}^{22}_{11}\text{Na}) = 20486.41 \text{ MeV}$$

$$M({}^{22}_{12}\text{Mg}) = 20492.49 \text{ MeV}$$

$$M({}^{22}_{10}\text{Ne}) = 20483.57 \text{ MeV}$$

$$M({}^{18}_{9}\text{F}) = 16766.73 \text{ MeV}$$

$$M({}^4_2\text{He}) = 3728.17 \text{ MeV}$$

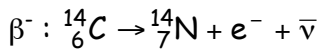
$$M({}^{18}_{9}\text{F}) + M({}^4_2\text{He}) = 20494.9 \text{ MeV}$$

Facendo i conti, si vede che sono energeticamente possibili il decadimento β^+ e di conseguenza la cattura elettronica ϵ .

Terzo esempio:



Dai conti sulle masse si ricava che il nucleo Carbonio 14 è instabile per decadimento



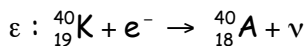
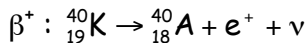
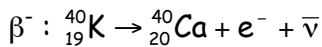
La differenza delle masse vale:

$$M({}^{14}_6\text{C}) - M({}^{14}_7\text{N}) = 13043.132 - 13042.976 = 0.156 \text{ MeV}$$

Pertanto la massima energia cinetica dell'elettrone emesso potrà valere 156 keV (vedi nel seguito la teoria del decadimento beta).

Ultimo esempio.

${}^{40}_{19}\text{K}$



I valori della masse atomiche sono i seguenti:

$$M({}^{40}_{19}\text{K}) = 37223.95$$

$$M({}^{40}_{20}\text{Ca}) = 37222.58$$

$$M({}^{40}_{18}\text{A}) = 37222.41$$

Dai valori riportati si verifica che sono possibili sia il decadimento β^- che la cattura elettronica, che si osservano sperimentalmente. Per la verità è energeticamente possibile anche il decadimento β^+ , che però non si osserva (vedi il capitolo 5 sul decadimento beta per maggiori dettagli).

2.2 Le leggi del decadimento radioattivo

Già nel 1900 era nota la radioattività naturale e Rutherford e Solvay, studiando quantitativamente la variazione temporale di attività del Radio224. Crookes ottenne lo stesso andamento studiando la variazione di attività del Thorio234 (UX) riportato in figura 2.1

Le curve riportate nelle figure rappresentano degli esponenziali del tipo:

$$A^X(t) = A_0^X e^{-\lambda t} \quad \text{per il ThX o per l' UX}$$

$$A(t) = A_0 (1 - e^{-\lambda t}) \quad \text{per il Th o per l'U}$$

Queste osservazioni portarono a formulare una teoria sul decadimento radioattivo: la radioattività rappresenta un cambiamento dell'atomo individuale. Si tratta di un processo puramente statistico. nel senso che è impossibile prevedere in quale istante un certo nucleo si trasformerà, ma è possibile prevedere quanti nuclei saranno decaduti in media dopo un certo intervallo di tempo.

Sia $N_p(t)$ il numero di atomi "parents" radioattivi presente nel campione al tempo t . Se i decadimenti sono indipendenti (nel senso che il decadimento di un atomo non influenza i decadimenti degli altri atomi della sorgente), il numero di atomi che decadranno in un intervallo di tempo dt è dato da:

$$dN_p = -\lambda N_p(t) dt$$

dove λ , caratteristica di ogni nuclide radioattivo, è detta costante di decadimento, ed il segno meno sta a indicare che $N_p(t)$ decresce con il tempo.

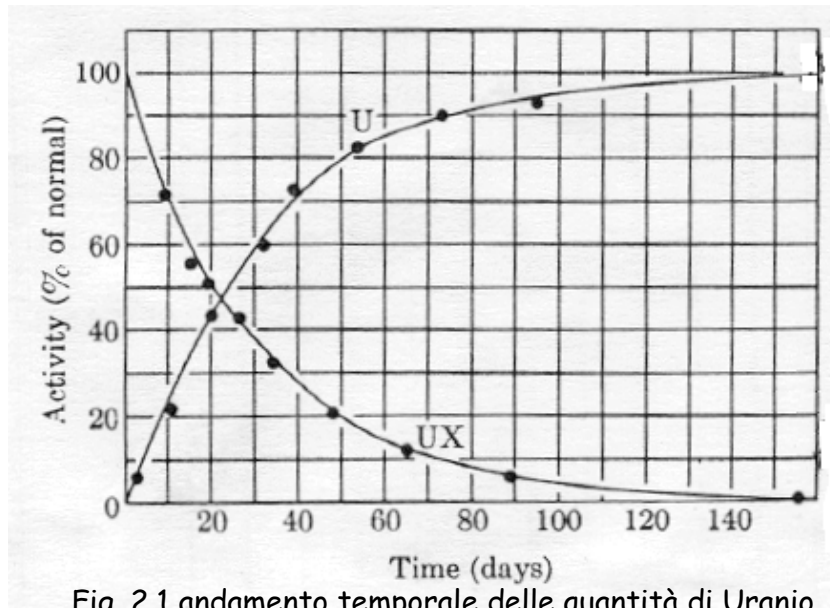


Fig. 2.1 andamento temporale delle quantità di Uranio (U) e Thorio (UX) in un campione radioattivo

Separando le variabili: $\frac{dN_p}{N_p} = -\lambda dt$

che integrata dà appunto: $N_p(t) = N_0 e^{-\lambda t}$

$N_p(t)$ rappresenta il numero di nuclei radioattivi "parents" presenti al tempo t (non ancora decaduti), essendo N_0 il numero di atomi presenti al tempo $t=0$.

Si definisce attività di un campione il numero di decadimenti subiti nell'unità di tempo. Essa risulta quindi: $a(t) = \left| \frac{dN(t)}{dt} \right|$, dove il valore assoluto è necessario perché

l'attività è definita positiva.

Risulta pertanto: $a(t) = \lambda N_0 e^{-\lambda t} = \lambda \cdot N_p(t)$, cioè l'attività è proporzionale al numero di nuclei radioattivi presenti nel campione ed alla probabilità di decadimento per unità di tempo λ .

Allo stesso modo per quanto riguarda la formazione del nuovo elemento "daughter", la variazione nel tempo dN_d/dt è la stessa ma di segno opposto:

$$dN_d = \lambda N_p(t) dt \quad (\text{infatti deve ovviamente essere: } dN_p + dN_d = 0)$$

Allora:

$$dN_d = \lambda N_p(t) dt = \lambda N_0 e^{-\lambda t} dt$$

che risolta con la condizione che per $t=0$ era $N_d=0$, dà:

$$N_d(t) = N_0 (1 - e^{-\lambda t})$$

Ovviamente ad ogni istante risulta: $N_p(t) + N_b(t) = N_0$

λ è detta costante di decadimento ed ha le dimensioni dell'inverso di un tempo: rappresenta la probabilità di decadimento per unità di tempo di ogni singolo atomo del campione $\tau = 1/\lambda$ è la vita media, il cui significato fisico è il seguente:

per $t=\tau$ risulta $N(\tau) = N_0 e^{-1}$, e quindi: $\frac{N(\tau)}{N_0} = \frac{1}{e}$; in un intervallo di tempo τ , il

numero di atomi radioattivi, e quindi l'attività del campione si riduce di un fattore $1/e$, circa 3.

τ è detta vita media: infatti, per trovare la media dei tempi di vita di tutti gli atomi, si deve calcolare:

$$\langle t \rangle = \frac{1}{N_0} \int_0^{\infty} t dN = \frac{1}{N_0} \int_0^{\infty} \lambda t N_0 e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda} = \tau$$

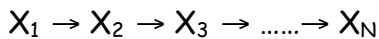
Si definisce tempo di dimezzamento $T_{1/2}$ il tempo nel quale il numero di atomi radioattivi, e quindi l'attività si dimezza.

$$N(T_{1/2}) = N_0 e^{-\lambda T_{1/2}} = N_0 / 2$$

$$e^{-\lambda T_{1/2}} = 2^{-1}, \text{ e quindi } T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0.693}{\lambda} = 0.693\tau$$

2.3 Decadimenti successivi. Famiglie radioattive

Supponiamo che anche i nuclei formati siano radioattivi, e quindi essi stessi decadano. Si potrà avere un decadimento a cascata del tipo:



Vediamo un caso più semplice: $X_1 \rightarrow X_2$, con X_2 stabile.

Bisogna risolvere il sistema di equazioni differenziali seguente:

$$\frac{dN_1(t)}{dt} = -\lambda_1 N_1(t)$$

$$\frac{dN_2(t)}{dt} = \lambda_1 N_1(t)$$

Dalla prima si ottiene subito:

$$N_1(t) = N_{10} e^{-\lambda_1 t}$$

che inserito nella seconda, dà:

$$dN_2(t) = \lambda_1 N_1(t) dt = \lambda_1 N_{10} e^{-\lambda_1 t} dt$$

integrando ambo i membri:

$$\int_0^t dN_2(t) = \int_0^t \lambda_1 N_{10} e^{-\lambda_1 t} dt$$

$$N_2(t) = N_{20} + N_{10} (1 - e^{-\lambda_1 t})$$

Vediamo ora il caso: $X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow X_3$, con X_3 stabile.

Le equazioni differenziali da risolvere sono ora tre:

$$\frac{dN_1(t)}{dt} = -\lambda_1 N_1(t)$$

$$\frac{dN_2(t)}{dt} = \lambda_1 N_1(t) - \lambda_2 N_2(t)$$

$$\frac{dN_3(t)}{dt} = \lambda_2 N_2(t)$$

$$N_1(t) = N_{10} e^{-\lambda_1 t}$$

$$\frac{dN_2(t)}{dt} = \lambda_1 N_{10} e^{-\lambda_1 t} - \lambda_2 N_2(t)$$

$$\frac{dN_2(t)}{dt} + \lambda_2 N_2(t) = \lambda_1 N_{10} e^{-\lambda_1 t}$$

moltiplicando per $e^{\lambda_2 t}$:

$$e^{\lambda_2 t} \frac{dN_2(t)}{dt} + \lambda_2 e^{\lambda_2 t} N_2(t) = \lambda_1 N_{10} e^{(-\lambda_1 + \lambda_2)t}$$

che si può riscrivere come:

$$\frac{d}{dt} (N_2(t) e^{\lambda_2 t}) = \lambda_1 N_{10} e^{(-\lambda_1 + \lambda_2)t}$$

Integrando:

$$N_2(t) e^{\lambda_2 t} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{10} e^{(-\lambda_1 + \lambda_2)t} + C$$

$$N_2(t) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{10} e^{-\lambda_1 t} + C e^{-\lambda_2 t}$$

Il valore della costante C si ricava sapendo che per $t=0$, $N_2 = N_{20}$:

$$C = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{10} + N_{20}$$

$$N_2(t) = N_{20} e^{-\lambda_2 t} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{10} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t})$$

ricaviamo ora $N_3(t)$:

$$dN_3(t) = \lambda_2 N_2(t) dt = \lambda_2 N_{20} e^{-\lambda_2 t} dt + \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{10} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}) dt$$

$$N_3(t) = N_{30} + \left[-N_{20} e^{-\lambda_2 t} \right]_0^t + \left[-\frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{10} e^{-\lambda_1 t} \right]_0^t + \left[\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{10} e^{-\lambda_2 t} \right]_0^t$$

Ossia:

$$N_3(t) = N_{30} + N_{20} (1 - e^{-\lambda_2 t}) + N_{10} \left(1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_2 t} - \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_1 t} \right)$$

Nel caso particolare che per $t=0$ sia $N_{20} = N_{30} = 0$:

$$N_1(t) = N_{10} e^{-\lambda_1 t}$$

$$N_2(t) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{10} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t})$$

$$N_3(t) = N_{10} \left(1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_2 t} - \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_1 t} \right)$$

Naturalmente risulta $N_3(0) = 0$ per qualsiasi valore di N_{10} .

In generale, per una catena di decadimenti, si scrivono le seguenti equazioni differenziali:

$$\frac{dN_1(t)}{dt} = -\lambda_1 N_1(t)$$

$$\frac{dN_2(t)}{dt} = \lambda_1 N_1(t) - \lambda_2 N_2(t)$$

$$\frac{dN_3(t)}{dt} = \lambda_2 N_2(t) - \lambda_3 N_3(t)$$

.....

$$\frac{dN_N(t)}{dt} = \lambda_{N-1} N_{N-1}(t)$$

Se per $t=0$ si ha: $N_{20} = N_{30} = \dots = N_{N0} = 0$, si può scrivere:

$$N_i(t) = C_1^i e^{-\lambda_1 t} + C_2^i e^{-\lambda_2 t} + \dots + C_i^i e^{-\lambda_i t}$$

dove:

$$C_1^i = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{i-1}}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1) \dots (\lambda_i - \lambda_1)}$$

$$C_2^i = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{i-1}}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_2) \dots (\lambda_i - \lambda_2)}$$

.....

$$C_i^i = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{i-1}}{(\lambda_1 - \lambda_i)(\lambda_2 - \lambda_i) \dots (\lambda_{i-1} - \lambda_i)}$$

ovviamente essendo $\lambda_N = 0$ (nucleo stabile).

Consideriamo di nuovo il caso: $X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow X_3$, con X_3 stabile.

e supponiamo che sia: $\lambda_1 \ll \lambda_2$ (ossia $\tau_1 \gg \tau_2$). Allora:

$$N_2(t) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{10} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}) \approx \frac{\lambda_1}{\lambda_2} N_{10} e^{-\lambda_1 t} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} N_1(t)$$

Ossia:

$$\lambda_1 N_1(t) = \lambda_2 N_2(t) \quad \text{e quindi:} \quad a_1(t) = a_2(t)$$

Se in generale nella catena radioattiva risulta:

$$\lambda_i \ll \lambda_{i+1}, \lambda_{i+2}, \dots, \lambda_{N-1}$$

per tutti i nuclei che seguono l'i-esimo decadimento vale la relazione:

$$a_i(t) = a_{i+1}(t) = \dots = a_{N-1}(t)$$

e si dice che i nuclidi si trovano in condizioni di "equilibrio secolare".

Naturalmente, se la condizione è vera a partire dal capostipite, cioè se:

$$\lambda_1 \ll \lambda_i, \text{ per ogni "i"}$$

tutta la catena radioattiva si trova in equilibrio secolare. Per gli elementi naturali (vedi Uranio, Torio, Radio, ..) è vera quest'ultima condizione perché gli eventuali capostipiti a vita media breve, dal momento della loro formazione sarebbero ormai decaduti.

2.4 Esercizi sui decadimenti radioattivi

L'unità di misura dell'attività è il Bequerel (Bq), pari a un decadimento al secondo. molto usata tutt'oggi è la vecchia unità, il Curie (Ci)

1 Ci = $3.7 \cdot 10^{10}$ disintegrazioni al secondo. L'origine storica di questo valore è dovuta al fatto che il Curie è l'attività di un grammo di ^{226}Ra

$$1 \text{ Bq} = 2,7 \cdot 10^{-11} \text{ Ci} \quad 1 \text{ Ci} = 3.7 \cdot 10^{10} \text{ Bq}$$

Abbiamo visto che l'attività è data da:

$$a = \left| \frac{dN}{dt} \right| = \lambda N$$

Il numero di atomi N in un campione di massa W e peso atomico A , si ricava dal relazione: $W : N = A : N_{Av}$ dove N_{Av} è il numero di Avogadro.

Pertanto:

$$N = \frac{W}{A} N_{Av} \quad e: \quad a = \lambda N = \lambda \frac{W}{A} N_{Av} = \frac{W N_{Av}}{\tau A} = \frac{0.693 W N_{Av}}{T_{1/2} A}$$

Vediamo ora alcuni esempi.

Calcolare la massa di ^{214}Pb corrispondente all'attività di 1 Ci.

Il ^{214}Pb decade β^- con un tempo di dimezzamento $T_{1/2} = 26.8 \text{ min}$ ($\tau = 38.7 \text{ min} = 2.32 \cdot 10^3 \text{ sec}$; $\lambda = 4.32 \cdot 10^{-4} \text{ sec}^{-1}$)

$$W = \frac{aA}{\lambda N_{Av}} = \frac{3.7 \cdot 10^{10} \cdot 214}{6.0210^{23} \cdot 4.310^{-4}} = 3.0510^{-8} \text{ g} = 30 \text{ ng}$$

Vediamo ora nel caso di 1 Ci di ^{238}U :

l' U-238 decade α con un tempo di dimezzamento $T_{1/2} = 4.51 \cdot 10^5 \text{ y}$ (pertanto risulta $\lambda = 4.9 \cdot 10^{-14} \text{ sec}^{-1}$)

$$W = \frac{aA}{\lambda N_{Av}} = \frac{3.7 \cdot 10^{10} \cdot 238}{6.0210^{23} \cdot 4.910^{-14}} = 3 \cdot 10^2 \text{ g}$$

Vediamo a che massa corrisponde 1 Ci di ^{24}Na

$T_{1/2} = 14.8 \text{ h}$, $\lambda = 1.3 \cdot 10^{-5} \text{ sec}^{-1}$

$$W = 1.1 \cdot 10^{-7} \text{ g} = 0.1 \text{ } \mu\text{g}$$

e a che massa corrisponde 1 Ci di ^{32}P :

$T_{1/2} = 14.5 \text{ d}$, $\lambda = 5.5 \cdot 10^{-7} \text{ sec}^{-1}$

$$W = 3.6 \cdot 10^{-6} \text{ g}$$

Naturalmente, per 1 Ci di ^{226}Ra otteniamo:

Il ^{226}Ra decade α con un tempo di dimezzamento $T_{1/2} = 1620 \text{ y}$ (pertanto risulta

$$\lambda = 1.36 \cdot 10^{-11} \text{ sec}^{-1}) \quad W = \frac{aA}{\lambda N_{Av}} = \frac{3.7 \cdot 10^{10} \cdot 226}{6.0210^{23} \cdot 1.3610^{-11}} = 1.02 \text{ g}$$

Determinare il peso in grammi di una sorgente di ^{60}Co da 5000 Ci, supponendo che sia costituita esclusivamente di atomi radioattivi.

Il ^{60}Co decade β^- con $T_{1/2} = 5.26 \text{ y}$ (pertanto risulta: $\lambda = 4.2 \cdot 10^{-9} \text{ sec}^{-1}$)

$$W = \frac{aA}{\lambda N_{Av}} = \frac{510^3 \cdot 3.710^{10} \cdot 60}{6.0210^{23} \cdot 4.2 \cdot 10^{-9}} = 4.4\text{g}$$

Trovare la variazione oraria di massa di una sorgente di 1 Ci di ^{210}Po

Il ^{210}Po decade α in ^{206}Pb con $T_{1/2} = 138.4 \text{ d}$ (pertanto risulta $\lambda = 5.79 \cdot 10^{-8} \text{ sec}^{-1}$). Il ^{206}Pb è stabile.

Dobbiamo calcolare quanti atomi di ^{210}Po decadono in un'ora.

Poichè l'intervallo di un'ora è molto breve rispetto a $T_{1/2}$, possiamo con ottima approssimazione considerare costante l'attività della sorgente durante l'intervallo di un'ora e scrivere:

$$a = \frac{dN}{dt} = \frac{\Delta N}{\Delta t} \quad \Delta N = a\Delta t = 3.7 \cdot 10^{10} \cdot 3600 = 1.33 \cdot 10^{14}$$

Ad ogni decadimento un nucleo di ^{210}Po si trasforma in un nucleo di ^{206}Pb più una particella α . La variazione di massa è pari a:

$$m = M_{fin} - M_{iniz} = M(\alpha) + M(^{206}\text{Pb}) - M(^{210}\text{Po}) = 4.00 + 206.04 - 210.05 = -0.01 \text{ amu} = -1.67 \cdot 10^{-26} \text{ g}$$

cioè circa 1/100 della massa di un protone ! (1 amu = $1.67 \cdot 10^{-24} \text{ g}$)

la variazione totale di massa sarà allora:

$$\Delta M = m\Delta N = 1.67 \cdot 10^{-26} \cdot 1.33 \cdot 10^{14} = 2.22 \cdot 10^{-12} \text{ g} = 2.2 \text{ pg}$$

Notiamo che una sorgente da 1Ci di ^{210}Po ha una massa pari a:

$$W = \frac{aA}{\lambda N_{Av}} = \frac{3.710^{10} \cdot 210}{6.0210^{23} \cdot 5.7910^{-8}} = 2.210^{-4} \text{ g}$$

la variazione di massa oraria è quindi di una parte su 100 milioni.

Misura di vita media (o di costante di decadimento).

Per vite medie brevi è apprezzabile la variazione di attività della sorgente nel tempo. Si effettuano quindi più (almeno due) misure di attività della sorgente, distanziate tra loro di un certo intervallo di tempo. Indicando con Δt la durata delle singole misure e con C_1 e C_2 i conteggi totali registrati in esse:

$$C_1 = \int_{t_1}^{t_1 + \Delta t} a(t) dt = \int_{t_1}^{t_1 + \Delta t} \lambda \cdot N(t) dt = N_0 e^{-\lambda t_1} (1 - e^{-\lambda \Delta t})$$

$$C_2 = \int_{t_2}^{t_2 + \Delta t} a(t) dt = \int_{t_2}^{t_2 + \Delta t} \lambda \cdot N(t) dt = N_0 e^{-\lambda t_2} (1 - e^{-\lambda \Delta t})$$

dove t_1 e t_2 (ignoti) rappresentano il tempo trascorso tra un istante di riferimento e l'inizio delle due misure.

Facendo il rapporto:

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{e^{-\lambda t_1}}{e^{-\lambda t_2}} = e^{\lambda(t_2 - t_1)}$$

Ossia:

$$\lambda = \frac{1}{t_2 - t_1} \ln \frac{C_1}{C_2}$$

$t_2 - t_1$ rappresenta l'intervallo di tempo intercorso tra le due misure. S'è notato che, ai fini della determinazione della vita media, è sufficiente conoscere l'intervallo $t_2 - t_1$ e non i tempi assoluti.

Esempio. Una sorgente radioattiva viene misurata due volte per un tempo di misura $\Delta t = 30$ minuti a distanza di $t_2 - t_1 = 24$ ore. Si sono ricavati i seguenti valori:

$C_1 = 9800$ e $C_2 = 7380$. Calcolare il tempo di dimezzamento della sorgente.

$$\lambda = \frac{1}{t_2 - t_1} \ln \frac{C_1}{C_2} = \frac{1}{86400} \ln \frac{9800}{7380} = 3.2810 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}$$

Pertanto: $\tau = 3.05 \cdot 10^5 \text{ s}$, e $T_{1/2} = 2.11 \cdot 10^5 = 2.44 \text{ d}$.

Per vite medie lunghe, spesso non è apprezzabile la variazione di attività nel tempo. Allora la misura della vita media, o della costante di decadimento, viene effettuata usando la relazione:

$$a = \frac{dN}{dt} = \lambda N \quad \lambda = \frac{a}{N}$$

λ si determina allora da un'unica misura di attività e dalla conoscenza di N

Esempio: per trovare la vita media del ^{147}Sm si è usata una sorgente da 1.000 ± 0.001 grammi e sono stati misurati $a = 680 \pm 4$ decadimenti al secondo. Determinare la vita media del Samario con il suo errore

$$\tau = \frac{N}{a} = \frac{N_{Av} W}{a A} = \frac{6.02 \cdot 10^{23} \cdot 1}{680 \cdot 147} = 6.02 \cdot 10^{18} \text{ s} = 1.91 \cdot 10^{11} \text{ y}$$

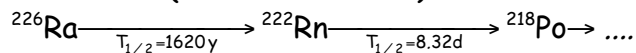
L'indeterminazione relativa su τ è: $\frac{\Delta \tau}{\tau} = \sqrt{\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\Delta W}{W}\right)^2} = 6 \cdot 10^{-3}$

Quanto tempo è durata la misura? Supponendo nullo l'errore sul tempo di misura, l'errore relativo sull'intensità di conteggi è dato proprio da $\Delta C/C = \Delta a/a = 4/680 = 5.6 \cdot 10^{-3}$. E poiché l'errore assoluto di un conteggio è dato dal valore della radice quadrata del conteggio stesso (statistica di Poisson), avremo:

$$\frac{\Delta C}{C} = \frac{\sqrt{C}}{C} = \frac{1}{\sqrt{C}} = 5.6 \cdot 10^{-3}, \text{ ossia: } C = 2.89 \cdot 10^4. \text{ E poiché } C = a \Delta t, \text{ il tempo di misura}$$

risulta essere stato: $\Delta t = C/a = 42.5 \text{ s}$.

Avendo a disposizione 1 Ci di ^{226}Ra ($T_{1/2} = 1620 \text{ y}$), determinare quanto ^{222}Rn ($T_{1/2} = 8.32 \text{ d}$) volatile si è formato in 5 anni. Valutare la quantità di Rn sia in grammi che in cm^3 (in condizioni STP).



$$T_{1/2} = 1620 \text{ y} \quad \lambda_1 = 1.36 \cdot 10^{-11} \text{ s}^{-1}$$

$$T_{1/2} = 8.32 \text{ d} \quad \lambda_2 = 9.64 \cdot 10^{-7} \text{ s}^{-1}$$

$$N_2(t) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{10} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t})$$

Ed essendo $\lambda_1 \gg \lambda_2$:

$$N_2(t) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} N_1(t) = \frac{a_1(t)}{\lambda_2}$$

$$W_2 : N_2(t) = A_2 : N_{Av}$$

$$W_2 = \frac{A_2 N_2(t)}{N_{Av}} = \frac{A_2 a_1(t)}{\lambda_2 N_{Av}} = \frac{222 \cdot 3.710^{10}}{610^{23} \cdot 9.64 \cdot 10^{-7}} = 1.42 \cdot 10^{-5} \text{ g}$$

In condizioni STP il volume occupato è dato da:

$$V_0 : A = V : W$$

$$V = V_0 \frac{W}{A} = 22.4 \frac{1.42 \cdot 10^{-5}}{222} = 1.43 \cdot 10^{-6} \text{ l} = 1.43 \text{ mm}^3$$

Una sorgente pesa 20 g ed ha una attività di $4.72 \cdot 10^6$ dis/minuto. Si ha il dubbio che tale sorgente sia:

a) ^{230}Th $T_{1/2} = 8 \cdot 10^4 \text{ y}$ $\lambda = 2.75 \cdot 10^{-13} \text{ s}^{-1}$

b) ^{232}Th $T_{1/2} = 1.39 \cdot 10^{10} \text{ y}$ $\lambda = 1.58 \cdot 10^{-18} \text{ s}^{-1}$

c) ^{228}Th $T_{1/2} = 1.91 \text{ y}$ $\lambda = 1.15 \cdot 10^{-8} \text{ s}^{-1}$

ricavare il tipo di sorgente dai dati a disposizione.

Dalla solita relazione:

$$a = \frac{dN}{dt} = \lambda N \quad \lambda = \frac{a}{N}$$

è possibile ricavare la costante di decadimento e confrontarla con i valori tabulati:

$$a = 4.72 \cdot 10^6 \text{ dis/min} = 7.87 \cdot 10^4 \text{ dis/s}$$

Se consideriamo peso atomico della sorgente sempre $A=230$ nei tre casi, commettiamo in ogni caso un errore inferiore all'1%

$$N = \frac{N_{Av} W}{A} = \frac{610^{23} \cdot 20}{230} = 5.210^{22} \text{ atomi}$$

$$\lambda = \frac{a}{N} = \frac{7.8710^4}{5.210^{22}} = 1.5110^{-18} \text{ s}^{-1}$$

La sorgente è quindi ^{232}Th

Se un certo materiale contiene 1 g di ^{40}K ($T_{1/2} = 1.3 \cdot 10^9 \text{ y}$) e si sa che è vecchio di 2.6 milioni di anni, quale è il massimo numero di millilitri di Argon ($^{40}\text{K} \rightarrow \beta^- + ^{40}\text{Ar}$) che può essersi accumulato nel materiale (in condizioni STP) ?

Il numero di decadimenti avvenuti nel campione in un tempo Δt (2.6 milioni di anni) è dato da:

$$n(\Delta t) = \int_{\Delta t} a(t) dt = \int_{\Delta t} N(t) \lambda dt = N_0 \lambda \int_{\Delta t} e^{-\lambda t} dt = N_0 (1 - e^{-\lambda \Delta t}) = N_{Av} \frac{W}{A} (1 - e^{-\lambda \Delta t})$$

ma poichè $\Delta t \ll T_{1/2}$ e quindi $\lambda \Delta t \ll 1$ si può approssimare:

$$N_{Av} \frac{w}{A} [1 - \exp(-\lambda \Delta t)] = N_{Av} \frac{w}{A} \lambda \Delta t \approx N_{Av} \frac{w \ln 2 \cdot \Delta t}{A T_{1/2}}$$

pertanto:

$$n(\Delta t) = N_{Av} \frac{w \ln 2 \cdot \Delta t}{A T_{1/2}} = 2.08 \cdot 10^{19} \text{ atomi}$$

che in condizioni STP occupano un volume dato dalla relazione:

$$V = 22.414 \frac{n}{N_{Av}} = 7.76 \cdot 10^{-4} \ell = 0.78 \text{ cm}^3$$

Una sorgente radioattiva è una mistura ^{64}Cu ($T_{1/2} = 12.8 \text{ h}$) e rame stabile (circa 69% di ^{63}Cu e 31% di ^{65}Cu). La massa della sorgente e la sua attività sono rispettivamente 100 mg e 28 mCi. Ricavare il rapporto in peso tra gli atomi radioattivi e gli atomi stabili presenti nella sorgente.

$$a = 28 \cdot 10^{-3} \cdot 3.7 \cdot 10^{10} = 1.04 \cdot 10^9 \text{ dis/s}$$

$$\lambda = \frac{0.693}{12.8 \cdot 3600} = 1.5110^{-5} \text{ s}^{-1}$$

$$N = \frac{a}{\lambda} = 6.9 \cdot 10^{13} \text{ atomi di } ^{64}\text{Cu}$$

$$w = \frac{N}{N_{Av}} A = \frac{6.9 \cdot 10^{13}}{6 \cdot 10^{23}} 64 = 7.3410^{-9} \text{ g di } ^{64}\text{Cu}$$

$$\frac{w_{\text{rad}}}{w_{\text{stab}}} = \frac{7.3410^{-9}}{0.1} = 7.3410^{-8}$$

Capitolo 3

Modelli nucleari collettivi: il modello a goccia di liquido

3.1 Introduzione

Già nel 1911 Rutherford, per spiegare i risultati del suo esperimento di diffusione di particelle α da nuclei pesanti ricavò che il nucleo è assimilabile ad una sfera di raggio $\approx 10^{-13}$ cm. Successivamente il raggio dei nuclei fu stimato da una analisi della relazione empirica tra le vite medie τ degli α -emettitori e l'energia cinetica T_α delle particelle α emesse, che fu trovata essere del tipo:

$$1/\tau + a \cdot 1/T_\alpha = \text{costante}$$

dove il parametro a è tale che, come vedremo quando studieremo in maggior dettaglio il decadimento alfa, per un piccolo intervallo di variabilità di T_α (tra 4 e 9 MeV) la vita media varia invece enormemente (tra 10^{-7} s e 10^{10} y). Fu trovata la relazione: $r = r_0 \cdot A^{1/3}$, con $r_0 \approx 1.3$ fm.

La densità numerica dei nucleoni risulta allora essere:

$$n = \frac{A}{V} = \frac{3A}{4\pi r_0^3 A} = \frac{3}{4\pi r_0^3} \approx 10^{38} \text{ cm}^{-3}$$

e, non dipendendo da A , è la stessa per tutti i nuclei.

Anche la densità massica della materia nucleare risulta indipendente da A e costante per tutti i nuclei:

$$\rho = \frac{M}{V} \approx \frac{Am_p}{V} = \frac{3m_p}{4\pi r_0^3} \approx 10^{14} \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$$

Il fatto che la densità sia costante, ci dice che la materia nucleare è incompressibile, e questa proprietà indica una somiglianza tra la materia nucleare ed un liquido. Questa analogia segue anche dalla dipendenza quasi lineare esistente tra l'energia di legame di un nucleo ed il suo numero di massa, che può essere paragonata alla dipendenza lineare dell'energia di vaporizzazione di un liquido dalla sua massa. Inoltre la proprietà di saturazione delle forze nucleari (che segue dal fatto che $B/A \approx \text{cost.}$) rende l'analogia più completa poiché la stessa proprietà è anche posseduta dalle forze chimiche di legame delle molecole in un liquido. Su questa base Bohr, Wheeler e Frenkel svilupparono il modello a goccia del nucleo, che portò alla formula semiempirica per l'energia di legame ottenuta da Weizsacker. Questo modello fu in grado di spiegare un grande numero di fenomeni, compresi alcuni aspetti dei decadimenti beta, il fenomeno della fissione nucleare e le leggi del decadimento alfa.

3.2 Modello a goccia di liquido (Weizsacker)

Questo modello molto semplice è in grado di spiegare, mediante pochi parametri empirici, importanti proprietà dei nuclei. Abbiamo già visto che se riportiamo in grafico il numero dei neutroni $N=A-Z$ contenuti nel nucleo in funzione di Z per tutti i nuclei stabili, si ottiene il diagramma mostrato in figura 3.1

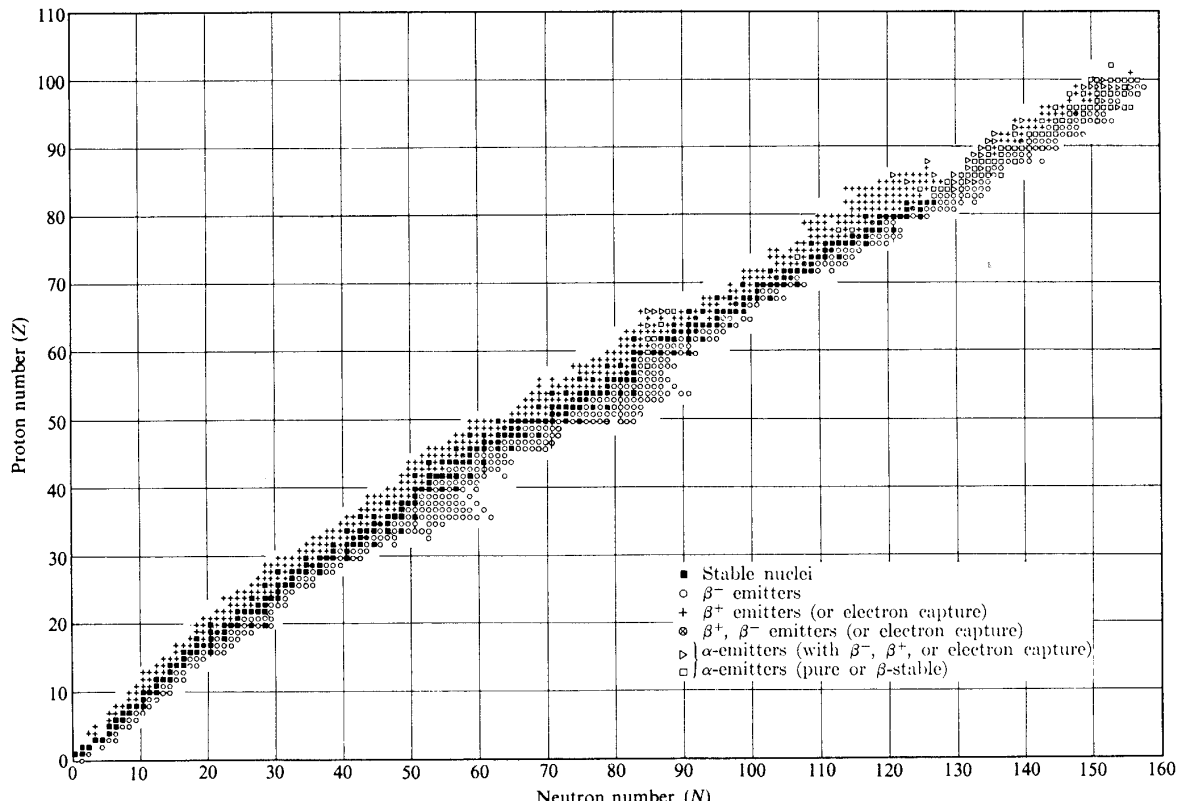


Figura 3.1 la rappresentazione dei nuclei stabili nel piano Z-N

Esiste senza dubbio una relazione tra N e Z in quanto i punti rappresentativi giacciono dentro una piccola regione, quasi una linea nel piano N-Z.

Abbiamo già notato come, in prima approssimazione, l'energia di legame per nucleone sia costante:

$$\frac{B}{A} \approx \text{cost} \rightarrow B \propto A \quad (3.1)$$

Il fatto che l'energia di legame per nucleone non dipenda da A indica una importante proprietà delle forze nucleari: esse sono a corto range. Ogni singolo nucleone all'interno del nucleo interagisce solo con i nucleoni circostanti (quelli "a contatto") e non con tutti gli A nucleoni. Questa peculiarità delle forze nucleari spiega la salita iniziale della curva da B/A in funzione di A e la zona di "plateau" successiva.

Diverso è il caso delle forze elettriche, il cui range è infinito: l'energia potenziale elettrica di una sfera di raggio R contenente una carica Ze uniformemente distribuita è data da:

$$U_{el} = \int dU_{el} = \int_0^R V(r) dq(r) = \int_0^R \frac{q(r)}{r} dq(r)$$

dove: $q(r) = \rho_{el} \frac{4}{3} \pi r^3$ e $dq(r) = \rho_{el} 4 \pi r^2 dr$

sostituendo, integrando, e notando che $\rho_{el} = \frac{Q}{\frac{4}{3} \pi R^3}$, si ottiene:

$$U_{el} = \frac{3 Q^2}{5 R} = \frac{3 Z^2 e^2}{5 R} \quad (3.2)$$

L'energia potenziale per unità di carica vale quindi $\frac{dU_{el}}{dZ} = \frac{6 Ze^2}{5 R}$, e aumenta linearmente con Z.

Partendo dalla analogia con la goccia di liquido, scriviamo una espressione dell'energia di legame del nucleo, riservandoci di giustificare in seguito i vari termini che la compongono:

$$B = \alpha A - \beta A^{2/3} - \gamma \frac{Z^2}{A^{1/3}} - \zeta \frac{(A - 2Z)^2}{A}$$

Analizziamo ora i vari termini:

- αA rappresenta il termine di volume discendente direttamente dalla relazione (3.1) precedente.

- $\beta A^{2/3}$ rappresenta il termine di superficie. Schematizzando il nucleo come una sfera di densità uniforme e raggio $r = r_0 A^{1/3}$, si ricava che la superficie esterna del nucleo vale $4\pi r_0^2 A^{2/3}$. I nucleoni che stanno sulla superficie, il cui numero è ovviamente proporzionale appunto ad $A^{2/3}$, risultano meno legati di quelli che si trovano immersi nella materia nucleare: da qui deriva il segno meno.

- $\gamma \frac{Z^2}{A^{1/3}}$ rappresenta il termine coulombiano (3.2) di repulsione tra i protoni confinati all'interno del nucleo. Immaginando il nucleo come una sfera uniformemente carica, l'energia potenziale di tale distribuzione vale:

$$U = \frac{3 q^2}{5 r} = \frac{3 Z^2 e^2}{5 r_0 A^{1/3}}$$

e naturalmente va a diminuire (vedi segno meno) l'energia di

legame.

- $\zeta \frac{(A - 2Z)^2}{A}$ è un termine aggiuntivo, indipendente dalla analogia con la goccia di

liquido. Esso deriva dalla osservazione sperimentale che nei nuclei Z ed N non sono indipendenti: anzi, specie per i nuclei leggeri ($A < 40$) essi tendono ad eguagliarsi. Questo significa che nuclei per i quali $Z = A/2$ sono più stabili e quindi hanno più alta energia di legame: deviazioni dall'uguaglianza $Z = A/2$ per eccesso o per difetto (vedi dipendenza quadratica) portano ad una diminuzione (vedi segno meno). Questo fatto si può appunto riassumere in un termine proporzionale ad A (nella goccia l'energia è proporzionale alla massa della goccia) del tipo:

$$\zeta \cdot A \cdot \frac{(N - Z)^2}{(N + Z)^2} = \zeta \cdot \frac{(A - 2Z)^2}{A}$$

Vediamo ora di ricavare i coefficienti da considerazioni approssimate ma semplici. In realtà la procedura utilizzata è più raffinata ma più complessa, e comunque non porta a differenze sostanziali rispetto alla nostra.

Il termine dovuto alla correzione coulombiana si ricava direttamente:

$$\gamma = \frac{3e^2}{5r_0} = 0.667 \text{ MeV}$$

La dipendenza di $Z = Z(A)$ per i nuclei stabili risulta essere la seguente:

$$Z = \frac{A}{2 + 0.015A^{2/3}} \quad (3.3)$$

Per questo valore di Z l'energia di legame è massima, e quindi: $\frac{dB}{dZ} = 0$.

Dalla relazione: $\frac{dB}{dZ} = -2\gamma \frac{Z}{A^{1/3}} + 4\zeta \frac{(A - 2Z)}{A} = 0$ si ricava:

$$\frac{\gamma}{\zeta} = 2A^{-2/3} \frac{(A - 2Z)}{Z}$$

Se eliminiamo Z tramite la (3.3), notando che $(A - 2Z) = 0.015 \cdot Z \cdot A^{2/3}$, sparisce anche la dipendenza da A e si ricava:

$$\frac{\gamma}{\zeta} = 0.03 \quad \text{e quindi, noto } \gamma, \text{ si trova: } \zeta = 22.2 \text{ MeV}$$

La curva $\frac{B}{A} = f(A)$ deve avere il massimo ad $A=60$. Dalla relazione:

$$\frac{d}{dA} \left(\frac{B}{A} \right)_{A=60} = 0 \quad \text{con:} \quad \frac{B}{A} = \alpha - \beta A^{-1/3} - \gamma \frac{Z^2}{A^{4/3}} - \zeta \frac{(A - 2Z)^2}{A^2}, \quad \text{si ottiene:}$$

$$\beta = \frac{60}{25} \gamma \quad \text{e quindi } \beta = 16 \text{ MeV.}$$

Imponendo infine, sempre da osservazioni sperimentali, che $\frac{B}{A} = 8.8 \text{ MeV}$ per $A=60$ e

$Z=28$ si ricava $\alpha = 15.2 \text{ MeV}$. Finalmente:

$$B = 15.2A - 16.0A^{2/3} - \frac{0.667 \cdot Z^2}{A^{1/3}} - 22.2 \frac{(A - 2Z)^2}{A}$$

• Vi è un ultimo termine, anche questo indipendente dalla analogia con la goccia di liquido. I nuclei possono essere divisi in tre gruppi per quanto riguarda la loro stabilità. Il primo gruppo contiene i nuclei più stabili, quelli con Z ed N entrambi pari (per questo detti "pari-pari"), mentre il secondo gruppo contiene i nuclei meno stabili "pari-dispari" e "dispari-pari", aventi A dispari. Infine il terzo gruppo contiene i nuclei "dispari-dispari" che di regola sono instabili (i nuclei dispari-dispari stabili sono solo quattro: ${}^2\text{H}$, ${}^6\text{Li}$, ${}^{10}\text{B}$, ${}^{14}\text{N}$). Per questo motivo, un cambio di un'unità nella carica nucleare Z ad A fissato trasforma un nucleo pari-pari in uno dispari-dispari (o viceversa), e fa quindi variare bruscamente l'energia di legame. Questo effetto non è ovviamente spiegabile con una analogia idrostatica e si deve introdurre un ulteriore termine "ad hoc": esso è espresso come $\delta A^{-3/4}$.

La formula completa per l'energia di legame B risulta allora:

$$B = \alpha A - \beta A^{2/3} - \gamma \frac{Z^2}{A^{1/3}} - \zeta \frac{(A - 2Z)^2}{A} + \delta A^{-3/4}$$

il valore di δ , dedotto ancora una volta da un confronto sperimentale, è dato dalla seguente espressione:

$$\delta = \begin{cases} +34 & \text{pari - pari} \\ 0 & \text{A dispari} \\ -34 & \text{dispari - dispari} \end{cases}$$

Dalla formula che fornisce il valore dell'energia di legame B, si ricava immediatamente la formula di B/A:

$$\frac{B}{A} = \alpha - \beta A^{-1/3} - \gamma \frac{Z^2}{A^{4/3}} - \zeta \frac{(A - 2Z)^2}{A^2} + \delta A^{-7/4}$$

Noto B, possiamo ricavare il valore della massa nucleare $M(Z, A) = Zm_p + (A - Z)m_n - B$. Essa vale:

$$M(Z, A) = Zm_p + (A - Z)m_n - \alpha A + \beta A^{2/3} + \gamma \frac{Z^2}{A^{1/3}} + \zeta \frac{(A - 2Z)^2}{A} - \delta A^{-3/4}$$

Calcoli più raffinati forniscono i seguenti valori numerici per le costanti della formula:

costante	valore (MeV)
α	15.75
β	17.8
γ	0.71
δ	0, ± 34
ζ	23.7

3.3 Applicazioni del modello a goccia

Utilizzando i coefficienti in tabella è possibile calcolare, noti Z ed A, l'energia di legame di qualsiasi nucleo con un errore relativo dell'ordine del per cento. Il calcolo della massa è sorprendentemente preciso, con un errore di 10^{-4} . Il modello a goccia permette di calcolare l'energia di separazione di un protone (ε_p), di un neutrone (ε_n), o di una particella alfa (ε_α), ossia la minima energia che si deve fornire ad un nucleo per strappare un protone, un neutrone o una particella alfa.

$$M(Z, A) + \varepsilon_p = m(Z - 1, A) + m_p$$

$$\text{Da cui: } \varepsilon_p = m(Z - 1, A) + m_p - m(Z, A) = B(Z, A) - B(Z - 1, A - 1)$$

Analogamente:

$$\varepsilon_n = B(Z, A) - B(Z, A - 1)$$

$$\varepsilon_\alpha = B(Z, A) - B(Z - 2, A - 4) - B(^4\text{He})$$

Il modello a goccia è anche usato per derivare una condizione che lega A e Z per tutti i nuclei stabili rispetto al decadimento beta. La formula che fornisce la massa di un nucleo:

$$M(Z, A) = Zm_p + (A - Z)m_n - \alpha A + \beta A^{2/3} + \gamma \frac{Z^2}{A^{1/3}} + \zeta \frac{(A - 2Z)^2}{A} - \delta A^{-3/4}$$

presenta una dipendenza di tipo parabolico (vedi figura 3.2) della massa nucleare da Z , ad A fissato.

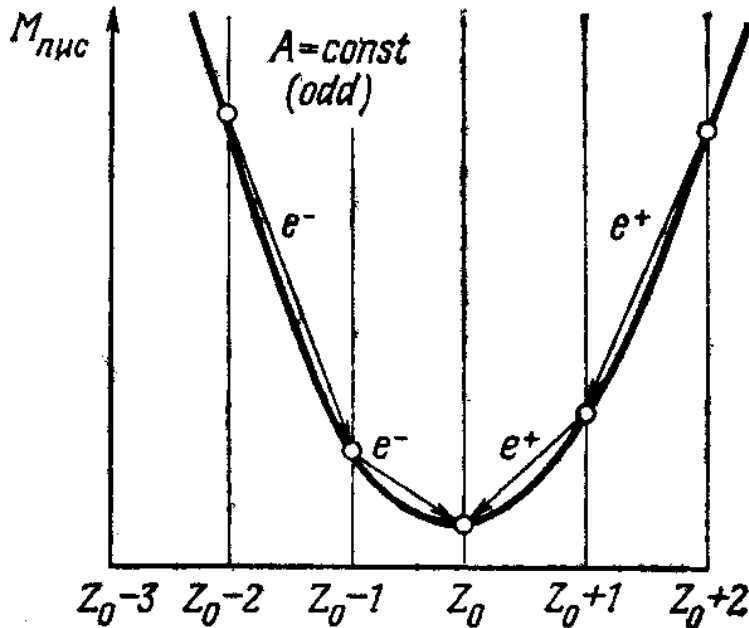


Fig 3.2 dipendenza della massa nucleare da Z per nuclei ad A dispari

Abbiamo già detto che il nucleo più stabile ha un maggior difetto di massa e quindi massa più piccola. Pertanto il valore Z_0 che corrisponde a questo nucleo può essere determinato trovando il minimo della curva. Differenziando rispetto a Z l'espressione della massa ed uguagliando a zero:

$$\frac{dm}{dZ} = m_p - m_n + 2\gamma Z A^{-1/3} - \frac{2\zeta}{A} \left(\frac{A}{2} - Z \right) = 0$$

$$\text{da cui si ricava: } Z = \frac{A}{2\zeta + 2\gamma A^{2/3}} (m_p - m_n + \zeta)$$

$$\text{che, sostituendo i valori numerici, diviene: } Z = \frac{A}{1.97 + 0.015A^{2/3}}$$

Se si usa questa espressione per calcolare Z_0 per gli isobari stabili per decadimento beta e si confronta con i valori sperimentali, si trova un ottimo accordo: Z_0 differisce al più di ± 1 dal valore sperimentale. Abbiamo visto che se A è dispari, il termine δ della formula della massa vale zero, e la funzione $m(Z)$ assume valori

singoli. Fissato A , esiste quindi un unico valore di Z_0 che corrisponde ad un isobaro stabile (vedi fig. 3.2) Il nucleo con $Z=Z_0+1$ decade β^+ nel nucleo Z_0 , mentre il nucleo con $Z=Z_0-1$ decade β^- nel nucleo Z_0 . La situazione è la stessa per i nuclei $(A, Z_0 \pm 2)$ che decadono β^\pm nei nuclei $(A, Z_0 \mp 1)$. Se però A è pari la funzione $m(Z)$ assume due valori diversi perchè $\delta = \pm 34$ a seconda che il nucleo sia dispari-dispari (+34) o pari-pari (-34)

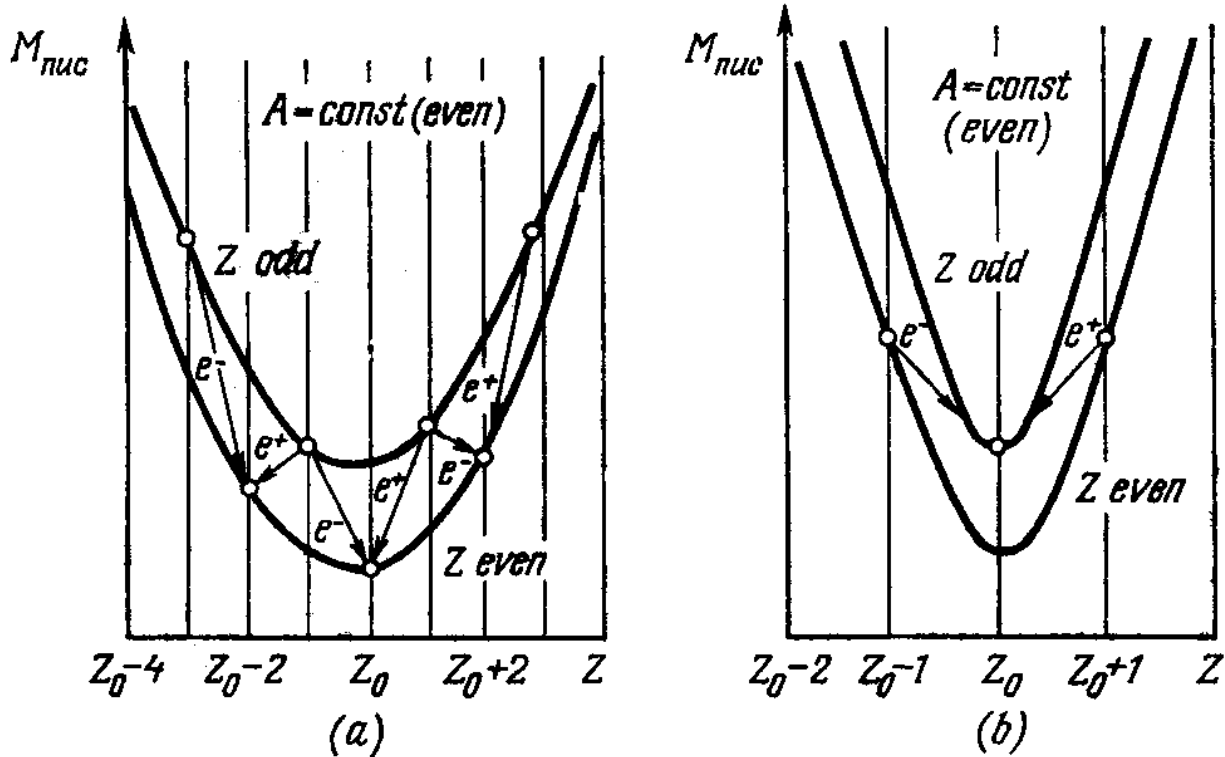


Fig 3.3 dipendenza della massa nucleare da Z per nuclei ad A pari

La parabola inferiore corrisponde ai nuclei con Z pari, mentre la parabola superiore a nuclei (meno stabili) con Z dispari. La figura 3.3 a) mostra che, poichè due nuclei contigui sulla stessa parabola differiscono di due unità in Z , possono esistere fino a tre isobari stabili per i nuclei pari-pari. Infatti una transizione del nucleo con una carica $Z_0 \pm 2$ in un nucleo con carica $Z_0 \pm 1$ non è energeticamente possibile, e una transizione diretta da $Z_0 \pm 2$ a Z_0 tramite un doppio decadimento beta è estremamente improbabile. Viceversa, poichè ciascun nucleo nella parabola superiore ha un corrispondente nucleo nella parabola inferiore che differisce per ± 1 in numero atomico, tutti i nuclei dispari-dispari devono essere instabili, ed in effetti le uniche eccezioni sono rappresentate da: ${}^2\text{H}$, ${}^6\text{Li}$, ${}^{10}\text{B}$, ${}^{14}\text{N}$. In questi casi i nuclei isobari sono arrangiati come in figura 3.3 b). Ovviamente in questo caso gli

isobari pari-pari devono essere instabili. Per esempio i nuclei ^{14}C e ^{14}O si trovano al di sopra del nucleo stabile ^{14}N (fig. 3.4)

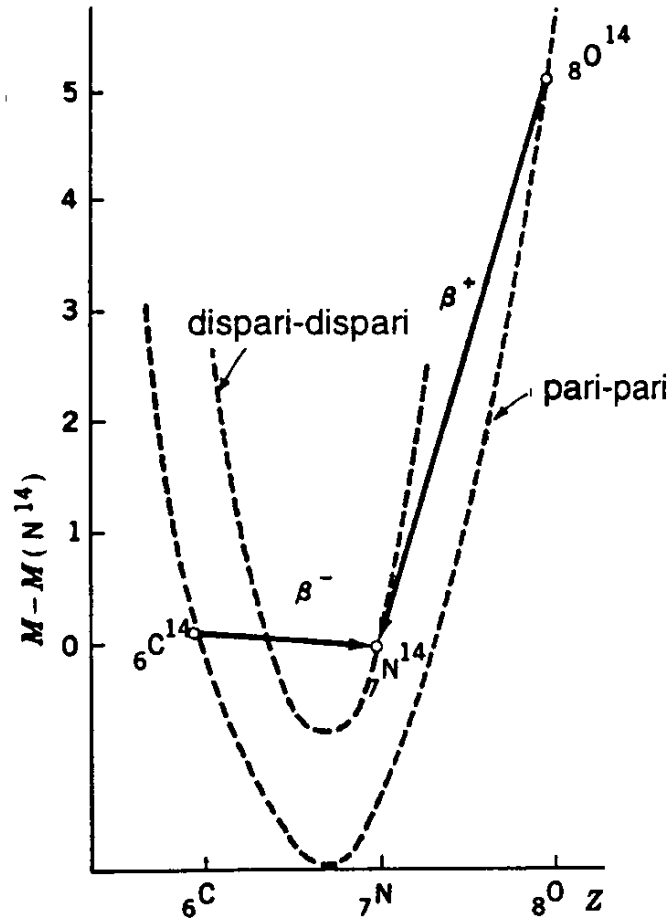


Fig. 3.4 disposizione relativa dei nuclei ^{14}C , ^{14}O e ^{14}N sul piano m - Z

Il modello a goccia può ovviamente essere anche usato per calcolare l'energia del decadimento beta: $E_{\beta\text{max}} = m(Z,A) - m(Z+1,A)$. Per l'energia cinetica delle particelle beta emesse:

$$T_{\beta\text{max}} = E_{\beta\text{max}} - m_e = m(Z,A) - m(Z+1,A) - m_e = m_n - m_p - m_e + B(Z+1,A) - B(Z,A)$$

Capitolo 4

Il decadimento alfa

4.1 Il Decadimento alfa

L'emissione di particelle α da parte di vari radionuclidi rappresenta una delle prime scoperte della fisica moderna: nel 1908 Rutherford dimostrò che tale radiazione è costituita da nuclei di ${}^4\text{He}$. Tra i componenti delle famiglie radioattive troviamo circa 30 emettitori α . La maggior parte degli isotopi creati artificialmente con numero di massa maggiore del Piombo sono emettitori α . Non vi sono emettitori α con $A < 146$ (${}^{146}_{62}\text{Sm}$). Questo è spiegato dall'andamento dell'energia di legame B/A in funzione di A . L'energia di legame B/A per lo ${}^4\text{He}$ vale 7.07 MeV (contro i 2.57 e 2.83 MeV per lo ${}^3\text{He}$ ed il ${}^3\text{H}$ rispettivamente, e di 5.33 MeV per il ${}^6\text{Li}$ ecc. ecc.). Pertanto emettendo α un sistema nucleare guadagna in energia di legame solo se si trova nella zona al di là del massimo della curva B/A : in questa regione il valore di B/A aumenta al diminuire di A (e quindi all'emissione di particelle α). Questo non è però più vero quando ci si avvicina al massimo (e a maggior ragione a sinistra del massimo), dove l'emissione α non è più un fenomeno che permetta guadagno di energia. Il decadimento α è energeticamente possibile quando :

$$\Delta E = M(Z,A) - M(Z-2,A-4) - M(2,4) > 0$$

L'eccesso di energia ΔE rappresenta in pratica l'energia cinetica della particella α . Infatti, considerando il nucleo a riposo nell'istante del decadimento:

$$0 = p_\alpha + P' \rightarrow p_\alpha = -P'$$

$$T_\alpha + T' = \Delta E$$

Dove le variabili accentate si riferiscono al nucleo residuo.

$$\frac{p_\alpha^2}{2m_\alpha} + \frac{P'^2}{2M'} = \frac{p_\alpha^2}{2} \left(\frac{1}{m_\alpha} + \frac{1}{M'} \right) = \Delta E$$

$$\frac{p_\alpha^2}{2m_\alpha} \left(1 + \frac{m_\alpha}{M'} \right) = \Delta E \quad T_\alpha = \Delta E \frac{M'}{M' + m_\alpha} \approx \Delta E, \quad \text{essendo } m_\alpha \ll M'.$$

In generale l'energia delle particelle alfa emesse varia tra 4 e 9 MeV ed i tempi di dimezzamento dei nuclei che le emettono variano tra 10^{10} y e 10^{-7} s. Confrontando energia delle particelle alfa e tempo di dimezzamento si nota che ad energie più basse corrispondono tempi di dimezzamento più lunghi e viceversa: questa è una regola generale osservata e studiata fin dal 1911 da Geiger e Nuttall, che formularono la seguente legge: per una stessa serie radioattiva, il logaritmo della costante di decadimento λ dipende linearmente dal logaritmo dell'energia delle particelle alfa emesse:

$$\ln \lambda = A + B \ln E$$

La relazione originaria trovata era del tipo:

$$\ln \lambda = a + b \ln R$$

dove R indica il percorso (range) delle particelle alfa in un mezzo assorbente: ma poichè, come vedremo nel seguito, il range è legato all'energia da una legge del tipo: $R = E^n$ (e quindi $\ln R \propto \ln E$), si vede che le due relazioni sono del tutto equivalenti.

Se si raggruppano radionuclidi α -emettitori appartenenti agli stessi elementi si ottengono i risultati riportati nelle figure 4.1 e 4.2

La regola di Geiger e Nuttal fu trovata fenomenologicamente, ma può essere dedotta rigorosamente attraverso la meccanica quantistica: anzi, la teoria del decadimento α fu uno dei primi successi dell'applicazione della meccanica quantistica ad un problema di fisica nucleare (1928, Gamow, Condon e Gurney).

Possedendo questa energia cinetica ΔE in eccesso, le particelle α dovrebbero lasciare il nucleo in un tempo dell'ordine di: $t \approx R/v_\alpha$ dove R rappresenta il range e v_α la velocità della particella. Anche per la minima energia cinetica osservata $T_\alpha = 4$ MeV, il calcolo numerico fornisce il valore:

$$t = \frac{R}{v_\alpha} = \frac{\sqrt{m_\alpha} \cdot R}{\sqrt{2T_\alpha}} = \sqrt{\frac{m_\alpha c^2}{2T_\alpha}} \cdot \frac{R}{c} = \sqrt{\frac{3727}{2 \cdot 4}} \cdot \frac{10^{-12}}{3 \cdot 10^{10}} = 7 \cdot 10^{-22} \text{ s}$$

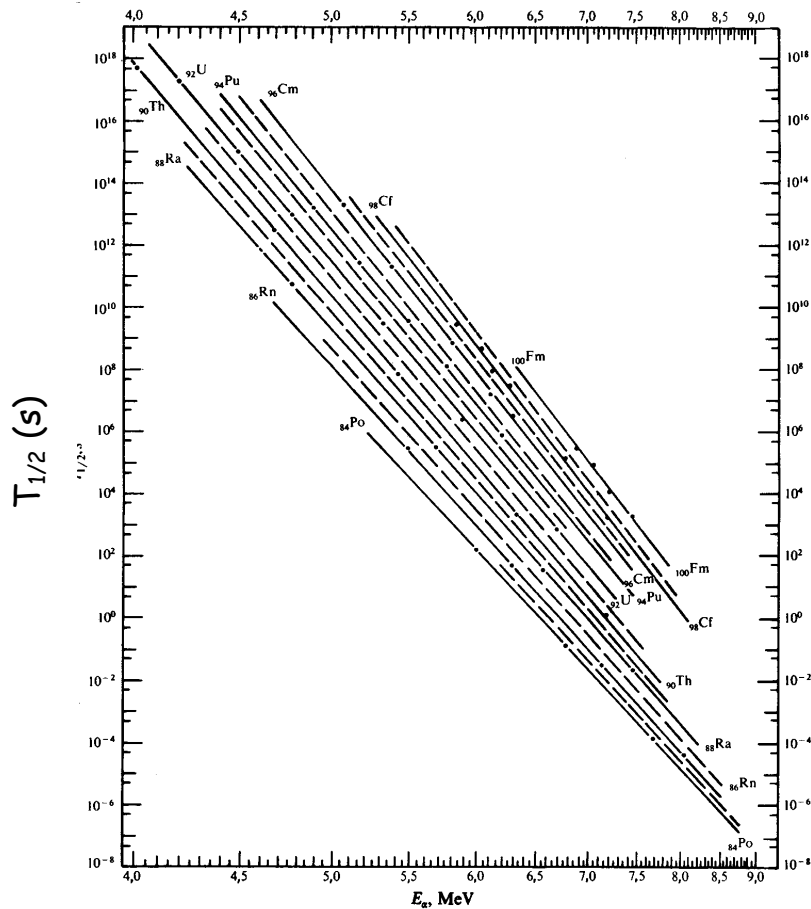


Fig 4.1 : relazione tra energia cinetica delle particelle α e $T_{1/2}$

Viceversa le vite medie dei radionuclidi α -emettitori possono essere anche dell'ordine del miliardo di anni. Se si analizza l'andamento dell'energia potenziale $U(r)$ in funzione della distanza, si ottiene un andamento del tipo riportato in figura 4.3, dove R rappresenta il raggio nucleare; per $r < R$ prevalgono le forze nucleari (schematizzate come una buca di potenziale costante), mentre per $r > R$ le forze nucleari, a causa del loro cortissimo range, sono inefficaci e prevale il campo coulombiano, il cui potenziale ha il tipico andamento del tipo $1/r$. La particella alfa, immersa nella materia nucleare, si trova nella zona con $r < R$. Se si misura la sua energia cinetica T_α una volta emessa dal nucleo (e quindi per $r \rightarrow \infty$), abbiamo visto che si trovano valori compresi tra 4 e 9 MeV. Viceversa, l'altezza della barriera coulombiana vale: $U_c(r = R) = \frac{zZe^2}{R}$ per $z=2$, $Z=90$, $R=10$ fm, e ricordando che $e^2=1.44$ MeV·fm, si ottiene: $U_c \approx 30$ MeV, quindi $U_c \gg T_\alpha$.

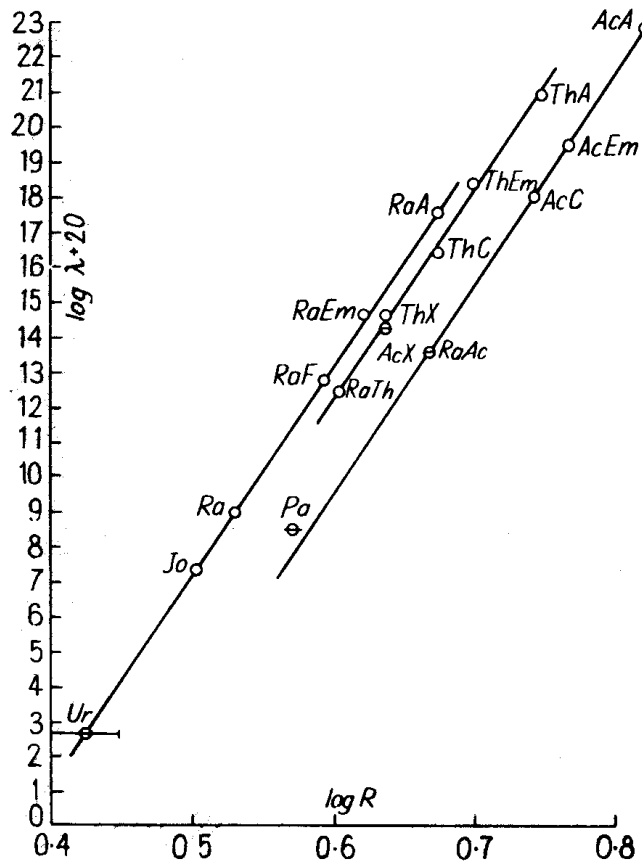


Fig 4.2 : andamento di λ in funzione del range R delle particelle α

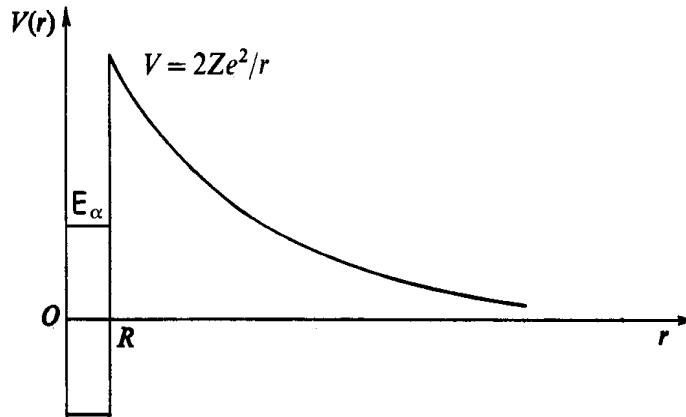


Fig 4.3 : andamento dell'energia potenziale α -nucleo in funzione della distanza r

Nasce allora il problema inverso: classicamente la particella α non potrebbe mai lasciare il nucleo, e non esisterebbero nuclei α -emettitori. Questo paradosso fu risolto da Gamow e da Condon e Gurney (1929), i quali, trattando quantisticamente il problema, mostrarono l'esistenza di una probabilità di fuga finita anche nel caso in cui la meccanica classica avrebbe predetto una barriera assolutamente insormontabile, cioè stabilità nucleare.

4.2 L'effetto tunnel quantistico

Nel caso generale l'equazione di Schroedinger per il moto della particella α si scrive nel seguente modo:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_\alpha} \nabla^2 \psi(\vec{r}) + V(r)\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r})$$

Separando le variabili si può scrivere:

$$\psi(\vec{r}) = \rho(r) \cdot \Theta(\vartheta) \cdot \Phi(\varphi) \quad , \quad \text{e se si scrive: } \rho(r) = \frac{u(r)}{r} \quad , \quad \text{si arriva all'equazione}$$

differenziale radiale seguente:

$$\frac{d^2 u(r)}{dr^2} + \frac{2m_\alpha}{\hbar^2} \left(T_\alpha - V(r) - \frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2m_\alpha r^2} \right) \cdot u(r) = 0$$

La quantità: $\hbar\sqrt{\ell(\ell+1)}$ rappresenta il momento angolare L con il quale la particella α lascia il nucleo. Vediamo, con un ragionamento semi-classico, quanto vale L . Il massimo parametro d'urto L_{\max} con il quale la particella può uscire dal nucleo è appunto il raggio nucleare.

$$L = \hbar\sqrt{\ell(\ell+1)} \approx \hbar\ell \leq L_{\max} = p_\alpha R, \quad \text{dove } p_\alpha \text{ rappresenta il momento della particella.}$$

Pertanto si ricava:

$$\ell \leq \frac{p_\alpha R}{\hbar} = \frac{\sqrt{2m_\alpha T_\alpha} R}{\hbar} = \frac{\sqrt{2m_\alpha c^2 T_\alpha} R}{\hbar c}$$

per $T_\alpha = 5 \text{ MeV}$ e $R=10 \text{ fm}$, si ottiene: $\ell \leq 11$. ℓ però non può assumere qualsiasi valore: infatti, a causa del principio di conservazione del momento angolare, deve essere: $J = J_\alpha + J'$, avendo indicato con J e J' i momenti angolari totali del nucleo padre e figlio e con J_α il momento angolare totale della particella α .

Considerando la regola di addizione dei momenti angolari in meccanica quantistica, si ha:

$$|J' - J| \leq J_\alpha \leq J' + J$$

dove $J_\alpha = I_\alpha + \ell_\alpha$ rappresenta lo spin totale della particella α , somma del suo spin intrinseco I_α e del suo momento angolare orbitale ℓ_α . Essendo $I_\alpha = 0$, risulta che ℓ_α può avere solo questo intervallo di valori:

$$|J' - J| \leq \ell_\alpha \leq J' + J$$

ed in genere, a causa di questa limitazione, risulta $\ell_\alpha = 0, 1, 2$.

Comunque, anche considerando il massimo valore ottenuto dal conto precedente, risulta che il termine di "barriera centrifuga" $\frac{\hbar^2 \ell(\ell + 1)}{2m_\alpha r^2}$ calcolato per $r = R$ vale, al

$$\text{più: } \frac{\hbar^2 \ell(\ell + 1)}{2m_\alpha R^2} \leq \frac{p_\alpha^2 R^2}{2m_\alpha R^2} = T_\alpha = 5 \text{ MeV}$$

e risulta quindi ben minore di $V_c(R) = 26 \text{ MeV}$.

Nella trattazione semplificata che segue trascureremo il contributo della barriera centrifuga (considerando quindi $\ell_\alpha = 0$). L'equazione di Schroedinger si riscrive

$$\text{allora nella forma più semplice: } \frac{d^2 u(r)}{dr^2} + \frac{2m_\alpha}{\hbar^2} (T_\alpha - V(r)) \cdot u(r) = 0$$

Consideriamo come primo passo una barriera di potenziale più semplice (vedi figura 4.4), descritta da:

$$V(r) = V_0 \text{ per } R < r < R_1 \quad V(r) = 0 \text{ altrove.}$$

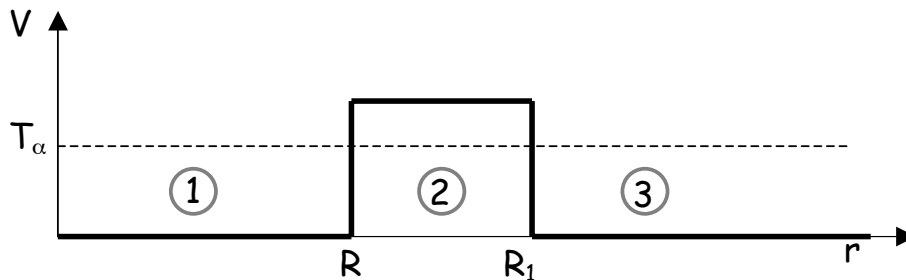


Fig 4.4 : schematizzazione di una barriera quantistica ad altezza costante

Se consideriamo il moto di una particella α avente una energia cinetica $T_\alpha < V_0$, l'equazione di Schrodinger nelle zone 1, 2 e 3 prende la forma:

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2m_\alpha}{\hbar} T_\alpha \cdot u = 0 \quad (\text{regioni 1 e 3}) \qquad \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2m_\alpha}{\hbar} (T_\alpha - V_0) \cdot u = 0 \quad (\text{regione 2})$$

La soluzione risulta:

$$u_1 = \exp\left(i \cdot \sqrt{2m_\alpha T_\alpha} \frac{r}{\hbar}\right) + B \cdot \exp\left(-i \cdot \sqrt{2m_\alpha T_\alpha} \frac{r}{\hbar}\right)$$

$$u_3 = a \cdot \exp\left(i \cdot \sqrt{2m_\alpha T_\alpha} \frac{r}{\hbar}\right)$$

$$u_2 = \alpha \cdot \exp\left(\sqrt{2m_\alpha (V_0 - T_\alpha)} \frac{r}{\hbar}\right) + \beta \cdot \exp\left(-\sqrt{2m_\alpha (V_0 - T_\alpha)} \frac{r}{\hbar}\right)$$

Abbiamo posto uguale all'unità il coefficiente dell'onda incidente sulla barriera in quanto, ai fini della probabilità di penetrazione della barriera, ha importanza solo l'ampiezza relativa delle onde. Abbiamo inoltre considerato nella regione 3 solo l'onda che si sposta verso r crescente (la particella α si allontana dal nucleo). La penetrabilità della barriera D è data da:

$$D = \frac{\Phi_3}{\Phi_1} = \frac{|u_3|^2 \cdot v_3}{|u_1^2 \text{ inc}| \cdot v_1} = \frac{|u_3|^2}{|u_1^2 \text{ inc}|} = a^2$$

Φ_1 e Φ_3 rappresentano il flusso quantistico di particelle α nelle regioni 1 e 3 (nel verso di r crescente), mentre $v_1 = v_3$ rappresenta la velocità delle particelle α nelle rispettive regioni 1 e 3.

Le quattro costanti B , α , β ed a , sono determinate dalle condizioni di continuità della funzione u e della sua derivata prima nei punti di discontinuità del potenziale.

Sviluppando i calcoli si ottiene:

$$D = \exp\left[-\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m_\alpha (V_0 - T_\alpha)} \cdot (R_1 - R)\right]$$

il risultato può essere esteso ad una barriera di altezza variabile $V(r)$. Nel caso di potenziale colombiano:

$$D = \exp\left[-\frac{2}{\hbar} \int_R^{R_T} \sqrt{2m_\alpha \left(\frac{zZe^2}{r} - T_\alpha\right)} \cdot dr\right]$$

dove R_T è la distanza alla quale si annulla il radicando: $R_T = \frac{zZe^2}{T_\alpha}$

Svolgendo l'integrale si ottiene la penetrabilità D , che esprimiamo nel seguente

modo: $D = \exp(-2 \cdot g \cdot \gamma)$ dove: $g = \frac{Rp_B}{\hbar} = \frac{R}{\hbar} \sqrt{2m_\alpha B}$

dove B è l'altezza della barriera: $B = \frac{zZe^2}{R} = \frac{zZe^2}{r_0 A^{1/3}}$

e γ è dato da: $\gamma = \sqrt{\frac{B}{T_\alpha}} \cdot \text{acos}\left(\sqrt{\frac{T_\alpha}{B}}\right) - \sqrt{1 - \frac{T_\alpha}{B}}$

La penetrabilità della barriera è legata alla costante di decadimento λ . Infatti D esprime la probabilità di attraversamento della barriera per urto, λ rappresenta la probabilità di attraversamento per unità di tempo. Le due quantità sono legate dalla relazione:

$$\lambda = v \cdot D$$

dove v rappresenta la frequenza degli urti contro la barriera ed è dato da: $v = \frac{v_\alpha}{2R}$,

dove v_α è la velocità della particella α nel nucleo. In una trattazione più rigorosa si dovrebbe scrivere:

$$\lambda = P \cdot v \cdot D$$

dove P rappresenta la probabilità che all'interno del nucleo si formi una particella α in seguito alle interazioni tra protoni e neutroni. Il calcolo di P è molto complicato e comunque a tutt'oggi una sua valutazione esatta non esiste.. Noi assumiamo $P=1$, che è comunque una stima realistica per nuclei ad alto A , specie per i nuclei pari-pari. Per particelle α di energia cinetica pari a 4 MeV, il valore numerico di v è:

$$v = \frac{v_\alpha}{2R} = \frac{\beta_\alpha c}{2R} = \sqrt{\frac{2T_\alpha}{m_\alpha c^2}} \cdot \frac{c}{2R} = 10^{20} \div 10^{21} \text{ s}^{-1}$$

Esplicitando D :

$$\lambda = v \cdot D = v \cdot \exp\left[-\frac{2}{\hbar} \int_R^{R_T} \sqrt{2m_\alpha(V(r) - T_\alpha)} \cdot dr\right] = v \cdot \exp[\varphi(T_\alpha)]$$

che si riscrive:

$\ln \lambda = \ln v + \varphi(T_\alpha)$, che in forma generale si scrive:

$$\ln \lambda = A + B \cdot \sqrt{T_\alpha}$$

dove A e B sono costanti che non variano (o variano pochissimo) con Z . Questa espressione coincide con la relazione trovata sperimentalmente da Geiger e Nuttall la teoria di Gamow rappresentò il primo grande successo della meccanica quantistica.

Per la verità Geiger e Nuttall trovarono una espressione leggermente diversa: $\ln \lambda = A + B' \cdot \ln T_\alpha$. Ma nel range di variabilità dell'energia cinetica delle particelle α le espressioni sono del tutto equivalenti (vedi figura 4.5).

La dipendenza trovata spiega come mai l'intervallo di variazione di λ è molto maggiore dell'intervallo di variazione dell'energia cinetica. Spiega inoltre anche l'esistenza di un limite inferiore per l'energia cinetica della particella α . Una variazione del 10% in T_α cambia la costante di disintegrazione di un fattore 10^3 . Per $T_\alpha < 2$ MeV la vita media diventa talmente lunga che è praticamente impossibile rivelare particelle α . Questo spiega anche il fatto che non esistono in pratica nuclei α -radioattivi per $Z < 82$, dove il ΔE risulta minore di 2 MeV.

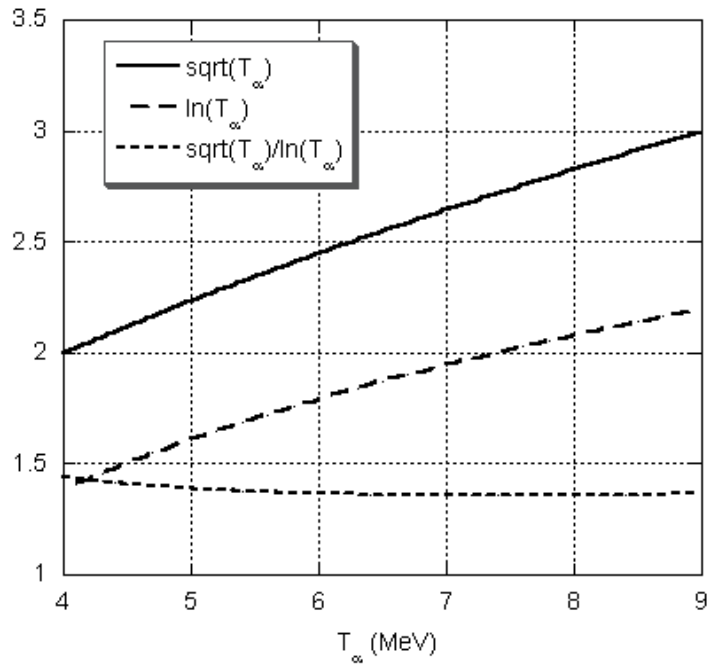


Fig. 4.5 Andamento delle funzioni $\sqrt{T_\alpha}$ (—), $\ln(T_\alpha)$ (- -) e del loro rapporto (· · · ·) tra 4 e 9 MeV

Capitolo 5

Il decadimento beta

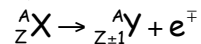
5.1 Il Decadimento beta: generalità

Il decadimento beta è una trasformazione nucleare in cui si verifica l'emissione di un elettrone negativo o positivo. Nei primi studi sulla radioattività esisteva una certa confusione circa l'origine di questi elettroni e si pensava, fino al 1933, che essi fossero permanentemente presenti nel nucleo: ad esempio il nucleo di $^{14}_7\text{N}$ era immaginato come costituito da 14 protoni e da 7 elettroni, così da avere una massa pari a 14 volte quella del protone ed una carica positiva pari a quella di 7 protoni. Un forte argomento contro questa assunzione viene da:

- a) principio di conservazione dell'energia;
- b) principio di conservazione del momento angolare;
- c) principio di indeterminazione.

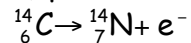
Infatti:

- a) Se il cambiamento di stato del sistema fosse:



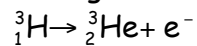
cioè un decadimento in due corpi, l'elettrone avrebbe una ben definita energia. Mentre in effetti l'elettrone presenta uno spettro energetico continuo che va da energia zero all'energia massima compatibile con la trasformazione.

- b) prendiamo per esempio la ipotetica trasformazione:



Il momento angolare del nucleo $^{14}_6\text{C}$ è $J=0$, quello del $^{14}_7\text{N}$ è $J=1$ (e comunque per A pari devono essere interi). il momento angolare intrinseco (spin) dell'elettrone è invece $J=1/2$. Allora lo stato iniziale ha momento angolare intero, lo stato finale ha momento angolare semi-intero (somma di un J intero, di uno semi-intero, e di un eventuale momento angolare orbitale del sistema $^{14}_7\text{N}$ - elettrone, comunque intero).

Analogamente, per nuclei con A dispari:



Poiché i momenti angolari di ^3_1H ed ^3_2He sono semi-interi ($1/2$), il momento angolare iniziale è semi-intero, mentre quello finale è intero (somma di due J semi-interi, più un eventuale momento angolare orbitale del sistema ^3_2He - elettrone, comunque intero).

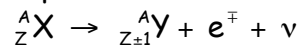
- c) Nell'ipotesi che gli elettroni facciano parte dei nuclei, essi, racchiusi in una sfera di raggio $R = 10^{-12}$ cm, in base al principio di indeterminazione dovrebbero avere una distribuzione di momento che si estende fino a $p_{\max} = \hbar/R = 20 \text{ MeV}/c$ e quindi (trascurando la massa a riposo dell'elettrone, pari a $0.511 \text{ MeV}/c^2$) una energia cinetica $E_{\max} = 20 \text{ MeV}$. Per tenere legato entro il nucleo un elettrone con tale energia non è sufficiente la forza di attrazione coulombiana: l'energia potenziale colombiana:

$$V_c = -\frac{Ze^2}{R} = -\frac{Ze^2}{r_0 A^{1/3}}$$

per $Z=6$ ed $A=14$ si ha: $V_c = -2.6$ MeV. E' quindi necessaria una ulteriore energia potenziale negativa (attrattiva), di origine nucleare, che in valore assoluto deve essere maggiore dell'energia cinetica: 20 MeV per elettrone sarebbero molto maggiori del potenziale attrattivo medio per nucleone dovuto all'interazione nucleare (7-8 MeV). Non vi è assolutamente evidenza, anzi vi è una forte evidenza del contrario, che vi sia una così forte interazione tra elettrone e nucleone.

Il decadimento beta e tutti i fatti ad esso connessi sono spiegati con l'ipotesi del neutrino di Pauli (1931) che portò alla teoria di Fermi del 1934.

L'ipotesi di Pauli è che la trasformazione sia data da:



dove la particella ν (neutrino) è neutra per la conservazione della carica, ha spin semi-intero per la conservazione del momento angolare, ed ha massa a riposo molto piccola per la conservazione dell'energia (altrimenti la massima energia dell'elettrone emesso dovrebbe dipendere dalla massa del neutrino). La forma dello spettro energetico della emissione beta può essere ricavata abbastanza semplicemente studiando in qual modo l'energia a disposizione nella transizione può essere ripartita tra la particella beta ed il neutrino. Per semplificare il calcolo facciamo le seguenti assunzioni:

- si trascura l'interazione coulombiana tra l'elettrone ed il nucleo (ciò vale almeno per i nuclei più leggeri, con $Z < 10$);
- si trascura il rinculo del nucleo residuo (sempre valida, essendo $m_e \ll M_{\text{nucleo}}$);
- si considera nulla la massa del neutrino ($m_\nu = 0$);
- si considerano egualmente probabili tutte le possibili suddivisioni dell'energia tra elettrone e neutrino.

5.2 La teoria di Fermi

I risultati principali della teoria di Fermi sono la spiegazione, per mezzo della introduzione di un solo nuovo parametro (la costante di accoppiamento debole g) dei seguenti fatti:

- la forma degli spettri beta;
- la relazione tra energia massima del decadimento e la vita media;
- la classificazione delle transizioni beta e la definizione di regole di selezione.

Il punto di partenza è la regola d'oro, che fornisce la probabilità di transizione per unità di tempo:

$$\omega = \frac{2\pi}{\hbar} |M_{if}|^2 \rho$$

Per usare tale formula occorre conoscere l'espressione dell'elemento di matrice M_{if} tra gli stati iniziale e finale e la densità degli stati finali $\rho = dN/dW$, essendo W l'energia totale a disposizione.

Poichè ad ogni transizione corrisponde l'emissione di una particella beta, la grandezza ω coincide evidentemente con la costante di decadimento λ definita in genere per i decadimenti radioattivi.

Naturalmente si può valutare la probabilità di transizione per unità di tempo per emissione di elettroni con quantità di moto compresa tra p_e e $p_e + dp_e$:

$$d\omega(p_e) = \frac{2\pi}{\hbar} |M_{if}|^2 \frac{d^2N}{dW dp_e} dp_e \quad (5.1)$$

Si vedrà che la densità degli stati finali determina completamente la forma dello spettro beta, essendo l'elemento di matrice nelle transizioni permesse una costante indipendente dall'energia degli elettroni. L'elemento di matrice, per definizione, ha la seguente forma:

$$M_{if} = \int \psi_{fin}^* H \psi_{in} d\tau$$

dove H è l'operatore che rappresenta la transizione e l'integrale è esteso al volume interessato.

La funzione d'onda $\psi_{in}=u_i$ descrive il nucleo prima del decadimento; la funzione d'onda $\psi_f = u_f \psi_e \psi_\nu$ è il prodotto della funzione d'onda del nucleo nello stato finale per le funzioni d'onda dell'elettrone e dell'anti-neutrino. Nella teoria di Fermi viene fatta l'ipotesi che l'operatore H abbia la forma:

$$H = g \cdot \delta(\mathbf{r}_e - \mathbf{r}) \cdot \delta(\mathbf{r}_\nu - \mathbf{r})$$

dove $\delta(x)$ è la funzione di Dirac, \mathbf{r}_e è un vettore di posizione associato all'elettrone, \mathbf{r}_ν un analogo vettore associato al neutrino e \mathbf{r} è associato al nucleone che decade. $\delta(\mathbf{r}_e - \mathbf{r})$ è la densità di probabilità che elettrone e nucleone si trovino a distanza $\mathbf{r}_e - \mathbf{r}$; simile è il significato di $\delta(\mathbf{r}_\nu - \mathbf{r})$. La speciale dipendenza di H dalle coordinate esprime l'ipotesi che il raggio di azione dell'interazione sia nullo, cioè elettrone, antineutrino e nucleone interagiscono solo quando sono sovrapposti, o a contatto. La giustificazione qualitativa di tale ipotesi è data dal fatto che nel decadimento beta del neutrone isolato l'interazione si manifesta solo per distanze molto piccole, inferiori alle dimensioni del neutrone stesso. G è una costante che misura l'intensità dell'interazione. Il suo valore non è noto a priori e viene determinato sulla base di dati sperimentali. Esso ha un ruolo simile a quello dato dalla carica elettrica nel potenziale coulombiano. Dimensionalmente valgono le seguenti relazioni:

$$[M_{if}] = \text{energia}$$

$$[H] = \text{energia/volume}$$

$$[g] = \text{energia} \cdot \text{volume}$$

Data la proprietà della funzione di Dirac si ha:

$$M_{if} = \int \psi_{fin}^* H \psi_{in} d\tau = g \cdot \int \psi_e^*(\mathbf{r}_e) \cdot \psi_\nu^*(\mathbf{r}_\nu) \cdot u_f^*(\mathbf{r}) \cdot \delta(\mathbf{r}_e - \mathbf{r}) \cdot \delta(\mathbf{r}_\nu - \mathbf{r}) \cdot u_i(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}_e d\mathbf{r}_\nu d\mathbf{r}$$

che si riduce a:

$$M_{if} = g \cdot \int \psi_e^*(\mathbf{r}) \cdot \psi_\nu^*(\mathbf{r}) \cdot u_f^*(\mathbf{r}) \cdot u_i(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$$

L'integrale si estende alle coordinate nucleari e le funzioni d'onda u tengono conto della trasformazione di un protone in un neutrone nel nucleo. La nuova costante universale g , caratteristica del decadimento beta, ha le dimensioni di un'energia per un volume. Essa può essere determinata sperimentalmente, come vedremo tra breve, ed il suo valore numerico è dell'ordine di $10^{-49} \text{ erg}\cdot\text{cm}^3$. Dall'ipotesi di raggio d'azione nullo per H , segue che elettrone e neutrino, una volta emessi dal nucleo, sono particelle in moto libero, se si prescinde dall'interazione coulombiana fra elettrone e nucleo finale, che ha raggio d'azione infinito. Trascurando la parte di spin e, per ora, l'interazione coulombiana dell'elettrone uscente con il nucleo, le funzioni d'onda dell'antineutrino e dell'elettrone possono essere descritte come onde piane:

$$\psi_e(\mathbf{r}) = V^{-1/2} e^{i\mathbf{k}_e \cdot \mathbf{r}} \quad \psi_\nu(\mathbf{r}) = V^{-1/2} e^{i\mathbf{k}_\nu \cdot \mathbf{r}}$$

dove V è il volume di normalizzazione.

dove $\mathbf{k}_e = \mathbf{p}_e/\hbar$ e $\mathbf{k}_\nu = \mathbf{p}_\nu/\hbar$

Se si trascura il rinculo del nucleo si ha che $p_e = p_\nu$. Inoltre, per energie dell'elettrone uscente dell'ordine del MeV, $\beta \approx 1$ e quindi $p_e \approx m_e c$:

$$k = \frac{p}{\hbar} \approx \frac{m_e c}{\hbar} = \frac{m_e c^2}{\hbar c} = \frac{0.51}{198} = 2.51 \cdot 10^{-3} \text{ fm}^{-1}$$

il prodotto $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$, per valori di r dell'ordine di qualche fermi (raggio nucleare), è molto minore dell'unità, e si può scrivere:

$$e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = 1 + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \dots$$

dove addirittura il secondo termine è trascurabile. Pertanto: $\psi_e(\mathbf{r}) \cdot \psi_\nu(\mathbf{r}) = 1/V$

e l'elemento di matrice si scrive:

$$M_{if} = \frac{g}{V} \int u_f^* u_i d\mathbf{r} = \frac{g}{V} S_{if} \quad (5.2)$$

Per quanto riguarda il valore numerico di S_{if} , notiamo che, quanto maggiore è il grado di sovrapposizione tra stato nucleare iniziale e finale, quanto più S_{if} è prossimo all'unità (varrebbe uno per funzioni d'onda identiche, in quanto $\int \psi^* \psi \cdot d\mathbf{r} = 1$).

Vediamo ora di calcolare la densità degli stati finali, cioè il numero di stati per intervallo di energia dell'energia totale W . Tre corpi partecipano alla disintegrazione: il nucleo finale, l'elettrone ed il neutrino. Energia e quantità di moto devono essere conservate. L'energia di rinculo del nucleo è però molto piccola (a causa della massa molto maggiore) e può essere senz'altro trascurata. Si può perciò dire che la somma delle energie dell'elettrone e del neutrino è pari all'energia totale W della disintegrazione:

$$E_e + E_\nu = \sqrt{m_e^2 c^4 + p_e^2 c^2} + \sqrt{m_\nu^2 c^4 + p_\nu^2 c^2} = W$$

Nell'ipotesi di massa del neutrino nulla (o comunque trascurabile rispetto a quella dell'elettrone, la relazione precedente si riduce a: $E_e + E_\nu = \sqrt{m_e^2 c^4 + p_e^2 c^2} + p_\nu c = W$

Vogliamo ora determinare il numero di stati dell'elettrone con quantità di moto compresa tra p_e e $p_e + dp_e$, senza tener conto della quantità di moto del neutrino. Il

numero di stati in cui il neutrino ha quantità di moto nell'intervallo dp_ν e l'elettrone nell'intervallo dp_e è dato da:

$$d^2N = dn_e dn_\nu = \left(\frac{4\pi V}{(2\pi\hbar)^3} p_e^2 dp_e \right) \left(\frac{4\pi V}{(2\pi\hbar)^3} p_\nu^2 dp_\nu \right) = \frac{16\pi^2 V^2}{(2\pi\hbar)^6} p_e^2 dp_e p_\nu^2 dp_\nu \quad (5.3)$$

avendo integrato su tutte le possibili direzioni delle quantità di moto ($\int d\Omega_e = \int d\Omega_\nu = 4\pi$) e sulle possibili coordinate all'interno del volume di normalizzazione (V), e tenendo presente che la celletta di quantizzazione vale $(2\pi\hbar)^3$ sia per il neutrino che per l'elettrone.

Questa relazione, anzichè in termini del momento dell'antineutrino, può essere riscritta in una forma più conveniente in termini di energia W liberata nel decadimento. L'energia totale disponibile per la coppia elettrone antineutrino (trascurando l'energia cinetica di rinculo del nucleo) è: $W = E_e + E_\nu = E_e + \sqrt{p_\nu^2 c^2 + m_\nu^2 c^4}$

Quindi, per un valore fissato di E_e , si ha:

$$p_\nu^2 c^2 = (W - E_e)^2 - m_\nu^2 c^4$$

che, differenziata, fornisce la relazione:

$$c^2 p_\nu dp_\nu = (W - E_e) dW$$

Sostituendo nella (5.3) otteniamo:

$$d^2N = \frac{16\pi^2 V^2}{(2\pi\hbar)^6} \frac{1}{c^3} p_e^2 (W - E_e) \sqrt{(W - E_e)^2 - m_\nu^2 c^4} dp_e dW$$

Nell'ipotesi di massa nulla del neutrino:

$$d^2N = \frac{16\pi^2 V^2}{(2\pi\hbar)^6} \frac{1}{c^3} p_e^2 (W - E_e)^2 dp_e dW$$

La quantità:

$$\frac{d^2N}{dW} = \frac{d^2N}{dW dp_e} dp_e$$

rappresenta proprio la densità degli stati finali per i quali l'elettrone ha una quantità di moto compresa tra p_e e $p_e + dp_e$, senza tener conto della quantità di moto del neutrino, quando l'energia totale è compresa tra W e $W+dW$.

Possiamo allora riscrivere la (5.1) come:

$$d\omega(p_e) = \frac{2\pi}{\hbar} |M_{if}|^2 \frac{d^2N}{dW dp_e} dp_e = \frac{2\pi}{\hbar} |M_{if}|^2 \frac{16\pi^2 V^2}{(2\pi\hbar)^6 c^3} (W - E_e)^2 p_e^2 dp_e \quad (5.4)$$

Utilizzando la relazione (5.2) possiamo riscrivere la (5.1) nel seguente modo:

$$d\omega(p_e) = \frac{2\pi}{\hbar} g^2 |S_{if}|^2 \frac{16\pi^2}{(2\pi\hbar)^6 c^3} (W - E_e)^2 p_e^2 dp_e \quad (5.5)$$

dove ovviamente sparisce la dipendenza dal volume V di integrazione.

Essendo W fissata e poiché non teniamo esplicitamente conto del neutrino, possiamo semplificare la notazione e riscrivere la densità degli stati finali dell'elettrone $\frac{d^2N}{dWdp_e}$

semplicemente come: $\frac{dN_e}{dp_e}$

$$\frac{dN_e}{dp_e} = \frac{16\pi^2 V^2}{(2\pi\hbar)^6 c^3} (W - E_e)^2 p_e^2$$

La densità degli stati finali può essere anche espressa in funzione della energia totale

$$\frac{dN_e}{dE_e} \text{ o dell'energia cinetica dell'elettrone } \frac{dN_e}{dT_e}.$$

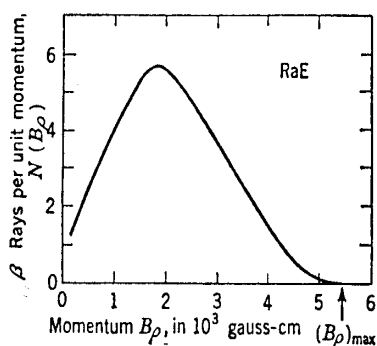


Fig. 1.1 Momentum spectrum of the β rays from RaE, a forbidden transition. [From Neary (N7).]

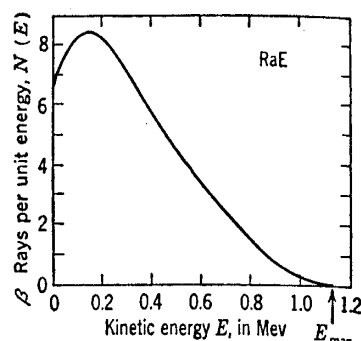


Fig. 1.2 Energy spectrum of the β rays from RaE. [From Neary (N7).]

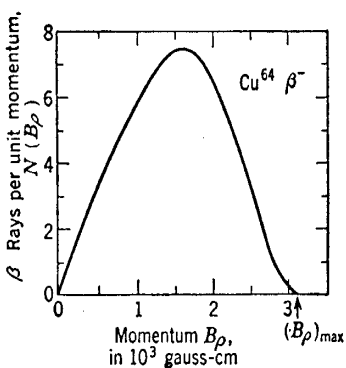


Fig. 1.3 Momentum spectrum of the negatron β rays from Cu^{64} , an allowed transition. [From Reitz (R14).]

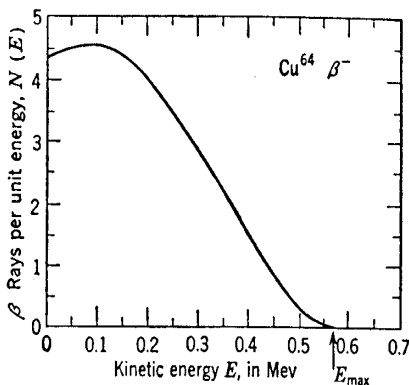


Fig. 1.4 Energy spectrum of the negatron β rays from Cu^{64} . (Calculated from Fig. 1.3.)

Fig. 5.1 distribuzioni di momento ed energia delle particelle β

Dalla relazione $p_e^2 = \frac{1}{c^2}(E_e^2 - m_e^2 c^4)$ si ricava: $2p_e dp_e = \frac{2}{c^2} E_e dE_e$, ossia: $\frac{dp_e}{dE_e} = \frac{E_e}{c^2 p_e}$

$$\frac{dN_e}{dE_e} = \frac{dN_e}{dp_e} \frac{dp_e}{dE_e} = \frac{16\pi^2 V^2}{(2\pi\hbar c)^6} (W - E_e)^2 \cdot E_e \cdot \sqrt{E_e^2 - m_e^2 c^4}$$

$$\frac{dN_e}{dT_e} = \frac{16\pi^2 V^2}{(2\pi\hbar c)^6} (W - T_e - mc^2)^2 (T_e + mc^2) \sqrt{T_e(T_e + 2mc^2)}$$

Gli spettri sperimentali degli elettroni rivelati (fig. 5.1) riflettono pertanto le espressioni sopra riportate. La densità degli stati finali appropriata da usare per ottenere la probabilità di una disintegrazione che produce un elettrone di quantità di moto compresa tra p_e e $p_e + dp_e$ risulta essere:

Ci si può anche chiedere quale sia il numero totale di decadimenti per unità di tempo λ prescindendo dalla quantità di moto dell'elettrone. Ciò si ottiene integrando rispetto a dp_e da zero alla quantità di moto massima possibile dell'elettrone:

$$p_{max} = (W^2 - m^2 c^4)^{1/2}$$

Si ottiene:

$$\lambda = \frac{g^2 |S_{if}|^2}{2\pi^3 \hbar^7} \int_0^{p_{max}} [W - (m^2 c^4 + p_e^2)^{1/2}]^2 p_e^2 dp_e$$

La formula che fornisce la densità degli stati finali si può riscrivere:

$$w(p_e) dp_e = C(W - E_e)^2 p_e^2 dp_e$$

congiungendo tutti i termini non dipendenti dall'energia nella costante C

la distribuzione, nel caso di $m_v \neq 0$, diviene invece:

$$w(p_e) dp_e = C(W - E_e) \sqrt{(W - E_e)^2 - m_v^2} p_e^2 dp_e$$

5.3 La forma dello spettro beta ed il Curie-plot

Confrontando le due espressioni, si vede che la forma della distribuzione per $m_v \neq 0$ e per $m_v = 0$ cambia nella zona in cui la differenza $W - E_e$ è molto piccola, cioè sulla testa dello spettro. L'andamento dello spettro nei due casi è quello riportato in figura 5.2

Si dimostra facilmente che la tangente alla curva nel punto $p = p_{max}$ è uguale a zero nel caso di $m_v = 0$, mentre è infinita nel caso di $m_v \neq 0$.

Ovviamente gli spettri energetici sperimentali, a causa degli errori di misura, non permettono di misurare la pendenza della curva: si ricorre pertanto al plot di Curie. Occorre però prima aprire una parentesi. Nella trattazione fatta non si è tenuto conto della attrazione (o repulsione) coulombiana subita dall'elettrone (positrone) da parte del nucleo. Questa forza porta ad una deformazione dello spettro beta che dipende da Z del nucleo e dall'energia dell'elettrone, e fa sì che per gli elettroni sono più favoriti impulsi piccoli, per i positroni impulsi grandi. La deformazione dovuta all'interazione coulombiana è mostrata in figura 5.3: si tiene conto di essa introducendo il fattore correttivo $F(Z, E)$:

$$\omega(p_e) dp_e = CF(Z, E)(W - E_e)^2 p_e^2 dp_e \quad (m_\nu = 0)$$

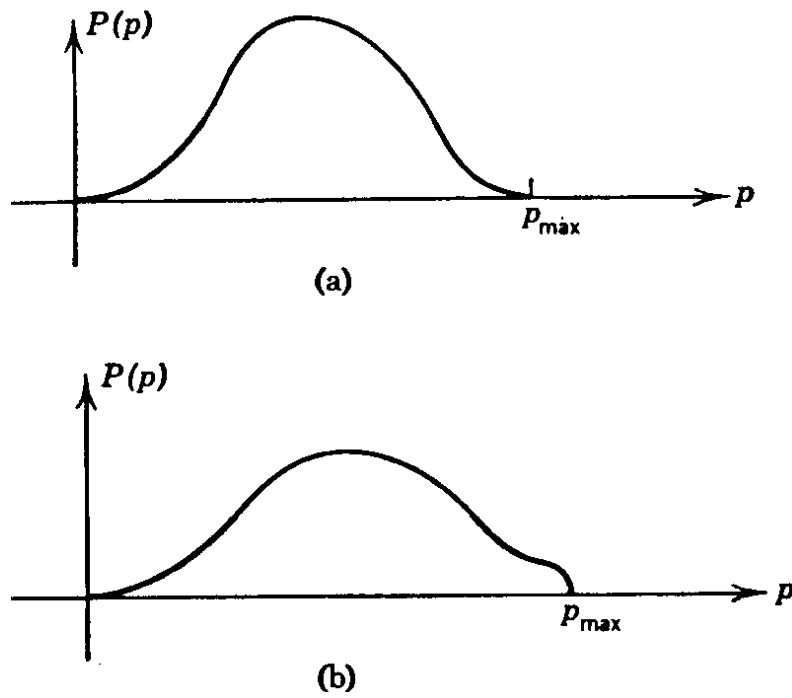


Fig. 5.2 : deformazione della testa dello spettro beta per $m_\nu = 0$ (a) e per $m_\nu \neq 0$ (b)

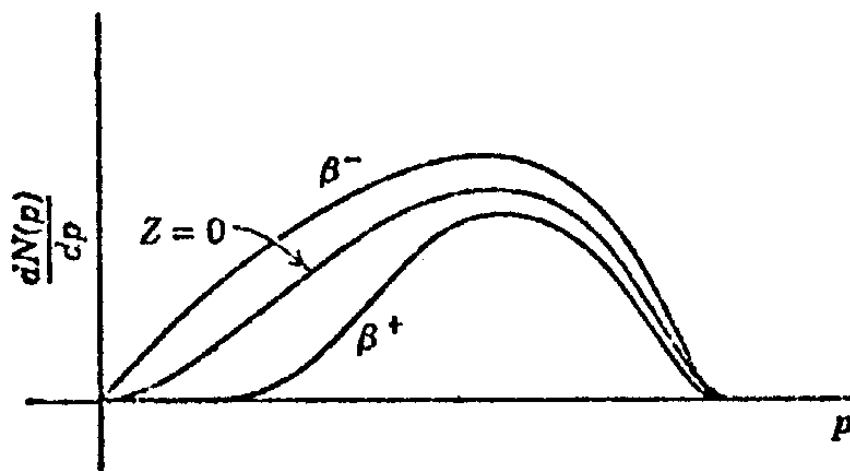


Fig 5.3: Deformazione dello spettro beta dovuta all'interazione coulombiana

Se consideriamo la funzione:

$$\frac{\sqrt{w(p_e)}}{F(Z, E)p_e^2} = C^{1/2}(W - E_e)$$

Tale funzione è lineare in E_e e interseca l'asse delle ascisse in $E_e=W$ per $m_\nu = 0$. Questa rappresentazione si chiama appunto plot di Curie: in figura 5.4 è mostrata la deformazione che ci si aspetta (deviazione dall'andamento lineare) nel caso di $m_\nu \neq 0$.

Dal Curie-plot è possibile in linea di principio ricavare il limite superiore che può avere la massa del neutrino. Ad esempio, dal Curie plot del decadimento beta del ^3H si è ricavato per la massa del neutrino il seguente intervallo di valori:

$14 \text{ eV} < m_\nu < 46 \text{ eV}$ (con un livello di confidenza del 99%).

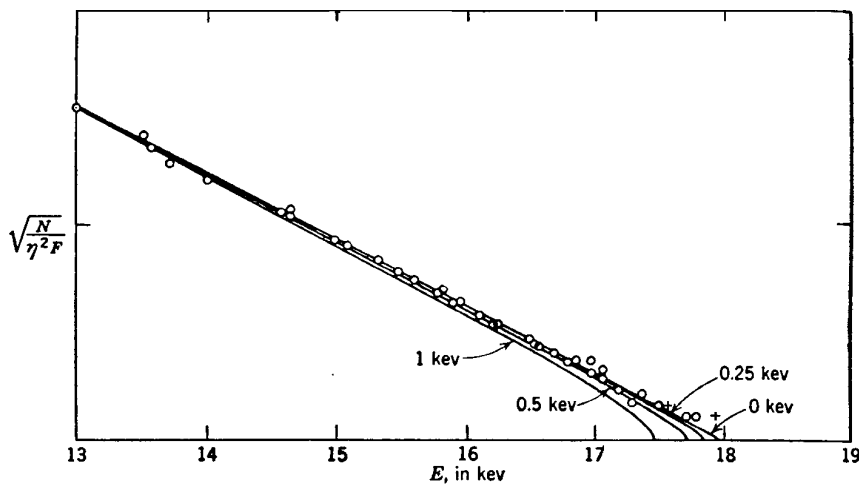


Fig 5.4: come la testa dello spettro è influenzata dal valore della massa del neutrino

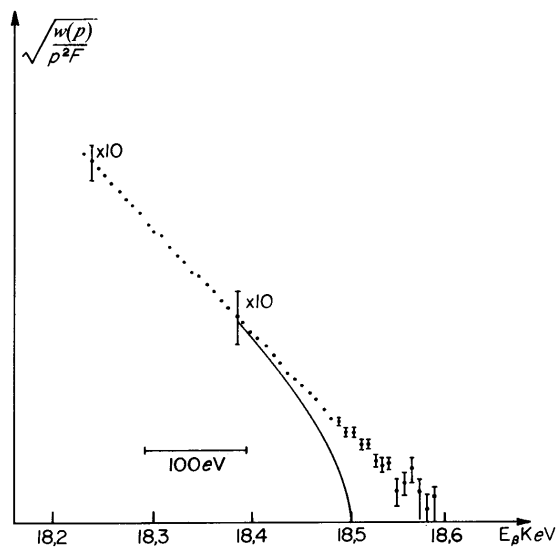


Fig. 5.5: Plot di Curie del ^3H

La linea continua in figura 5.5 corrisponderebbe ad una massa del neutrino pari a 100 eV.

5.4 Regole di selezione nel decadimento beta

Se torniamo all'espressione della costante di decadimento

$$\lambda = \frac{g^2 |S_{if}|^2}{2\pi^3 \hbar^7} \int_0^{p_{max}} [W - (m^2 + p_e^2)^{1/2}]^2 p_e^2 dp_e$$

l'integrale, scritto come una funzione della variabile adimensionale $\varepsilon = \frac{m_e + T_e}{m_e} = \frac{E_e}{m_e}$,

può essere risolto e diviene una funzione dimensionale $F(\varepsilon_0)$ della sola grandezza

$$\varepsilon_0 = \frac{m_e + T_{e\ max}}{m_e} = \frac{W}{m_e}.$$

Poichè inoltre $\lambda = 1/\tau$, si può scrivere: $F(\varepsilon_0)\tau = \frac{2\pi^3 \hbar^7}{g^2 m_e^5 |S_{if}|^2}$. La quantità $F(\varepsilon_0)$, nota dalla

teoria la forma dello spettro beta, può essere calcolata. In particolare, per ε_0 sufficientemente grande si ha $F(\varepsilon_0) \approx \varepsilon_0^5$. Il valore di $|S_{if}|^2$ deve essere vicino all'unità per le transizioni permesse e zero per le transizioni vietate. Quindi la teoria del decadimento beta predice che il prodotto delle due grandezze sperimentalmente misurabili $F(\varepsilon_0)\tau$ deve essere quasi costante per le transizioni permesse così come per le transizioni vietate (la costante in quest'ultimo caso sarà comunque molto più grande). Il valore più basso di $F\tau$ si ottiene per i processi più semplici, come il decadimento beta del neutrone o del trizio, essendo le funzioni d'onda nucleari del neutrone e del protone identiche, ed essendo ${}^3\text{H}$ ed ${}^3\text{He}$ nuclei speculari. I valori del logaritmo del prodotto $F\tau$ sono riportati in tabella per alcuni decadimenti permessi.

Transizione beta	Vita media	$(T_e)_{max}$ (MeV)	Log($F\tau$)
${}^3\text{H} \rightarrow {}^3\text{He}$ (β^-)	12.46 y	0.019	3.05
${}^6\text{He} \rightarrow {}^6\text{Li}$ (β^-)	0.82 s	3.22	2.91
${}^{11}\text{C} \rightarrow {}^{11}\text{B}$ (β^+)	20.42 m	0.99	3.59
${}^{18}\text{F} \rightarrow {}^{18}\text{O}$ (β^+)	1.78 h	0.64	3.57

Si vede come, nonostante l'enorme differenza nelle vite medie effettive, la quantità $F\tau$ (chiamata vita media di riferimento) ha lo stesso ordine di grandezza, circa 10^3 in tutti i casi. Queste transizioni sono chiamate "superpermesse".

Per nuclei di numero di massa A medio gli elementi di matrice S_{if} dovranno essere più piccoli che nel caso di nuclei leggeri per il fatto che esistono più neutroni che protoni e gli stati quantici del nucleone che transisce da protone a neutrone o viceversa non

saranno identici. Il valore della quantità $F \cdot \tau$ vale in questo caso circa 10^5 e le transizioni vengono chiamate "premesse"

Esistono alcune regole di selezione riguardanti la conservazione del momento angolare e della parità per i decadimenti beta delle transizioni permesse.

Secondo la regola di selezione di Fermi, le transizioni permesse comprendono transizioni beta che lasciano il momento angolare e la parità del nucleo immutate: $\Delta J=0$, $P_f=P_i$.

Nella regola di selezione di Gamow-Teller la parità del nucleo resta immutata, ma il cambio di momento angolare soddisfa le relazione: $\Delta J=0, \pm 1$ (con l'eccezione $0 \rightarrow 0$)

La regola di selezione della parità discende dal fatto che, per parità intrinseche P_f e P_i differenti, si avrebbe: $S_{if} = \int u_f^* u_i d\tau = 0$

Circa la relazione su ΔJ , essa può essere compresa dal seguente argomento: l'elettrone ed il neutrino, uscendo dal nucleo, sono emessi con alta probabilità in onda s ($\ell = 0$): infatti, un ragionamento semiclassico ci dice che il momento angolare è dato da: $L = \hbar \sqrt{\ell(\ell + 1)} \approx p b \leq p R$, dove R è il

raggio del nucleo e rappresenta il massimo parametro d'urto. Si ricava

$$\sqrt{\ell(\ell + 1)} \leq \frac{p \cdot R}{\hbar} = \frac{m_e \beta \cdot R}{\hbar} \approx \frac{m_e R}{\hbar} \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \ell = 0 \quad (\text{essendo } \beta \approx 1)$$

Se il momento angolare orbitale della coppia elettrone-neutrino è $\ell = 0$, essendo entrambi fermioni a spin 1/2, il momento angolare totale della coppia può essere solo $J=0$ oppure $J=1$. Pertanto nel decadimento beta la variazione di momento angolare tra nucleo padre e figlio sarà:

$\Delta J = 0$ (regola di selezione di Fermi)

$\Delta J = \pm 1$ (ma non $0 \rightarrow 0$) (regola di selezione di Gamow-Teller).

Vale la pena di notare che questa non è un vera e propria regola di selezione, in quanto sono possibili, anche se improbabili, valori di $\ell > 0$, e quindi variazioni $|\Delta J| > 1$.

Esempio di una pura transizione di Fermi è dato dal decadimento dello $^{14}\text{O}(0^+ \rightarrow 0^+)$;

esempio di una pura transizione di Gamow-Teller è invece $^6\text{He}(0^+ \rightarrow 1^+)$. Il decadimento beta del neutrone ($\frac{1}{2}^+ \rightarrow \frac{1}{2}^+$) è un esempio di transizione mista. Transizioni proibite con

elevato valore di $F \cdot \tau$ sono caratterizzate da una violazione delle regole di selezione. Maggiore è il valore della costante $F \cdot \tau$, maggiore è la violazione delle regole di

selezione. Per esempio la transizione beta $^{137}\text{Cs} \rightarrow ^{137}\text{Ba}$ accompagnata da una differenza di momento angolare $\Delta J = 7/2 - 3/2 = 2$, corrisponde a $F \cdot \tau = 4 \cdot 10^9 \text{s}$. La transizione

$^{14}\text{C} \rightarrow ^{14}\text{N}$ ha un valore di $F \cdot \tau = 10^9 \text{s}$, pur essendo $\Delta J = 1$. In questo caso però i nuclei ^{14}C ed ^{14}N hanno parità opposta.. La transizione $^{10}\text{Be} \rightarrow ^{10}\text{B}$ ha un valore $\Delta J = 3$ ed un valore

$F \cdot \tau = 5 \cdot 10^{13} \text{s}$, mentre la transizione $^{40}\text{K} \rightarrow ^{40}\text{Ca}$, per la quale $\Delta J = 4$, presenta un valore di

$F \cdot \tau = 10^{18} \text{s}$.

5.5 Parità

Il concetto di parità della funzione d'onda nacque con la prima formulazione della meccanica quantistica (Wigner, 1927). Le prime applicazioni della meccanica quantistica erano associate ad interazioni forti (decadimento alfa) ed elettromagnetiche (struttura atomica) e venivano descritte dalla equazione di Schroedinger.

L'Hamiltoniana ha la forma:

$$H = -\sum_i \frac{\hbar^2}{2m_i} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_i^2} \right) + \sum_{j,k} U(x_{jk}, y_{jk}, z_{jk})$$

dove il primo termine rappresenta l'operatore energia cinetica, ed il secondo descrive l'energia potenziale del sistema. Si vede facilmente che entrambi i termini sono simmetrici rispetto alla inversione delle coordinate

$$x_i \rightarrow -x_i \quad y_i \rightarrow -y_i \quad z_i \rightarrow -z_i$$

o, in coordinate polari:

$$r_i \rightarrow r_i \quad \theta_i \rightarrow \pi - \theta_i \quad \varphi_i \rightarrow \pi + \varphi_i$$

Infatti nel primo termine le coordinate compaiono al quadrato, mentre nel secondo termine compaiono solo le distanze relative delle particelle che non cambiano con l'inversione delle coordinate. Naturalmente la funzione d'onda ψ , che è soluzione dell'equazione di Schroedinger, deve anch'essa essere simmetrica rispetto alla inversione delle coordinate. Ciò significa che la probabilità $P(V,t)$ di trovare una particella in un volume V all'istante t non deve dipendere dal fatto che la misura è effettuata in un sistema destrorso (x,y,z) o sinistrorso $(-x,-y,-z)$:

$$P(V, t) = \int_V |\psi(x, y, z)|^2 dV = \int_V |\psi(-x, -y, -z)|^2 dV$$

Al limite, per $V \rightarrow 0$:

$$|\psi(x, y, z)|^2 = |\psi(-x, -y, -z)|^2$$

ossia:

$$|\psi(x, y, z)| = |\psi(-x, -y, -z)|$$

due funzioni complesse ψ_1 e ψ_2 con lo stesso modulo differiscono solo per un fattore di fase $\exp(i\alpha)$: l'operatore $\exp(i\alpha)$ rappresenta proprio la trasformazione:

$$x \rightarrow -x \quad y \rightarrow -y \quad z \rightarrow -z$$

Se si applica due volte consecutive l'operatore $\exp(i\alpha)$ si torna alla ψ originaria. Pertanto $\exp(2i\alpha) = 1$, e quindi $\exp(i\alpha) = \pm 1$.

Allora:

$$\psi(-x, -y, -z) = \exp(i\alpha) \cdot \psi(x, y, z) = \pm \psi(x, y, z).$$

Le funzioni d'onda sono divise in due classi: pari e dispari. Pari sono quelle che non cambiano segno per inversione degli assi coordinati, dispari quelle che cambiano segno.

Una proprietà notevole di molti sistemi quantistici è la conservazione della parità. Per provarlo supponiamo che una funzione d'onda $\psi(x,y,z,t)$ sia pari all'istante t , e dimostriamo che essa è anche pari all'istante $t+\tau$. Scriviamo:

$$\psi(t+\tau) = \psi(t) + \tau \frac{d\psi}{dt} + \frac{1}{2} \tau^2 \frac{d^2\psi}{dt^2} + \dots$$

Arrestiamoci al primo termine, generalizzeremo successivamente.

$\psi(t)$ è pari per definizione, mentre $\frac{d\psi}{dt}$ è pari perché $\psi(t)$ soddisfa all'equazione di

Schrodinger: $H\psi(t) = \frac{i}{\hbar} \frac{d\psi}{dt}$, che ha una hamiltoniana simmetrica per inversione degli

assi. Si può generalizzare per la deriva seconda, essendo $\frac{d^2\psi}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\psi}{dt} \right)$ e per tutte le

derivate successive. Pertanto, se l'Hamiltoniana del sistema è invariante per inversione delle coordinate, la parità è un integrale del moto per un sistema isolato. E' stato provato sperimentalmente che le interazioni forti e quelle elettromagnetiche conservano la parità. Quando nel 1934 Fermi costruì la sua teoria sul decadimento beta assunse implicitamente che la parità si conservasse anche nelle interazioni deboli (decadimento beta). Invece, a distanza di più di vent'anni, nel 1956 Lee e Yang mostrarono (a seguito di un risultato inaspettato in un esperimento sulle particelle K) che era possibile costruire una teoria del decadimento beta che non tenesse conto della conservazione della parità. L'anno successivo Wu verificò sperimentalmente la non conservazione della parità nel decadimento beta del ^{60}Co .

Per un sistema di due particelle non interagenti, la funzione d'onda si scrive nel seguente modo:

$$\Psi_{A+B} = \psi_A \cdot \psi_B \cdot \psi_{\ell_A} \cdot \psi_{\ell_B}$$

dove ψ_A e ψ_B descrivono lo stato intrinseco delle particelle A e B, mentre ψ_{ℓ_A} e ψ_{ℓ_B} descrivono il moto relativo di A e B rispetto al centro di massa comune. Pertanto la parità del sistema sarà data da:

$$P_{A+B} = P_A \cdot P_B \cdot P_{\ell_A} \cdot P_{\ell_B}$$

Dalla meccanica quantistica sappiamo che il moto relativo è descritto da una funzione d'onda del tipo:

$$R(r) \cdot P_{\ell}^m(\cos \vartheta) \cdot e^{im\varphi}$$

La struttura di $P_{\ell}^m(\cos \vartheta)$ è tale che risulta:

$$P_{\ell}^m(\cos \vartheta) = (-1)^{\ell-m} \cdot P_{\ell}^m(-\cos \vartheta)$$

Pertanto, come risultato di una inversione degli assi si ha che:

$$\psi_1 = R(r) \cdot P_{\ell}^m(\cos \vartheta) \cdot e^{im\varphi}$$

si trasforma in:

$$\psi_2 = R(r) \cdot P_{\ell}^m(-\cos \vartheta) \cdot e^{im(\pi+\varphi)} \text{ ossia:}$$

$$\psi_2 = R(r) \cdot P_{\ell}^m(\cos \vartheta) \cdot (-1)^{\ell-m} \cdot e^{im\varphi} \cdot (-1)^m = \psi_1 \cdot (-1)^{\ell}$$

Da questo si ricava che la parità della funzione d'onda del moto relativo è data da:

$$P_{\ell} = (-1)^{\ell}$$

La parità del sistema sarà allora:

$$P_{A+B} = P_A \cdot P_B \cdot (-1)^{\ell_A} \cdot (-1)^{\ell_B} \quad (1)$$

La generalizzazione al caso di più di due particelle è ovvia.

Come esempio prendiamo un nucleo atomico, composto da A nucleoni. Vedremo più avanti che nel modello a particelle indipendenti i nucleoni all'interno del nucleo sono considerati non interagenti: quindi la parità del sistema è data da una relazione simile alla (1), generalizzata per A particelle. Poiché il numero di nucleoni nelle reazioni nucleari si conserva, possiamo definire arbitrariamente la loro parità intrinseca: diciamo che sia positiva. La parità di un sistema di nucleoni è allora data da:

$$P_{\text{tot}} = (-1)^{\sum \ell_i}, \text{ dove } \ell_i \text{ è il momento angolare orbitale dello } i\text{-esimo nucleone.}$$

Vediamo ora quali grandezze in fisica sono intrinsecamente grandezze pari e grandezze dispari.

Vettori polari. Le componenti di un generico vettore di posizione \mathbf{r} cambiano segno per inversione delle coordinate, quindi esso è una grandezza dispari. Un vettore dispari è chiamato anche vettore polare o semplicemente vettore. Sono vettori polari (e quindi grandezze dispari) le altre grandezze vettoriali ottenute dal vettore posizione per derivazione rispetto al tempo e per moltiplicazione per una costante: velocità, accelerazione, campo elettrostatico, ..

Vettori assiali. Consideriamo il momento angolare orbitale $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$. Sia \mathbf{r} che \mathbf{p} sono vettori polari, e quindi dispari: il loro prodotto è una grandezza pari, come tutti i vettori assiali. Per analogia, anche lo spin è un vettore assiale e quindi pari. I vettori assiali vengono denominati anche pseudovettori.

Scalari. Il lavoro $L = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s}$ è espresso dal prodotto di due vettori polari, quindi è una grandezza pari. Tutte le grandezze scalari sono pari.

Pseudoscalari Il prodotto scalare tra un vettore assiale ed uno polare invece cambia segno per inversione delle coordinate ed è quindi una grandezza dispari. Tra le grandezze pseudoscalari ricordiamo per esempio l'elicità h , definita come segue:

$$h = \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{p\sigma}$$

5.6 La non conservazione della parità nel decadimento beta e l'esperimento di Wu

Durante l'analisi di un esperimento sulle proprietà dei mesoni K nel 1956 fu trovato che in alcuni schemi di decadimento essi si comportavano come particelle dispari, in altri casi come particelle pari: la legge di conservazione della parità veniva violata durante la disintegrazione dei mesoni K . Poiché il valore della costante g che caratterizza il decadimento dei K è prossima alla costante g del decadimento beta, si ipotizzò che la parità potesse non essere conservata anche nel decadimento beta. Nello stesso anno Lee e Yang mostrarono che, accanto alla teoria del decadimento beta basata sulla conservazione della parità, era possibile costruire un'altra teoria del decadimento beta che non tenesse conto della conservazione della parità. Secondo Lee e Yang la non conservazione della parità poteva essere osservata nel decadimento beta di nuclei

polarizzati. L'esperimento fu realizzato l'anno successivo da Wu e collaboratori che misurarono la distribuzione angolare degli elettroni emessi da nuclei polarizzati di ^{60}Co . Vediamo ora brevemente perchè è necessario che il nucleo emettitore sia polarizzato. Abbiamo visto che per una funzione d'onda a parità definita deve risultare:

$$|\psi(x, y, z)|^2 = |\psi(-x, -y, -z)|^2$$

ossia, in coordinate polari:

$$|\psi(r, \vartheta, \varphi)|^2 = |\psi(r, \pi - \vartheta, \pi + \varphi)|^2$$

così, per la conservazione della parità, un particella deve avere la stessa probabilità di essere emessa ad un angolo ϑ e ad un angolo $\pi - \vartheta$ rispetto ad una definita direzione nello spazio (asse z). In altre parole, l'espansione della funzione

$$f(\vartheta) = a + b \cos \vartheta + c \cos^2 \vartheta + \dots$$

non deve contenere potenze dispari di $\cos \vartheta$. $f(\vartheta)$ rappresenta la distribuzione angolare delle particelle e corrisponde sperimentalmente al numero di particelle rivelate entro un angolo $\Delta\vartheta$ attorno alla direzione θ . Naturalmente bisogna fissare un sistema di riferimento rispetto al quale definire l'angolo θ : basta a questo scopo definire l'asse z, in quanto gli assi x e y si fissano automaticamente nello spazio (a meno di un angolo φ) in quanto devono essere perpendicolari tra di loro ed entrambi perpendicolari all'asse z. L'asse z deve avere un significato fisico: esso coincide con la direzione ed il verso dello spin nucleare. Nell'esperimento Wu dovette quindi individuare la direzione dello spin del ^{60}Co : questo fu possibile sottoponendo i nuclei ad un intenso campo magnetico in modo che i loro spin si orientassero lungo il campo magnetico che fissava in pratica l'asse z del sistema di riferimento. I dati raccolti nell'esperimento mostrarono che la distribuzione angolare delle particelle beta rispetto alla direzione dello spin nucleare del ^{60}Co potevano essere descritti da una funzione del tipo:

$$f(\vartheta) = A \cdot (1 + a \cos \vartheta) \quad \text{con } a < 1$$

La presenza di una potenza dispari di $\cos \vartheta$ indica inequivocabilmente la non conservazione della parità nel decadimento beta.

Vediamo in dettaglio come si è arrivati alla evidenza sperimentale della non conservazione della parità.

La non conservazione della parità nel decadimento beta è messa in evidenza dalla misura di quantità pseudoscalari, quali: $\left\langle \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{I}}{pI} \right\rangle$ dove \mathbf{p} è la quantità di moto di un

elettrone emesso da un nucleo di spin \mathbf{I} .

Consideriamo il decadimento del Cobalto 60: $^{60}_{27}\text{Co} \rightarrow ^{60}_{28}\text{Ni} + e^- + \bar{\nu}$ illustrato in figura 5.6. Lo stato eccitato 4^+ decade tramite l'emissione di due fotoni di radiazione di quadrupolo elettrico E2 prima al livello 2^+ e poi allo stato fondamentale 0^+ . La non conservazione della parità viene messa in evidenza dalle caratteristiche dell'emissione dei β rispetto alla direzione dello spin del nucleo ^{60}Co . Condizione essenziale per

l'osservazione è che i nuclei di cobalto sianopolarizzati, ossia che i loro spin siano orientati (prevalentemente) lungo un'unica direzione (asse z).

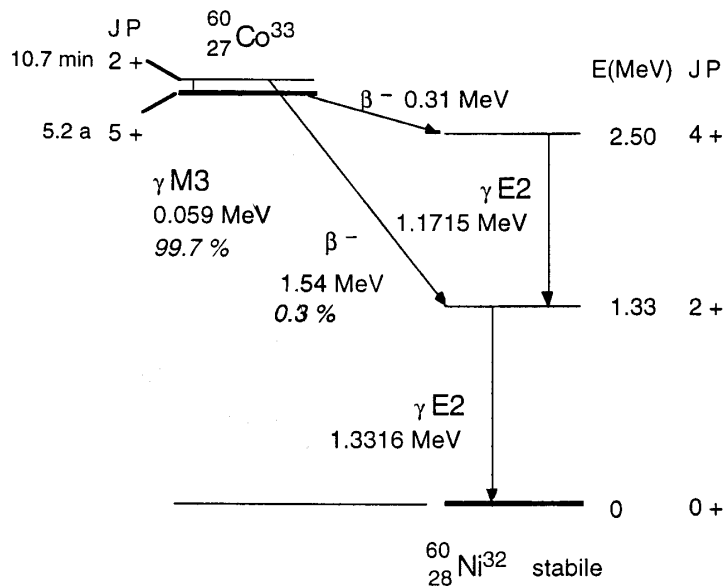


Figura 5.6 Schema di decadimento del ^{60}Co

Un campione di ^{60}Co è collocato, sotto vuoto, all'interno di un criostato ed è immerso in un campo magnetico (2 Tesla), le cui linee di forza individuano l'asse z. Rivelatori per fotoni (NaI) e per elettroni sono posti attorno al campione, rispettivamente ad angoli polari $\vartheta=0$ e $\vartheta=\pi/2$ (fotoni) e $\vartheta=0$ e $\vartheta=\pi$ (elettroni). I rivelatori di γ consentono di misurare il grado di polarizzazione tramite una misura del grado di anisotropia della radiazione emessa. Per un campione totalmente polarizzato ci si aspetta che la radiazione γ sia emessa con la distribuzione angolare di figura 5.7

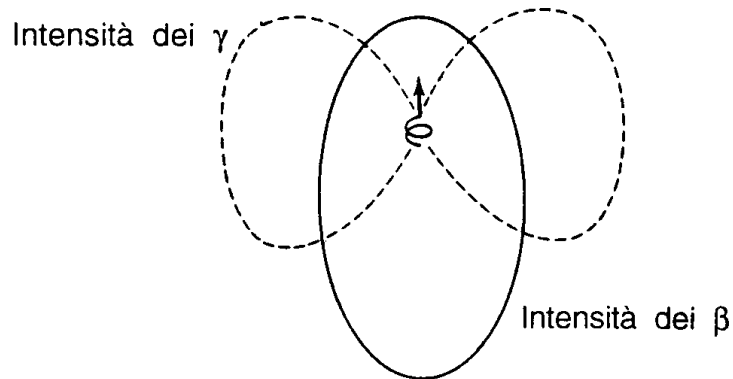


Figura 5.7 distribuzione angolare dei β e dei γ nel decadimento del ^{60}Co

Infatti la radiazione di quadrupolo elettrico E2 ha una dipendenza angolare del tipo:
 $P(\vartheta) \propto (1 - \cos^4 \vartheta)$

La quantità studiata sperimentalmente è la frequenza dei β per due orientazioni opposte:
 $\vartheta=0$ e $\vartheta=\pi$. Le osservazioni sperimentali sono riassunte in figura 5.8

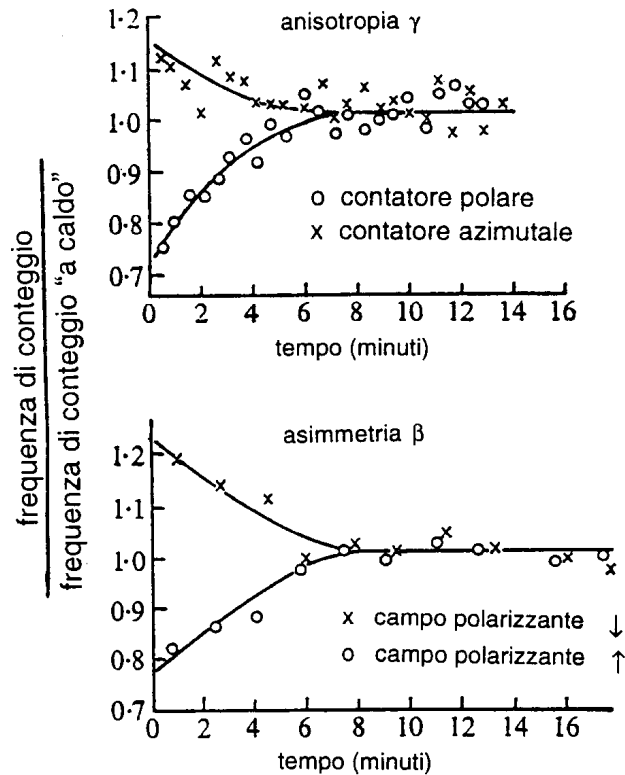


Figura 5.8 anisotropia γ e asimmetria β in funzione del tempo, ossia del valore di polarizzazione dei nuclei di cobalto

Chiamiamo ϑ l'angolo fra la direzione di emissione di un β e lo spin del nucleo. Sia $\Delta P(\vartheta) = F(\vartheta) \Delta \Omega$ la probabilità che i β siano emessi entro un piccolo angolo solido $\Delta \Omega$ lungo la direzione ϑ . I dati di figura 5.8 indicano chiaramente che: $\Delta P(\pi) > \Delta P(0)$.

Si vede quindi che, in caso di polarizzazione della sorgente, è presente una asimmetria nell'emissione dei β . Poichè l'emissione è più probabile per $\vartheta=\pi$, risulta: $\left\langle \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{I}}{pI} \right\rangle < 0$

Questo indica che nel decadimento β (e in genere nelle interazioni deboli) la parità non si conserva. La non conservazione della parità significa che accanto all'esperimento reale non si possono realizzare in natura esperimenti "speculari", come schematizzato in figura 5.9, dove la direzione dello spin dei nuclei di ^{60}Co (ossia del loro momento magnetico) è schematizzata come una spirale percorsa da corrente: le immagini speculari rispettano il verso della corrente, esattamente come se le spire fossero viste in

altrettanti specchi. Anche l'emissione anisotropa dei β è riportata coerentemente nelle immagini speculari *b* e *c*

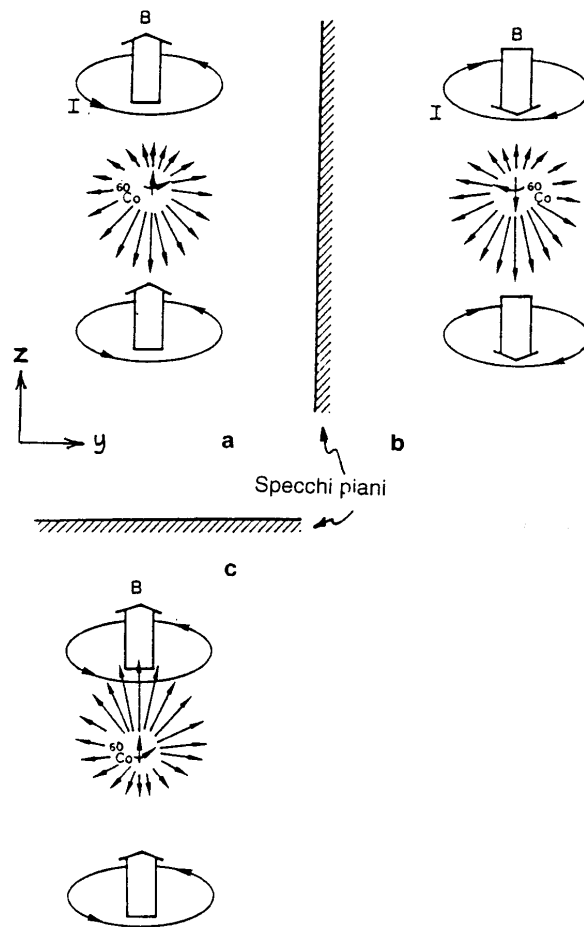


Figura 5.9 non conservazione della parità nel decadimento β

L'immagine *a* rappresenta l'esperimento reale, le immagini *b* e *c* rappresentano invece altrettanti esperimenti "speculari". Si vede immediatamente che l'asimmetria dei β nelle immagini *b* e *c* non corrisponde ad una situazione reale, nel senso che la relazione

$$\left\langle \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{I}}{pI} \right\rangle < 0 \text{ non è più vera nei casi } b \text{ e } c, \text{ dove invece risulterebbe } \left\langle \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{I}}{pI} \right\rangle > 0$$

Capitolo 6

L'emissione gamma

6.1 Emissione gamma

La radiazione γ è l'emissione spontanea di quanti da parte del nucleo. Emittendo fotoni il nucleo passa da uno stato eccitato ed uno stato meno eccitato. Vi possono essere transizioni radiative singole, quando il nucleo emette un solo quanto γ e transisce allo stato fondamentale, oppure transizioni in cascata quando l'energia di eccitazione è rimossa tramite l'emissione in cascata di due o più fotoni. La radiazione elettromagnetica nucleare ha un lunghezza d'onda dell'ordine delle dimensioni del nucleo, e pertanto:

$$\lambda = \frac{\hbar}{p_\gamma} \approx R \quad p_\gamma = E_\gamma \approx \frac{\hbar}{R} = \frac{\hbar}{r_0 A^{1/3}}$$

Si vede che per nuclei leggeri l'energia E_γ dei fotoni vale qualche MeV, e diminuisce al crescere di A . Il fotone porta via praticamente tutta l'energia di eccitazione, essendo trascurabile l'energia cinetica di rinculo del nucleo.

$$0 = \mathbf{P}' + \mathbf{p}_\gamma \rightarrow \mathbf{P}' = -\mathbf{p}_\gamma \quad T' = \frac{p'^2}{2M} = \frac{E_\gamma^2}{2Mc^2}$$

si vede che per $E_\gamma \approx \text{MeV}$, per $10 < A < 100$ si ha: $5 \text{ eV} < T' < 50 \text{ eV}$. Vi sono diverse ragioni per le quali un nucleo può trovarsi in uno stato eccitato. Per esempio, spesso a seguito di un decadimento α o β il nucleo figlio non viene creato nello stato fondamentale, ma in uno stato eccitato: esso transisce allo stato fondamentale tramite l'emissione di uno o più quanti γ . Per questo motivo non esistono puri emettitori α ed esistono solo pochissimi emettitori β puri. Un nucleo eccitato emette fotoni quando l'energia di eccitazione non è sufficiente a separare un nucleone dal nucleo (circa 7-8 MeV), e l'unico modo che esso ha per "liberarsi" dell'eccesso di energia è appunto l'emissione di quanti gamma. Se invece l'energia di eccitazione è superiore alla energia di separazione di un nucleone, solo in rari casi il nucleo si diseccita per via elettromagnetica, e questo avviene quando l'emissione di un nucleone è vietata da regole di conservazione della parità o del momento angolare. I quanti gamma emessi dal nucleo possono portare via diversi valori del momento angolare ℓ : la radiazione che possiede $\ell=1$ viene chiamata radiazione di dipolo, quella con $\ell=2$ di quadrupolo, quella con $\ell=3$ di ottupolo, e così via. Non esiste radiazione elettromagnetica con $\ell=0$ (monopolo) a causa della sua natura trasversa. Ciascuna di queste radiazioni è caratterizzata da un diversa distribuzione angolare. I quanti gamma di diversa multipolarità sono il risultato di diversi tipi di "oscillazioni" del fluido nucleare, sia elettriche che magnetiche. Il primo tipo di processo è causato da una ridistribuzione della carica elettrica nel nucleo, mentre il secondo da una ridistribuzione degli spin e dei momenti angolari orbitali dei

nucleoni. Una idea più chiara del meccanismo di emissione gamma può essere fornita sulla base di un modello specifico del nucleo: così, vedremo che nel modello a particelle indipendenti (modello a shell) l'emissione di un quanto gamma è associata alla transizione di un nucleone tra due livelli a particella singola, avendo il fotone emesso il proprio valore di energia e momento angolare.

A causa del piccolo valore della costante di interazione elettromagnetica

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137} \ll 1$$

la probabilità P di una transizione radiativa può essere calcolata con la teoria delle perturbazioni dipendenti dal tempo con la solita regola d'oro:

$$P = \frac{2\pi}{\hbar} |M_{if}|^2 \frac{dn}{dE}$$

dove $M_{if} = \int \psi_f^* H' \psi_i d\tau$ è l'elemento di matrice dell'Hamiltoniana H' di interazione tra il campo elettromagnetico da una parte, e le cariche ed i momenti magnetici dei nucleoni dall'altra. La teoria elettromagnetica può essere usata per scrivere le espressioni di H' e della densità degli stati finali dn/dE per cui, note ancora dalla teoria (per esempio dal modello a shell) le funzioni d'onda del nucleo, si può calcolare la probabilità di transizione P . Qui noi accenniamo solo brevemente ed in maniera approssimata alle conclusioni che se ne possono trarre. Il campo di radiazione delle cariche in movimento può essere rappresentato come una serie di funzioni (armoniche) sferiche. La parte angolare descrive la multipolarità della transizione, mentre la parte radiale viene rappresentata come uno sviluppo in serie della variabile kr , essendo $k = h/p$ il numero d'onda. Ora, poiché:

$$kr = \frac{r}{\lambda} \approx \frac{R}{\lambda} = \frac{p_\gamma}{h} R = \frac{E_\gamma}{2\pi\hbar c} R \approx 10^{-3} \div 10^{-4} \quad (\text{per } E_\gamma \approx \text{MeV e } R \approx 10 \text{ fm})$$

la serie converge rapidamente.

Il fattore R/λ nel primo termine della serie, corrispondente alla radiazione di dipolo con momento angolare $\ell=1$; qui R è il raggio del nucleo e λ la lunghezza d'onda della radiazione emessa. Il secondo termine con $\ell=2$ corrisponde a $(R/\lambda)^2$, e lo ℓ -esimo termine a $(R/\lambda)^\ell$.

Poiché la probabilità P di emissione di un quanto gamma è proporzionale a $|M_{if}|^2$, la probabilità P_ℓ di emissione di un quanto gamma di multipolarità ℓ sarà:

$$P_\ell \propto (R/\lambda)^{2\ell} \propto A^{2\ell/3} E^{2\ell}$$

Così, come ℓ cresce di un'unità, l'intensità di radiazione decresce di un fattore

$$\frac{P_{\ell+1}}{P_\ell} \propto \left(\frac{R}{\lambda}\right)^2 \approx 10^{-5}$$

questo significa che il primo termine non nullo della serie (che può anche non corrispondere a $\ell=1$ a causa delle regole di selezione) è quello decisivo.

Le stesse conclusioni possono essere tratte a proposito dei multipoli magnetici. Per lo stesso valore di ℓ comunque l'intensità della radiazione magnetica è $(d/\mu)^2$ volte più bassa di quella elettrica: qui d e μ rappresentano rispettivamente il momento elettrico e magnetico dei nuclei. Come ordine di grandezza si può dire che:

$$\left(\frac{d}{\mu}\right)^2 \approx \left(\frac{eR}{e\hbar/m_N c}\right)^2 = \left(\frac{m_N c^2 \cdot R}{\hbar c}\right)^2 \approx 10^2 \div 10^3$$

do ve R al solito è il raggio del nucleo e m_N la massa di un nucleone. Le transizioni elettriche e magnetiche vengono indicate con i simboli $E\ell$ ed $M\ell$, dove ℓ sta a indicare il momento angolare del gamma uscente: così si parla di transizioni di dipolo elettrico $E1$ e di dipolo magnetico $M1$, di quadrupolo elettrico $E2$ e quadrupolo magnetico $M2$, di ottupolo elettrico $E3$ e ottupolo magnetico $M3$, di esadecupolo, e così via.

L'insieme di possibili valori di ℓ_E e ℓ_M è determinato dalle regole di selezione del momento angolare e della parità. Secondo la prima regola, il momento angolare portato via dalla radiazione elettromagnetica ed i momenti angolari iniziale e finale dello stato nucleare devono essere legati dalla seguente relazione:

$$|J_i - J_f| \leq \ell \leq J_i + J_f$$

La parità di una transizione elettromagnetica è pari a $(-1)^{\ell_E}$ se la transizione è elettrica, e $(-1)^{\ell_M+1}$ se la transizione è magnetica.

In base al principio di conservazione della parità, i momenti angolari ℓ_E e ℓ_M della radiazione elettrica o magnetica devono essere legati alle parità iniziale (Π_i) e finale (Π_f) dello stato nucleare dalle seguenti relazioni:

$$\Pi_i = \Pi_f \cdot (-1)^{\ell_E} \quad \Pi_i = \Pi_f \cdot (-1)^{\ell_M+1}$$

Da queste regole segue che, per esempio, che transizioni $E1$ sono possibili solo tra stati nucleari a parità opposta, mentre la parità degli stati deve essere la stessa nel caso di transizioni $M1$; in entrambi i casi i momenti angolari del nucleo devono soddisfare la relazione $\Delta J = 0, \pm 1$ (con l'eccezione $0 \rightarrow 0$).

Le regole di selezione della parità possono ovviamente essere ottenute considerando la struttura dell'elemento di matrice

$$M_{if} = \int \psi_f^* H' \psi_i d\tau$$

Nel caso di transizione $E1$, H' contiene il momento di dipolo elettrico, che si trasforma come un vettore polare per inversione delle coordinate; per una transizione $M1$, H' contiene il momento di dipolo magnetico che ha invece le proprietà di un vettore assiale.

Riassumendo quanto detto finora, le caratteristiche principali delle transizioni elettromagnetiche sono:

- 1) una decrescita nella probabilità di transizione al crescere di ℓ ;

2) una relativamente piccola probabilità delle transizioni magnetiche rispetto a quelle elettriche per lo stesso valore di ℓ ;

3) esistenza di regole di selezione del momento angolare e della parità.

Tenendo conto dei punti precedenti, arriviamo alle seguenti conclusioni:

il ruolo dominante nelle transizioni radiative tra due stati nucleari di dati valori di Π_i , Π_f e ΔJ è giocato dai multipoli elettrici e/o magnetici con il più basso valore di ℓ_E e ℓ_M che soddisfino le regole di selezione di parità e momento angolare:

$$\ell = |\Delta J| \quad \text{e} \quad \ell = |\Delta J| + 1$$

Uno di questi multipoli deve essere elettrico, l'altro magnetico.

La tabella seguente riassume la situazione.

$\Pi_i \cdot \Pi_f$	ΔJ			
	0	1	2	3
-1	E1, M2	E1, M2	M2, E3	E3, M4
+1	M1, E2	M1, E2	E2, M3	M3, E4

In genere una delle due transizioni (quella con ℓ più basso) domina largamente sull'altra, data la forte dipendenza della probabilità di transizione dalla multipolarità.

6.2 Conversione interna

Oltre alla emissione di quanti gamma vi è un altro meccanismo di diseccitazione: l'emissione di elettroni di conversione interna. La teoria mostra come l'energia di eccitazione in questo processo è direttamente, senza cioè alcuna emissione intermedia di quanti gamma, trasferita ad un elettrone orbitale (a causa della sovrapposizione spaziale delle funzioni d'onda nucleare ed elettronica). In questo meccanismo vengono emessi elettroni monoenergetici, la cui energia cinetica T_e è determinata, oltre che dalla energia di eccitazione E , anche dall'energia di legame B dell'elettrone nella shell atomica. Il processo di conversione interna ha la più alta probabilità per elettroni della shell K, nel qual caso:

$$T_e = E - B_K$$

Comunque, se $E < B_K$, si può osservare conversione elettronica dalla shell L. In ogni caso il fenomeno di conversione è sempre accompagnato da emissione di raggi X caratteristici della shell atomica interessata ed elettroni Auger.

Gli elettroni di conversione possono essere osservati assieme alla radiazione gamma, oppure senza di essa (p.es. nel caso di transizioni $0 \rightarrow 0$), Il rapporto del numero di elettroni di conversione emessi rispetto al numero di fotoni è detto coefficiente di conversione interna, ed è definito come:

$$\alpha = \frac{N_e}{N_\gamma} = \alpha_K + \alpha_L + \alpha_M + \dots$$

qui $\alpha_K = \frac{(N_e)_K}{N_\gamma}$ è il coefficiente di conversione parziale per gli elettroni della shell

K, e così via. Le teoria mostra che il coefficiente di conversione:

- a) decresce all'aumentare della energia della transizione;
- b) cresce con il numero atomico Z del nucleo;
- c) decresce con il raggio della shell atomica dalla quale l'elettrone è emesso;
- d) cresce con la multipolarità della corrispondente transizione gamma.

6.3 Isomerismo nucleare

Le regole di selezione precedentemente descritte possono rallentare le transizioni elettromagnetiche ad un punto tale che lo stato eccitato viene ad avere una vita media molto lunga (dove "molto lunga" significa da una frazione di secondo a molti anni). In questo caso lo stato eccitato è detto metastabile o stato isomerico, in analogia con gli isomeri chimici. Si hanno in natura transizioni gamma con vite medie che vanno da 10^{-16} a 10^8 secondi, ed il punto da cui si comincia a chiamare uno stato metastabile è piuttosto arbitrario. Spesso l'isomeria nucleare si accompagna alle transizioni beta. Nella figura 6.1a) la transizione isomerica tra i livelli A e B è molto probabile in confronto alla transizione beta tra A e C. Se $\lambda_{iA} \ll \lambda_{iB}$ e $\lambda_{iA} \gg \lambda_{\beta A}$, la sostanza mostra lo spettro beta tipico del livello B con la costante di decadimento λ_{iA} . Il ^{80}Br presenta questo caso, e il suo diagramma di livelli è illustrato in figura 6.2. In altri casi (figura 6.1b) i livelli A e B decadono come sostanze indipendenti. Le transizioni isomeriche, essendo altamente proibite, devono corrispondere a grandi ΔJ e piccole energie: entrambe le condizioni favoriscono una elevata conversione interna. Per essere metastabile, un livello eccitato deve differire dai livelli di energia più bassa per almeno tre unità nel valore di J: la radiazione emessa è quindi E3, M3 o di multipolarità più elevata. La condizione citata è soddisfatta solo per $A \geq 39$, e non si hanno isomeri di elementi leggeri. Anche ad A più elevati, gli stati isomerici nucleari non sono distribuiti uniformemente tra tutti i nuclei, ma sono di preferenza concentrati in "isole" con Z o N dispari proprio al di sotto dei numeri magici 50, 82, 126 ed A pari. Isomeri con N e Z entrambi pari sono molto rari.

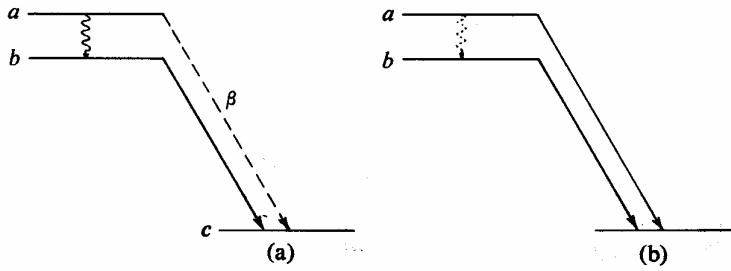


figura 6.1

Un altro esempio di isomerismo nucleare è fornito dal nucleo ^{60}Co , come illustrato in figura 6.3 dove è indicato il livello isomero eccitato a 58.6 keV

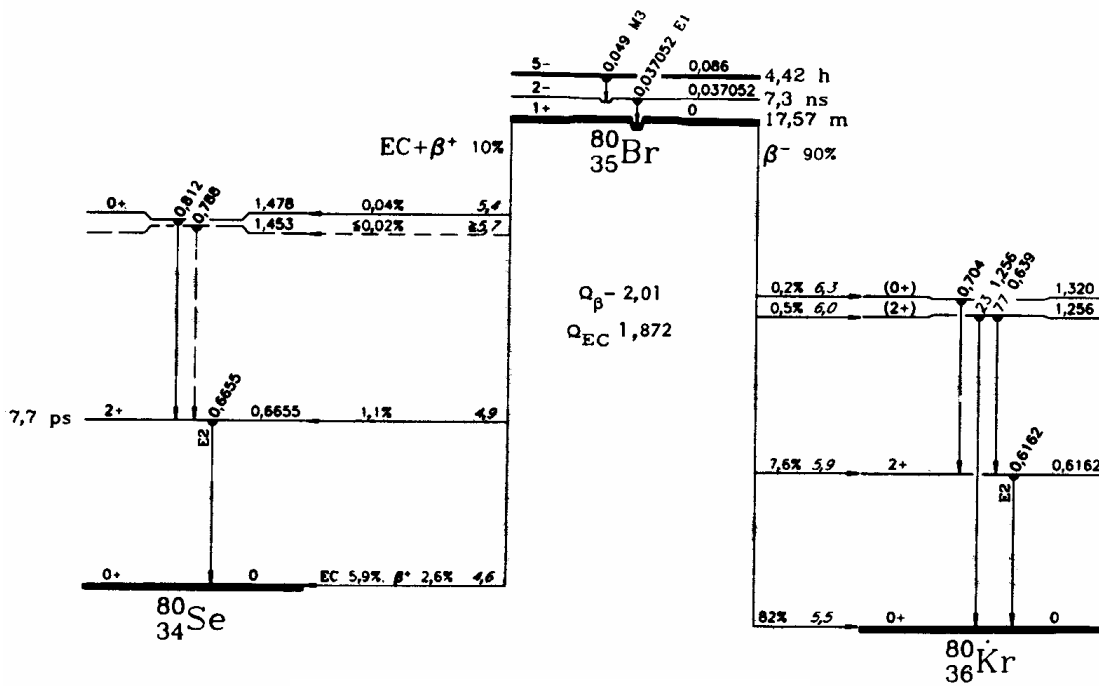


figura 6.2 il diagramma a livelli del ^{80}Br

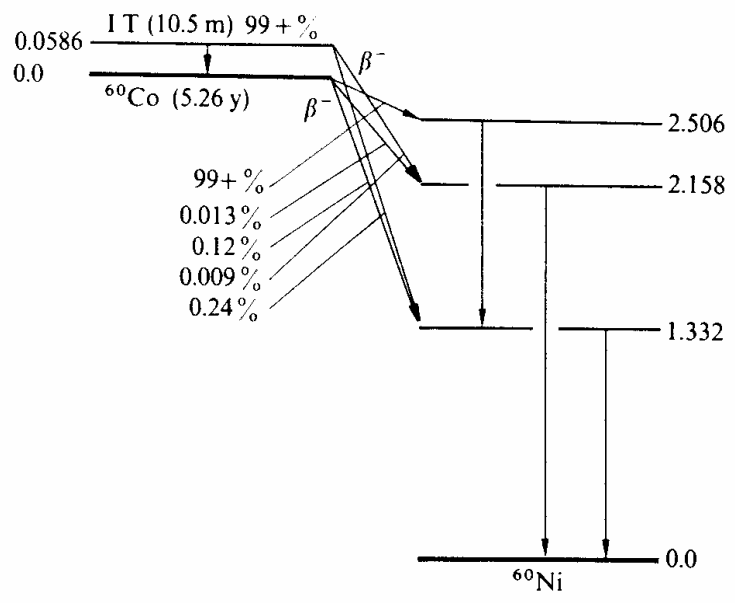


figura 6.3 il diagramma a livelli del ^{60}Co

Capitolo 7

Esercizi sui decadimenti

Esercizio 1

Il $^{24}_{10}\text{Ne}$ decade β^- in $^{24}_{11}\text{Na}$, che a sua volta decade β^- in $^{24}_{12}\text{Mg}$. Lo stato fondamentale del $^{24}_{10}\text{Ne}$ ha momento angolare e parità dati da: $J^\pi = 0^+$. Gli schemi dei livelli dei nuclei $^{24}_{11}\text{Na}$ e $^{24}_{12}\text{Mg}$ sono riportati qui di seguito.

1⁺ _____ 1.346

1⁺ _____ 0.472

4⁺ _____ g.s

$^{24}_{11}\text{Na}$

1⁺ _____ 7.748

3⁻ _____ 7.616

2⁺ _____ 7.349

0⁺ _____ 6.432

4⁺ _____ 6.010

3⁺ _____ 5.235

2⁺ _____ 4.238

4⁺ _____ 4.122

2⁺ _____ 1.368

0⁺ _____ g.s

$^{24}_{12}\text{Mg}$

Dire quali livelli sono raggiungibile dal decadimento beta e indicare lo schema di diseccitazione gamma successiva (compresa la multipolarità delle transizioni).

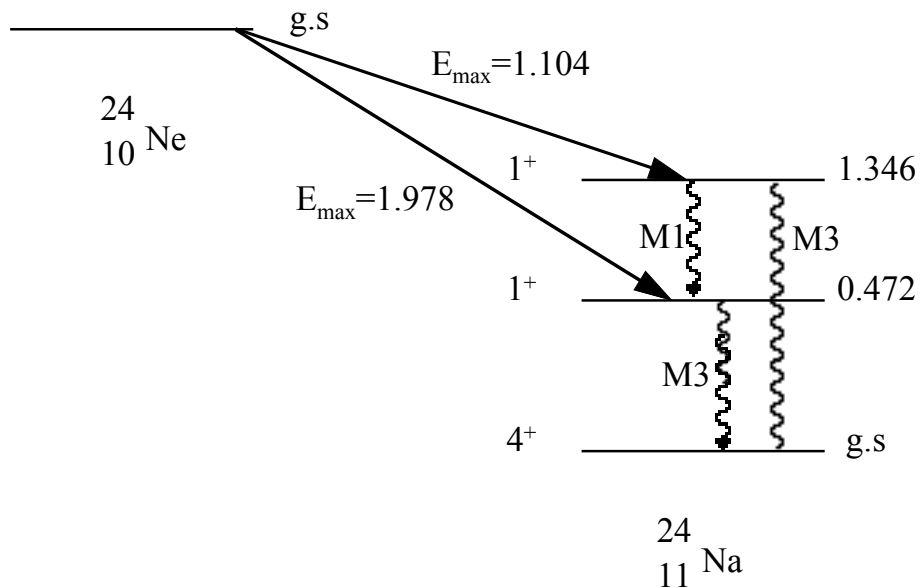
I valori delle masse sono le seguenti:

$$m({}^{24}_{10}\text{Ne})=22348.5 \text{ MeV}/c^2$$

$$m({}^{24}_{11}\text{Na})=22346.05 \text{ MeV}/c^2$$

$$m({}^{24}_{12}\text{Mg})=22340.55 \text{ MeV}/c^2$$

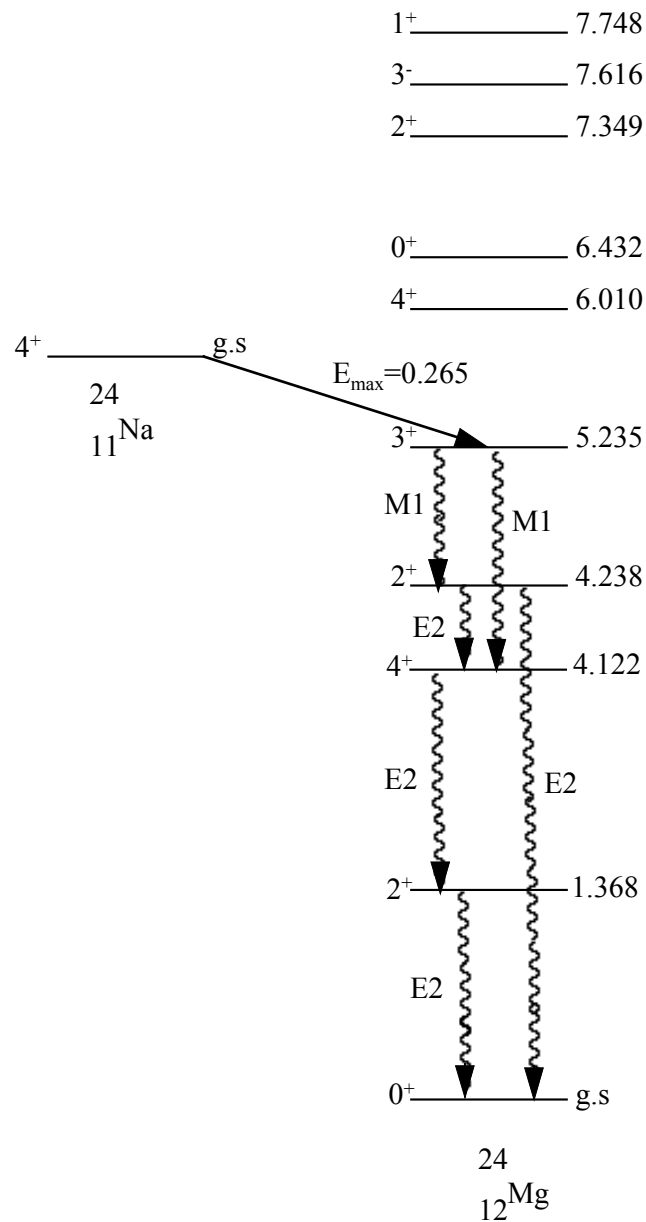
Esaminiamo prima il decadimento ${}^{24}_{10}\text{Ne} \rightarrow {}^{24}_{11}\text{Na}$ e la successiva diseccitazione gamma del ${}^{24}_{11}\text{Na}$.



Le energie massime dei beta sono calcolate dalle differenze tra i valori delle masse dei nuclidi, tenendo conto dell'energia dei livelli eccitati.

Vediamo ora il decadimento $^{24}_{11}\text{Na} \rightarrow ^{24}_{12}\text{Mg}$.

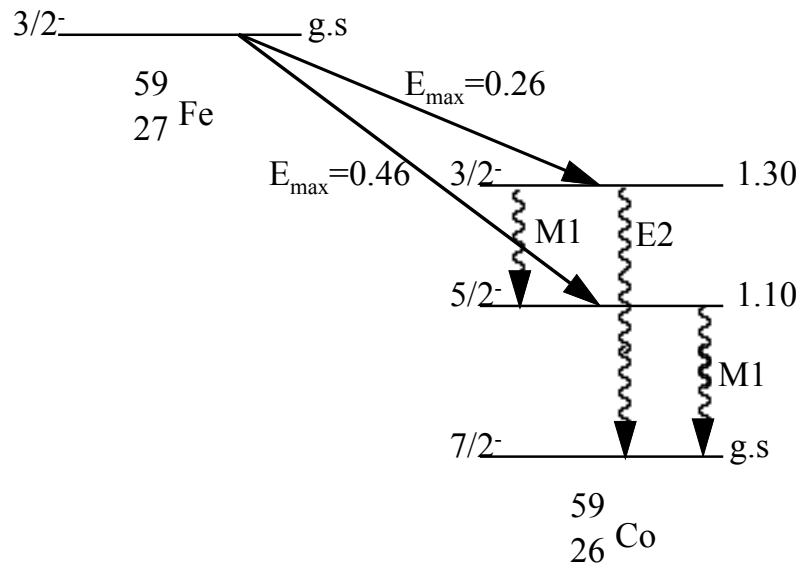
Dalla differenza delle masse, si vede che il livello fondamentale del $^{24}_{11}\text{Na}$ energeticamente si trova appena al di sopra del livello eccitato a 5.235 MeV del $^{24}_{12}\text{Mg}$: pertanto i livelli superiori del $^{24}_{12}\text{Mg}$ non possono essere raggiunti da alcun decadimento beta. Dalle regole di selezione e dalle multipolarità più probabili, ne deriva il seguente schema di decadimento e successiva diseccitazione.



Esercizio 2

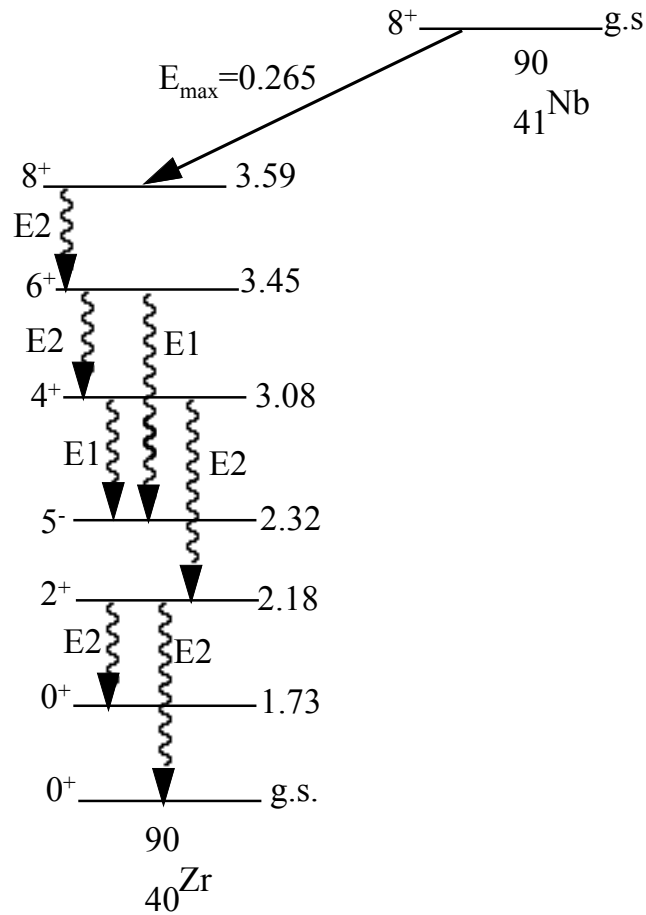
Il nucleo $^{59}_{26}\text{Fe}$ emette due gruppi di β^- di energia massima rispettivamente 0.46 MeV (50%) e 0.26 MeV (50%). Vengono anche osservati raggi gamma con energie di 1.30, 1.10 e 0.2 MeV. Dire quale è lo schema di disintegrazione.

Trattandosi di un decadimento β^- , il nucleo figlio è senz'altro il $^{59}_{27}\text{Co}$. Le masse dei nuclidi sono: $m(^{59}_{26}\text{Fe})= 54894.1 \text{ MeV}/c^2$, e $m(^{59}_{27}\text{Co})=54892.5 \text{ MeV}/c^2$. Lo schema di decadimento è il seguente:



Esercizio 3

Il ${}^{90}_{41}\text{Nb}$ (g.s. 8^+) decade β^+ allo stato eccitato a 3.59 MeV dello ${}^{90}_{40}\text{Zr}$. Dire quale è il previsto schema di decadimento gamma specificando le multipolarità.

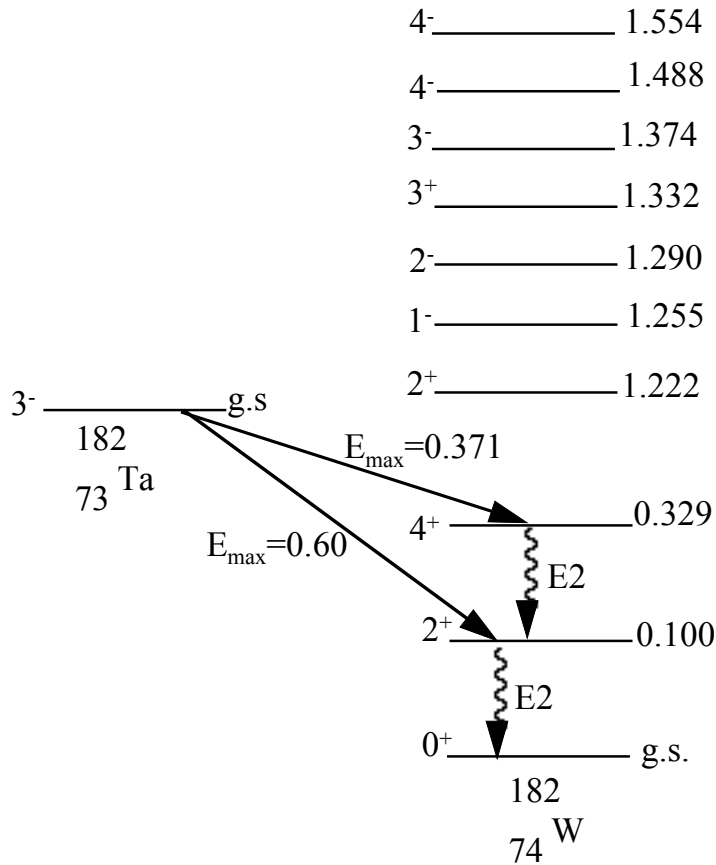


Esercizio 4

Lo schema dei livelli del $^{182}_{74}\text{W}$, nucleo di arrivo nel decadimento β^- del $^{182}_{73}\text{Ta}$ (g.s. 3^-) è rappresentato in figura. Dire quali sono i possibili schemi di decadimento beta e gamma, specificando multipolarità ed energie. Vediamo prima di stabilire i livelli raggiungibili energeticamente.

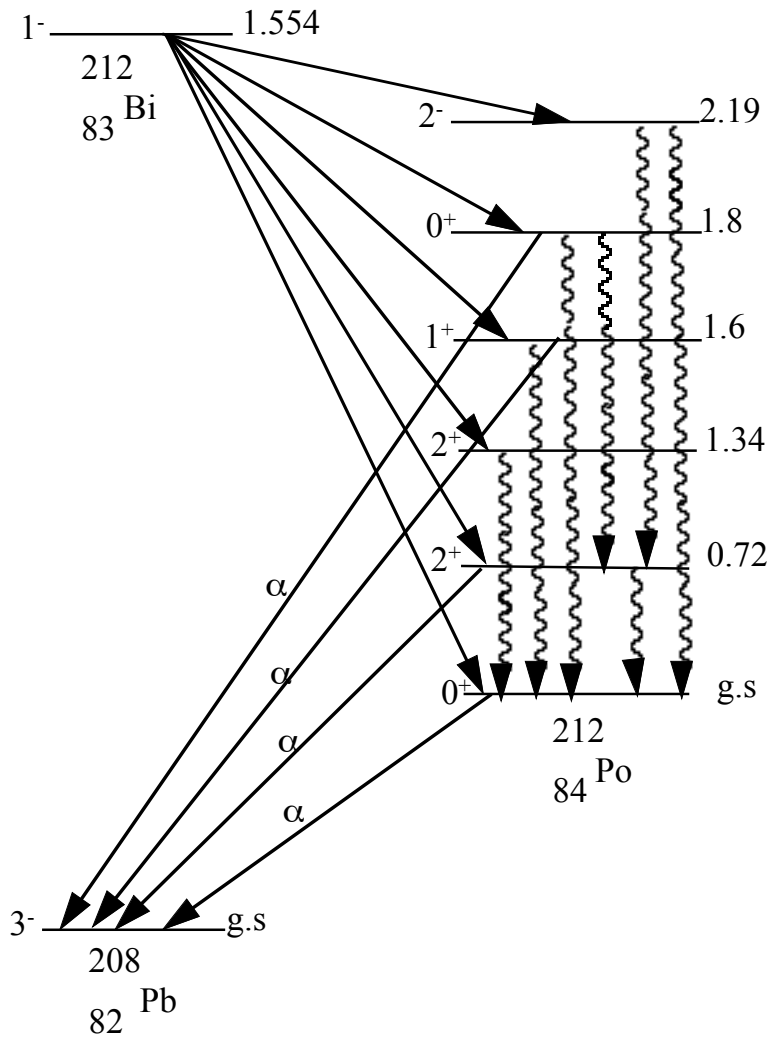
$m(^{182}_{73}\text{Ta})=169472.0 \text{ MeV}/c^2$, $m(^{182}_{74}\text{W})=169471.3 \text{ MeV}/c^2$; $\Delta m= 0.7 \text{ MeV}/c^2$.

Sono quindi energeticamente raggiungibili, oltre al g.s., solo i primi due stati eccitati. Lo schema del decadimento e successiva diseccitazione è quindi il seguente:



Esercizio 5

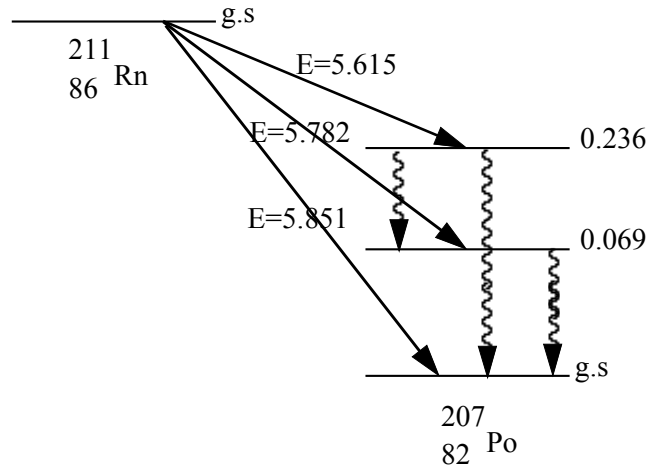
Il $^{212}_{83}\text{Bi}$ decade β^- ai vari stati del $^{212}_{84}\text{Po}$, che a sua volta decade α allo stato fondamentale del $^{208}_{82}\text{Pb}$ secondo lo schema:



Dire quali sono le energie massime degli spettri beta, le energie e le multipolarità dei fotoni emessi e delle alfa emesse.

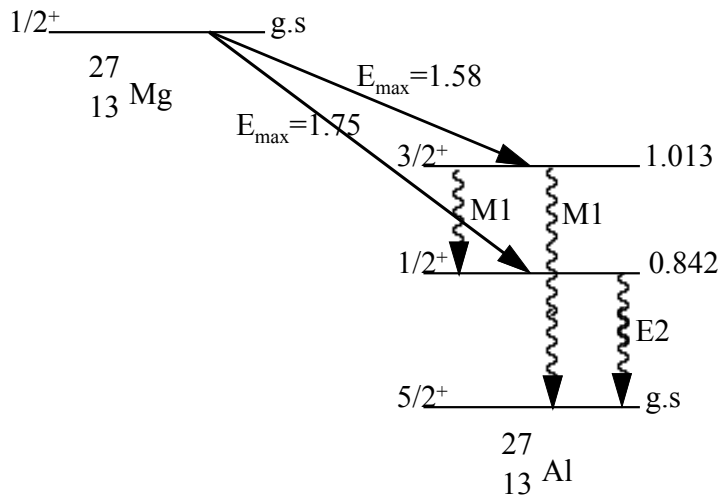
Esercizio 6

Il nuclide $^{211}_{86}\text{Rn}$ emette tre gruppi di α di energia cinetica 5.851, 5.782 e 5.615 MeV rispettivamente; associati con le α vi sono raggi γ di energie 0.069, 0.167 e 0.236 MeV. Costruire lo schema di decadimento in base a questi dati.



Esercizio 7

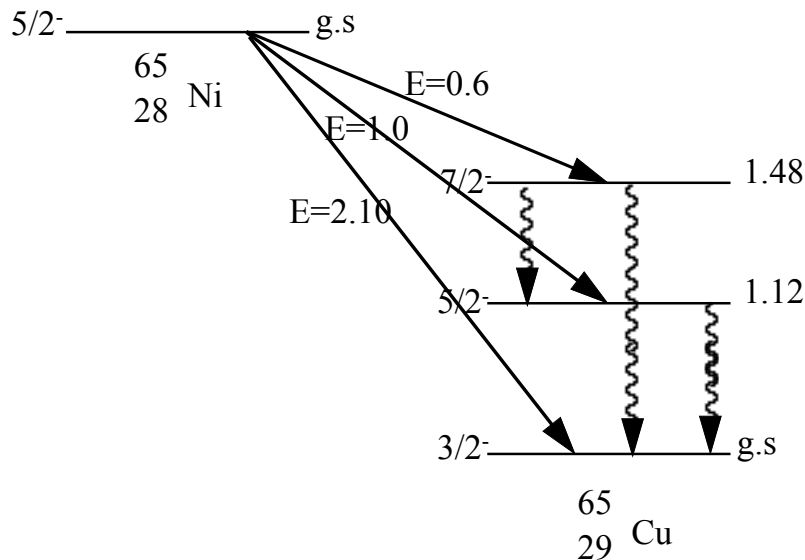
Il $^{27}_{12}\text{Mg}$ decade β^- in $^{27}_{13}\text{Al}$ emettendo due particelle beta di energia massima 1.75 e 1.58 MeV rispettivamente; associati al decadimento vi sono fotoni di energie 1.01, 0.84 e 0.17 MeV. costruire lo schema di decadimento.



Esercizio 8

Il nucleo ${}^{65}_{28}\text{Ni}$ emette tre gruppi di β^- con energie massime rispettivamente 2.10 MeV (57%), 1.0 MeV (14%) e 0.6 MeV (29%). Vengono anche osservati raggi γ con energie 1.48, 1.12 e 0.36 MeV. Dire qual è lo schema di decadimento.

Il ${}^{65}_{28}\text{Ni}$ (di massa $60478.2 \text{ MeV}/c^2$) decade β^- in ${}^{65}_{29}\text{Cu}$ (massa $60476.1 \text{ MeV}/c^2$). La differenza di massa è $\Delta m = 2.1 \text{ MeV}/c^2$; i beta di energia massima 2.1 MeV quindi sono relativi al decadimento diretto allo stato fondamentale: inoltre 2.1 MeV è proprio la somma dell'energia massima beta di 1.0 MeV e della transizione gamma da 1.12 MeV, come pure del decadimento beta da 0.6 MeV e della diseccitazione gamma da 1.48 MeV. Lo schema è quindi il seguente:



Esercizio 9

Il nucleo ${}^{74}_{33}\text{As}$ emette due gruppi di β^- con energie massime rispettivamente 1.35 MeV (51%) e 0.72 MeV (49%) ed emette anche due gruppi di β^+ con energie massime rispettivamente 1.53 MeV (11%) e 0.93 MeV (89%). Vengono anche osservati raggi γ con energie 0.596 MeV e 0.635 MeV. Dire qual è lo schema di decadimento.

$$m({}^{74}_{33}\text{As}) = 68855.40 \text{ MeV}/c^2$$

$$m({}^{74}_{34}\text{Se}) = 68854.05 \text{ MeV}/c^2$$

$$m({}^{74}_{32}\text{Ge}) = 68852.84 \text{ MeV}/c^2$$

ricordiamo che, usando le tavole delle masse atomiche, affinché il decadimento beta sia energeticamente possibile, è necessario considerare le seguenti disuguaglianze:

$${}^A_Z M_N^{\text{atom}} \geq {}^A_{Z+1} M_{N-1}^{\text{atom}} \text{ per decadimento } \beta^-$$

$${}^A_Z M_N^{\text{atom}} \geq {}^A_{Z-1} M_{N+1}^{\text{atom}} + 2m_e \text{ per decadimento } \beta^+$$

L'energia massima degli spettri beta sarà quindi data da:

$$E_{\text{max}} = {}^A_Z M_N^{\text{atom}} - {}^A_{Z+1} M_{N-1}^{\text{atom}} \text{ per decadimento } \beta^-$$

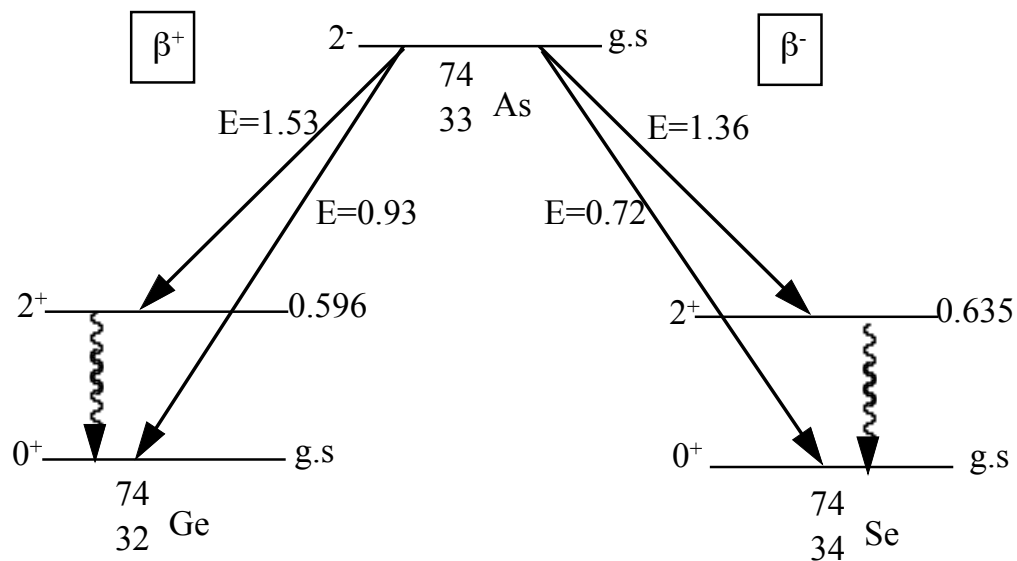
$$E_{\text{max}} = {}^A_Z M_N^{\text{atom}} - {}^A_{Z-1} M_{N+1}^{\text{atom}} - 2m_e \text{ per decadimento } \beta^+$$

Così:

$$\Delta m_{\beta^-} = 1.35 \text{ MeV} \quad E_{\text{max}}^{\beta^-} = \Delta m_{\beta^-} = 1.35 \text{ MeV}$$

$$\Delta m_{\beta^+} = 2.56 \text{ MeV} \quad E_{\text{max}}^{\beta^+} = \Delta m_{\beta^+} - 2m_e = 1.54 \text{ MeV}$$

Pertanto lo schema di decadimento è il seguente:



Capitolo 8

Modelli nucleari a particelle indipendenti

8.1 Generalità

Il modello a goccia fornisce una corretta idea della masse nucleari, delle energie di legame e di altri parametri del nucleo, e rende conto della emissione alfa e beta in termini energetici. Comunque, già abbiamo visto che la sola analogia con la goccia di liquido non era sufficiente a descrivere il nucleo: tanto è vero che abbiamo dovuto introdurre due termini ad hoc, legati in qualche modo alla struttura interna: un termine che tenesse conto della simmetria protoni-neutroni, ed un ulteriore termine che aggiunge una correzione nel caso di nuclei pari-pari, dispari-dispari e pari-dispari. Inoltre il modello a goccia non riesce a descrivere gli stati eccitati del nucleo, alcune proprietà dei decadimenti alfa e beta, e molte altre questioni. Come vedremo in seguito, sono state notate delle conformazioni di nucleoni particolarmente stabili, che ricordano da vicino la struttura degli elettroni negli atomi: certi atomi, caratterizzati da un numero "magico" di elettroni (2, 10, 18, 36, 54, 86) sono particolarmente stabili. Il moderno modello dell'atomo è basato sulla assunzione che gli elettroni si muovono indipendentemente in un potenziale centrale. Per analogia, possiamo assumere che la periodicità nelle proprietà dei nuclei sia spiegata con un modello a particelle indipendenti. In verità, essendo i nucleoni soggetti ad una interazione forte, ed avendo in materia nucleare un libero cammino medio minore delle dimensioni del nucleo, resta difficile immaginarli come particelle "indipendenti". Come vedremo tra breve i nucleoni posseggono all'interno del nucleo una energia cinetica media dell'ordine di una ventina di MeV, e la sezione d'urto di interazione nucleone-nucleone a questa energie vale circa $\sigma = 0.3 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$. Essendo la densità nucleare pari a: $n = 10^{38} \text{ nucleoni/cm}^3$, il libero cammino medio risulta essere: $\lambda = \frac{1}{n\sigma} = 0.3 \cdot 10^{-13} \text{ cm}$, quindi inferiore alle dimensioni del nucleo. Questo porterebbe ad escludere che i nucleoni possano essere trattati come particelle indipendenti: vedremo però che, a causa del principio di esclusione di Pauli, il cammino libero medio aumenta e questa assunzione è invece corretta.

Considereremo brevemente due modelli a particelle indipendenti: il più semplice modello a gas di Fermi ed il più complesso modello a shell.

8.2 Modello a gas di Fermi

Questo modello considera il moto dei nucleoni non interagenti nel campo di una buca di potenziale medio di ampiezza $R=r_0A^{1/3}$. La profondità U_0 della buca che deve contenere confinati all'interno di R i nucleoni può essere trovata dai seguenti semplici argomenti. Lo stato fondamentale di un nucleo corrisponde allo stato energetico più basso del gas di Fermi allo zero assoluto, quando tutti gli stati energetici sono riempiti da nucleoni. Il numero totale di neutroni sarà dato da:

$$N = \int_0^{p_{\max}} \frac{dN}{dp} dp, \text{ dove: } \frac{dN}{dp} = 2 \frac{4\pi p^2 V}{(2\pi\hbar)^3} \text{ è la densità degli stati nella statistica di Fermi}$$

(p è il momento del neutrone, $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi r_0^3 A$ è il volume del nucleo, p_{\max} è il massimo valore di p , ed il fattore 2 tiene conto delle due possibili direzioni dello spin.

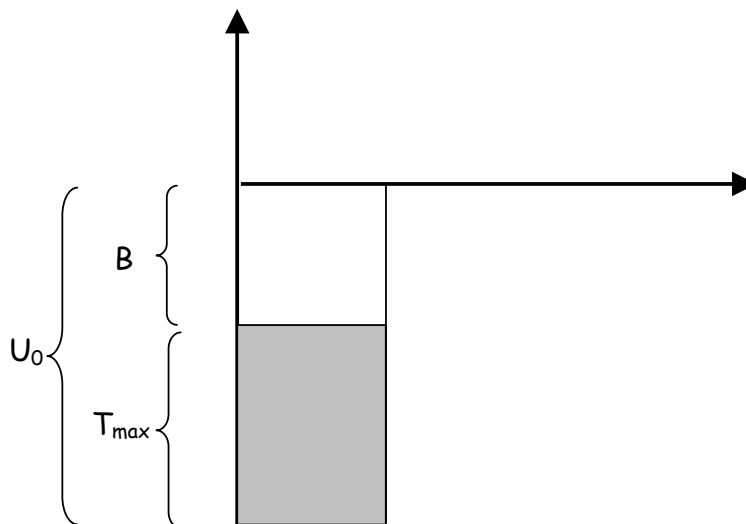
Si ottiene:
$$N = \frac{V p_{\max}^3}{3\pi^2 \hbar^3}.$$

Per un nucleo completamente simmetrico, con $N=A/2$:

$$p_{\max}^{(n)} = \sqrt[3]{\frac{9}{8}\pi} \frac{\hbar}{r_0} = 250 \text{ MeV}$$

E allora la corrispondente energia cinetica vale: $T_{\max} = \frac{p_{\max}^2}{2m} = 32 \text{ MeV}$. Essendo

l'energia di legame media dei nucleoni pari a 8 MeV, la profondità della buca di potenziale deve allora essere: $U_0 = T_{\max} + B = 32 + 8 = 40 \text{ MeV}$. Per un nucleo simmetrico, la buca di potenziale per i protoni ha gli stessi parametri se si trascura la repulsione coulombiana (questo è possibile per nuclei leggeri con $N=Z$). Se pensiamo a nuclei più pesanti, allora $N > Z$ e si ha: $T_{\max}^{(n)} > T_{\max}^{(p)} \Rightarrow U_0^{(n)} > U_0^{(p)}$, dal momento che esiste una addizionale interazione coulombiana (repulsiva) per i protoni.



Fia 8.1 la buca di potenziale nucleare

L'energia cinetica media dei nucleoni in un nucleo è data da:

$$\langle T_N \rangle = \frac{1}{2m} \langle p^2 \rangle = \frac{1}{2m} \frac{\int_0^{p_{\max}} p^2 \frac{dN}{dp} dp}{\int_0^{p_{\max}} \frac{dN}{dp} dp} = \frac{1}{2m} \frac{3}{5} p_{\max}^2 \approx 20 \text{ MeV}$$

I valori di U_0 e $\langle T_N \rangle$ sono in accordo con quanto ricavato dagli esperimenti. E' curioso notare come il nucleo sia descrivibile sia come una goccia di liquido che come un gas... Il range di applicabilità del modello a gas di Fermi non è molto ampio: questo modello può essere applicato per spiegare le proprietà dei nuclei associate alla distribuzione di impulso dei nucleoni: quest'ultima è importante quando si considerino le caratteristiche che dipendono dai moti interni dei nucleoni, come per esempio la produzione di pioni nelle interazioni nucleone-nucleo. La soglia di questa reazione è considerevolmente abbassata se il nucleone proiettile interagisce con un nucleone interno del nucleo che, a causa del suo moto, gli sta muovendo incontro.

8.3 Evidenza dei numeri magici nel sistema nucleare

Vi sono molti indizi sul fatto che i nucleoni, all'interno del nucleo, siano organizzati in certe configurazioni (che ricordano la struttura atomica) particolari, caratterizzate da una maggior stabilità ed identificate dai cosiddetti "numeri magici".

1) numero degli isotopi e degli isotoni stabili attorno ai numeri magici.

Se si riporta in un grafico (fig 8.2 e fig 8.3) il numero di isotopi stabili in funzione del numero di neutroni e/o di protoni, si notano delle strutture più o meno evidenti in corrispondenza di certi numeri: 2, 8, 20, (28), 50, 82, 126

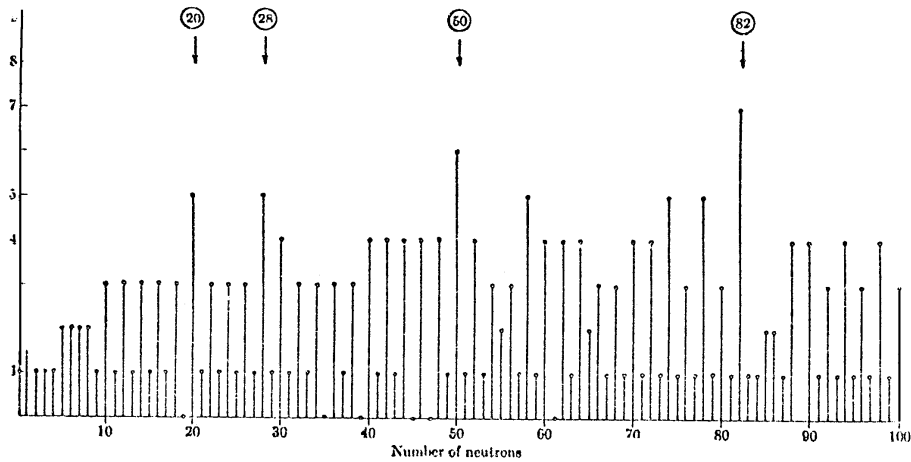


fig 8.2 distribuzione dei neutroni nei nuclei

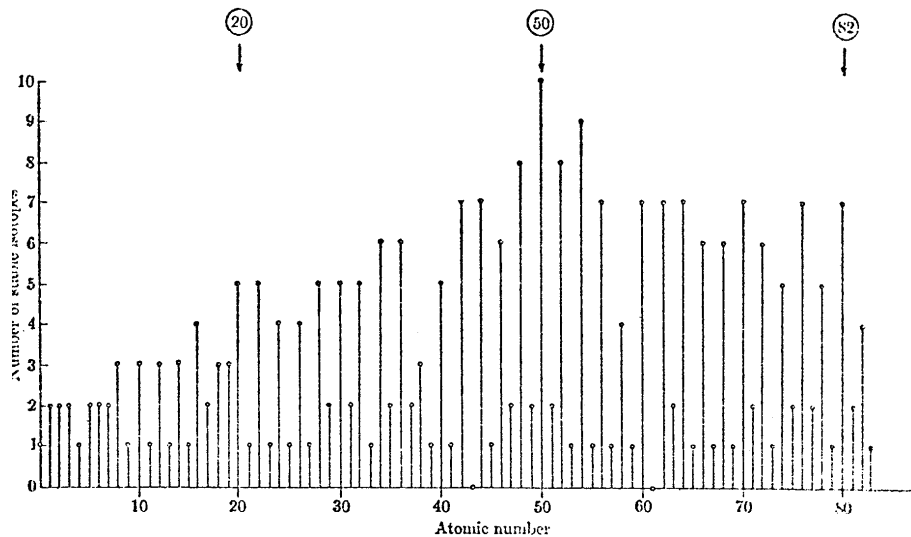


fig 8.3 distribuzione dei protoni nei nuclei

2) energia di legame dell'ultimo nucleone intorno ai numeri magici.

Come vedremo nel seguito i nuclei $^{16}_8\text{O}_8$ e $^{40}_{20}\text{Ca}_{20}$ sono doppiamente magici: hanno un numero di protoni e di neutroni corrispondente ad un numero magico. Se si aggiunge a questa configurazione un protone ($^{17}_9\text{F}_8$, oppure $^{41}_{21}\text{K}_{20}$) oppure un neutrone ($^{17}_8\text{O}_9$, oppure $^{41}_{20}\text{Ca}_{21}$) questo ultimo nucleone risulta assai poco legato, segno che la struttura di partenza era particolarmente stabile.

Per esempio, vediamo qualche energia di legame per l'ultimo nucleone nel caso che si arrivi o si superi di un'unità un numero magico.

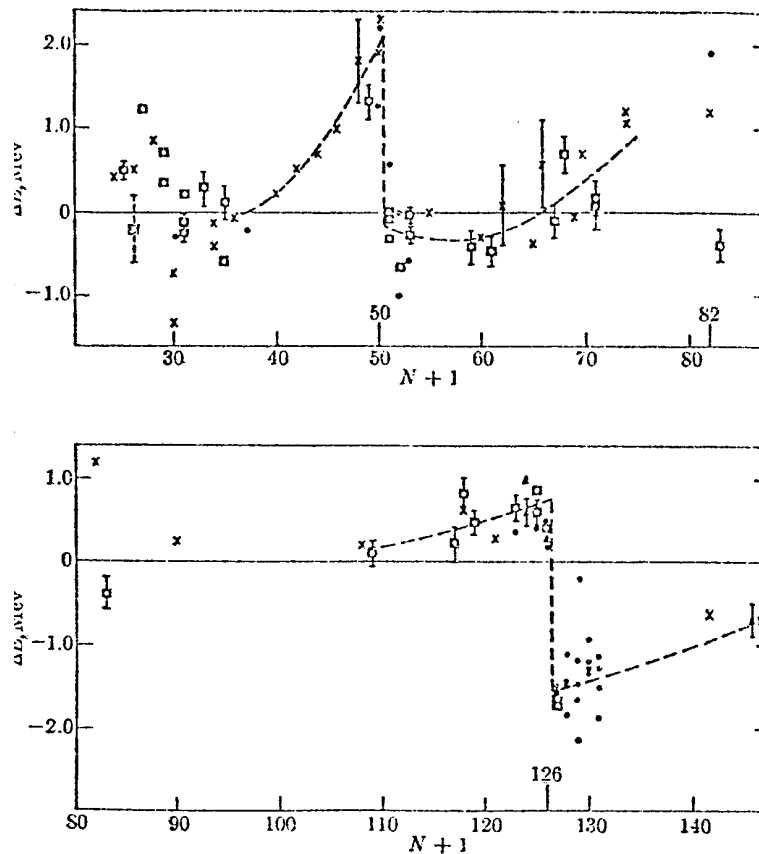
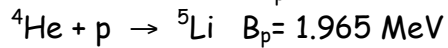
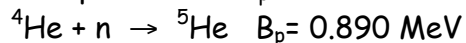
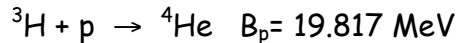
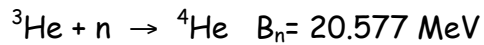
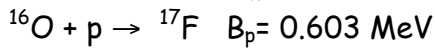
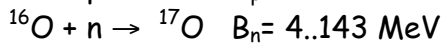
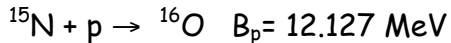
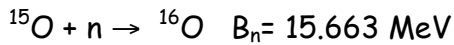


fig 8.4 andamento della quantità $\Delta B = B_{N+1} - B_N$ per neutroni in corrispondenza dei numeri magici 50 e 126

Nelle figure 8.4 e 8.5 sono riportate le differenze di energia di legame sia sperimentali che teoriche in prossimità dei numeri magici: è evidente il brusco salto, spesso dell'ordine di qualche MeV.

3) sezione d'urto di assorbimento dei neutroni termici.

La sezione d'urto presenta dei profondi minimi per quei nuclei che già posseggono un numero di neutroni pari ad un numero magico, come evidente dalla figura 8.5

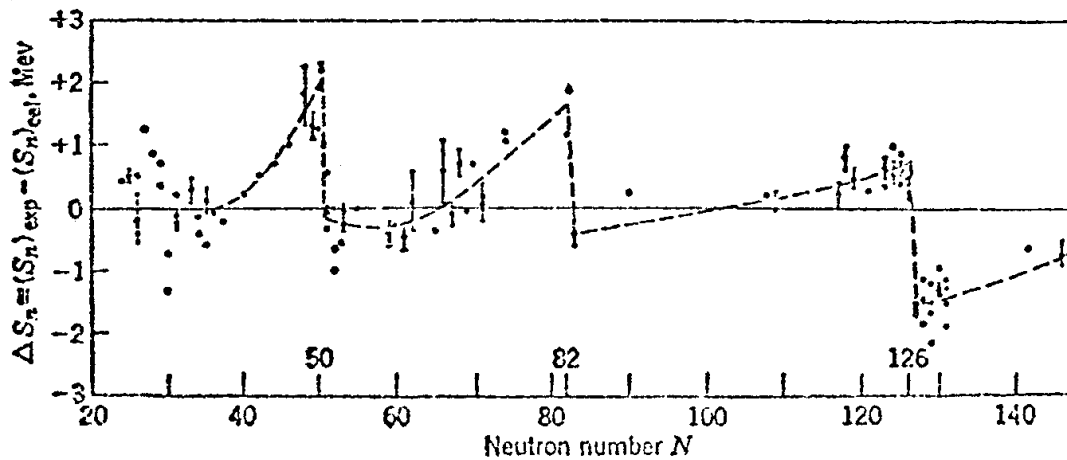


fig 8.5 andamento della quantità $\Delta B = B_{N+1} - B_N$ per neutroni in corrispondenza dei numeri magici 50, 82 e 126

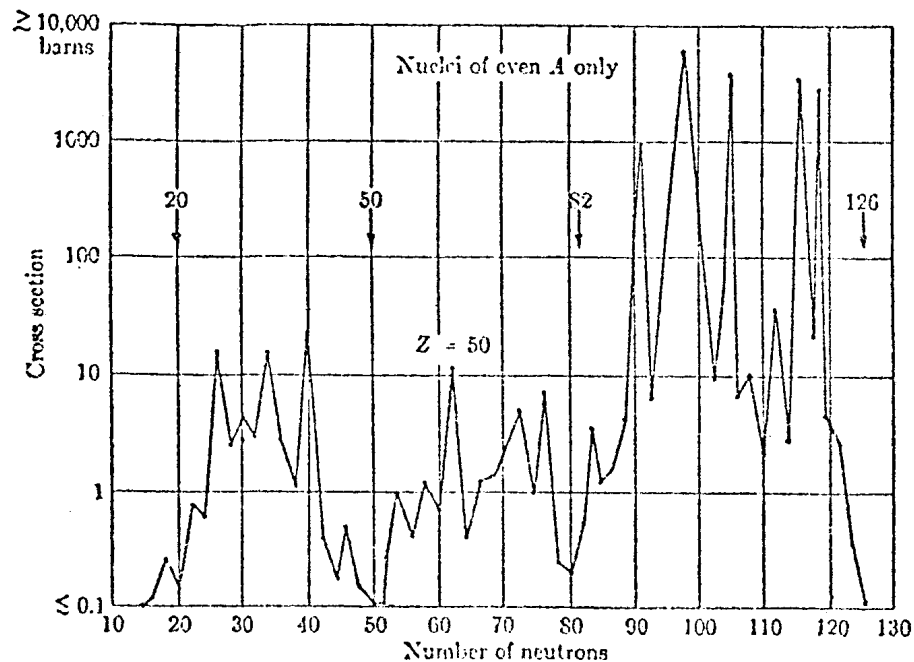


fig 8.6 andamento della sezione d'urto di cattura neutronica in funzione del numero di neutroni nel nucleo

4) Le famiglie radioattive naturali terminano con il Piombo, che ha $Z=82$ ed $N=126$. Da quanto osservato fino ad ora, è evidente la somiglianza con il sistema atomico, anch'esso caratterizzato da strutture ricorrenti particolarmente stabili in corrispondenza dei numeri magici. Basta pensare ai gas nobili ${}^2\text{He}$, ${}^{10}\text{Ne}$, ${}^{18}\text{Ar}$, ${}^{36}\text{Kr}$, ${}^{54}\text{Xe}$, ${}^{86}\text{Rn}$, oppure osservare la energia di ionizzazione in funzione del numero atomico riportata in figura 8.7

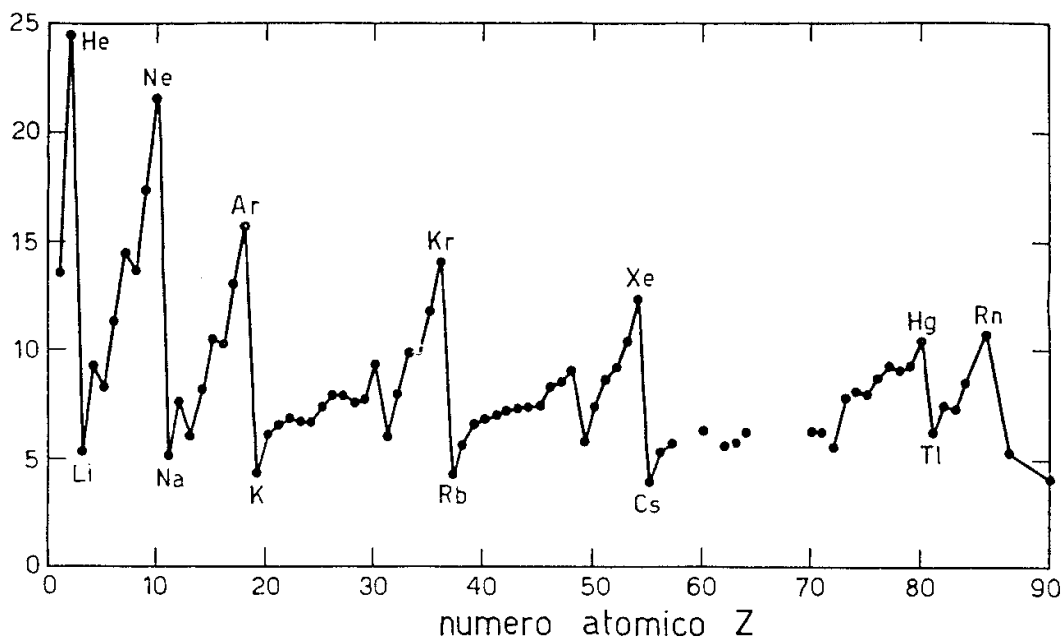


fig 8.7 energia di ionizzazione in funzione del numero atomico Z

8.4 Il modello a shell del nucleo

I numeri magici sono un indizio della esistenza di una struttura interna del nucleo e di una distribuzione regolare delle particelle su livelli energetici od orbite in analogia alla distribuzione degli elettroni nell'atomo. Si può immaginare che l'aggregato di nucleoni su un livello energetico o su livelli molto vicini forma una shell nucleare il cui graduale riempimento conduce alla formazioni di nuclei particolarmente stabili, in analogia con la formazione dei gas inerti come risultato del riempimento delle shell atomiche. Il sistema periodico degli elementi proposto per la prima volta da Mendeleev, è basato sulla specifica natura della interazione degli elettroni con il nucleo. Esiste un campo centrale (forza di Coulomb) e gli elettroni che si muovono in esso interagiscono debolmente tra loro. I livelli atomici sono occupati dagli elettroni in accordo con il principio di esclusione di Pauli. A prima vista sembrerebbe impossibile costruire un analogo modello a shell per il nucleo. Infatti due delle tre

condizioni necessarie non sono soddisfatte per i nucleoni nel nucleo atomico: a differenza dell'atomo il nucleo non ha un centro di forza isolato ed inoltre i nucleoni (a differenza degli elettroni) sono particelle fortemente interagenti. La concentrazione dei nucleoni nel nucleo è dell'ordine di $n=10^{38}$ nucleoni/cm³, mentre la sezione d'urto di interazione tra due nucleoni all'energia di 25 MeV (tipica energia cinetica all'interno del nucleo) vale $\sigma=0.3\cdot 10^{-24}$ cm². Pertanto il libero cammino medio di un nucleone nel nucleo risulta essere: $\lambda=1/n\sigma=0.3\cdot 10^{-13}$ cm, ben inferiore alle dimensioni del nucleo. Sembrerebbe quindi privo di significato parlare di qualsiasi moto orbitale regolare. L'interazione tra due nucleoni, a causa della sua intensità e del suo corto range, può essere descritta come una stretta ($\approx 10^{-13}$ cm) e profonda (≈ 30 MeV) buca di potenziale che in prima approssimazione può essere assunta rettangolare. Nel nucleo atomico i nucleoni si muovono rapidamente gli uni rispetto agli altri a distanze confrontabili con le dimensioni della buca di potenziale: quindi l'interazione di un nucleone con il nucleo può essere descritta mediante un campo medio indipendente dal tempo rappresentato dalla buca di potenziale formata dalla sovrapposizione di parecchie buche di potenziale adiacenti e sfericamente simmetrica. Secondo le leggi della meccanica quantistica i nucleoni che si muovono nella buca possono trovarsi in diversi stati energetici: il riempimento completo di tutti gli stati più bassi corrisponde allo stato fondamentale del nucleo. Una collisione tra due nucleoni è ridotta ad una redistribuzione di energia tra di essi e quindi uno dei due nucleoni deve perdere una parte della sua energia e finire in un livello energetico più basso. Questo comunque non è possibile dal momento che tutti i livelli più bassi sono completamente riempiti, e secondo il principio di esclusione di Pauli non vi può essere sistemato nessun ulteriore nucleone. Così il libero cammino medio tra collisioni diviene molto maggiore di quanto predetto dalla formula precedente, e noi possiamo assumere che i nucleoni all'interno del nucleo praticamente sono particelle non interagenti. Abbiamo così tutte le premesse per costruire il modello a shell del nucleo: particelle non interagenti, cioè protoni e neutroni che hanno spin semi-intero ed obbediscono al principio di Pauli, si muovono in campo di potenziale sferico. In prima approssimazione (trascurando la forza di Coulomb) il campo è lo stesso per protoni e neutroni: in effetti i numeri magici per protoni e neutroni sono gli stessi. A causa della simmetria sferica il momento angolare orbitale ℓ è un integrale del moto e lo stesso valore di energia corrisponde a $2\ell+1$ orientazioni. In accordo con il principio di esclusione, $2\cdot(2\ell+1)$ nucleoni di ciascun tipo (protoni o neutroni) possono occupare questo livello di energia. Così diventa possibile costruire un modello nel quale i nucleoni sono distribuiti in maniera definita tra i livelli energetici. La versione più semplice di modello a shell è il modello a particella singola per i nuclei con A dispari. In questo modello si assume che tutti i nucleoni, ad eccezione di quello dispari spaiato, formino un core inerte sfericamente simmetrico con momento angolare e momento magnetico uguali a zero: tutte le proprietà di base del nucleo sono determinate dall'ultimo nucleone dispari.

Per determinare la posizione dei livelli di particella bisogna specificare certi parametri della buca di potenziale: la sua larghezza è presa uguale al diametro del nucleo e la profondità è determinata dalla condizione che l'energia di legame di un nucleone nel nucleo è dell'ordine di 8 MeV. La soluzione dell'equazione di Schroedinger per una particella in questa buca di potenziale fornisce una serie di autofunzioni ed autovalori che descrivono i vari stati della particella nella buca. Se si usa una buca rettangolare si ottiene la seguente soluzione:

stati	1s	1p	$\underbrace{2s \quad 1d}$	$\underbrace{1f \quad 2p}$	$\underbrace{1g \quad 2d \quad 3s}$	$\underbrace{1h \quad 2f \quad 3p}$
ℓ	0	1	0 2	3 1	4 2 0	5 3 1
$N=2(2\ell+1)$	2	6	2 10	14 6	18 10 2	22 14 6
$\sum N$	2	8	10 20	34 40	58 68 70	92 106 112

Tabella 8.1

Nella tabella gli stati (livelli) sono disposti in ordine crescente di energia e caratterizzati dal numero quantico n (che determina il numero di nodi della funzione d'onda) e dal numero quantico orbitale secondo la nota convenzione. Per il principio di Pauli ciascun livello può ospitare un massimo di $N=2(2\ell+1)$ nucleoni di ciascun tipo. Se si cambia la forma della buca di potenziale i livelli si spostano lungo la scala dell'energia (talvolta questo spostamento distrugge la sequenza originaria) e si combinano a formare diversi gruppi di livelli vicini tra loro in energia ciascuno dei quali separati dagli altri gruppi da un salto in energia maggiore. Questi gruppi di livelli vicini tra loro possono essere considerati le diverse shell nucleari. Nel modello corretto il numero di occupazione totale ($\sum N$) di ogni shell deve coincidere con un numero magico. Il grande salto di energia tra le shell rende i nuclei magici eccezionalmente stabili e rende difficile l'aggiunta di un ulteriore nucleone al sistema.

Il cambio più naturale della forma della buca consiste in un arrotondamento dei bordi: questo non altera la sequenza dei livelli, ma produce come effetto la formazione dei gruppi riportati nella tabella precedente (avvicinamento dei livelli 2s e 1d; 1f e 2p; 1g,2d e 3s; 1h,2f e 3p). Una buca del genere prevede i seguenti numeri magici: 2, 8, 20, 40, 70 e 112. Un confronto con i numeri magici reali (2, 8, 20, 50, 82 e 126) mostra che questo schema fornisce valori corretti solo per le prime tre shell. Nel 1949 Goeppert, Mayer e Jensen proposero un modello modificato che tenesse conto della interazione spin-orbita per i nucleoni: la forma del potenziale assume la forma :

$$V_{\text{tot}}(r) = V(r) + U(r) \cdot (\ell \cdot s)$$

dove $V(r)$ è un potenziale detto di Wood-Saxon, arrotondato sia sul fondo che alla sommità (riportato in figura 8.8) o di oscillatore armonico:

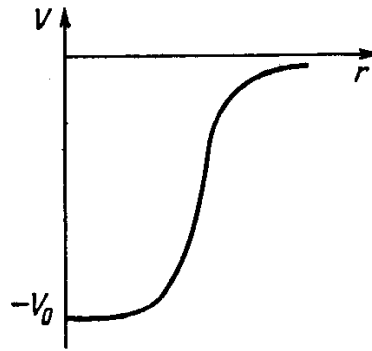


Fig. 8.9 il potenziale nucleare di Wood-Saxon

$U(r)$ invece risulta proporzionale a $\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r}$. In base a questo potenziale l'energia di uno stato con dato momento angolare ℓ assume due valori che dipendono dalla mutua orientazione di ℓ ed s : l'orientazione parallela corrisponde al più basso valore di energia (cioè alla più alta energia di interazione). Viene così osservato uno "splitting" dei livelli di dato ℓ in due sottolivelli di momento angolare $j = \ell \pm \frac{1}{2}$. Pertanto al posto di uno stato np otteniamo i due stati $np_{3/2}$ e $np_{1/2}$, al posto di uno stato nd otteniamo i due stati: $nd_{5/2}$ e $nd_{3/2}$, e così via: lo stato a j maggiore ha la più bassa energia. Lo splitting è piccolo per bassi ℓ , cresce con ℓ (approssimativamente come $2\ell+1$) e per $\ell \geq 4$ diviene così importante che muove i due sottolivelli $\ell + \frac{1}{2}$ e $\ell - \frac{1}{2}$ in diverse shell.

Nella tabella che segue sono riportati i risultati ottenuti tramite l'introduzione dell'interazione spin-orbita: sono indicati gli stati, il numero di occupazione per protoni e neutroni ed il numero totale di protoni/neutroni compatibili con il dato livello. Come si vede, tutte le shell ora si chiudono sui corrispondenti valori sperimentali dei numeri magici.

Shell	State	$m = 2l + 1$	$N = \sum m$
I	$1s_{1/2}$	2	2
II	$1p_{3/2} 1p_{1/2}$	$4 + 2 = 6$	8
III	$1d_{5/2} 2s_{1/2} 1d_{3/2}$	$6 + 2 + 4 = 12$	20
IV	$1f_{7/2} 2p_{3/2} 1f_{5/2} 2p_{1/2} 1g_{9/2}$	$8 + 4 + 6 + 2 + 10 = 30$	50
V	$1g_{7/2} 2d_{5/2} 2d_{3/2} 3s_{1/2} 1h_{11/2}$	$8 + 6 + 4 + 2 + 12 = 32$	82
VI	$1h_{9/2} 2f_{7/2} 2f_{5/2} 3p_{3/2} 3p_{1/2} 1i_{13/2}$	$10 + 8 + 6 + 4 + 2 + 14 = 44$	126

Tabella 8.2 schema dei livelli del modello a shell e numeri magici

La sequenza e lo splitting dei livelli è riportato invece nella figura 8.10.

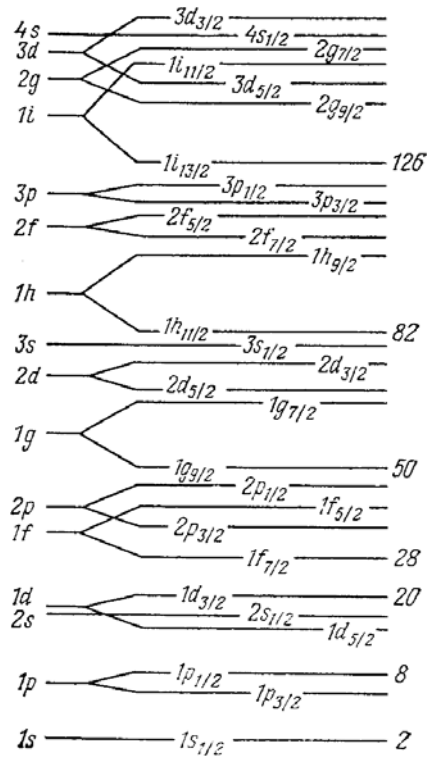


Fig 8.10 il fenomeno dello "splitting" dei livelli nucleari

Dal modello a shell discendono le seguenti assunzioni, confermate tra l'altro sperimentalmente:

- 1) il momento angolare totale J di un nucleo che consiste di un numero pari di protoni e di neutroni è zero;
- 2) il momento angolare totale J di un nucleo che consiste di un numero dispari di nucleoni è determinato dal momento angolare $j = l + s$ del nucleone spaiato;
- 3) il momento angolare totale J di un nucleo dispari-dispari i cui nucleoni spaiati si trovano in stati identici è uguale al doppio del momento angolare J del nucleone;
- 4) l'energia di un livello (di dato n) cresce all'aumentare di l ;
- 5) l'energia di interazione spin-orbita per uno stato che corrisponde ad una orientazione parallela di l ed s è maggiore della corrispondente energia per l'arrangiamento antiparallelo.

Nucleus (nucleon)	Spin	State	μ_{exp}	μ_{theor}
n	1/2	$1s_{1/2}$	-1.91	—
p	1/2	$1s_{1/2}$	+2.79	—
${}^2_1\text{H}$	1	$(1s_{1/2})^2$	+0.86	+0.88
${}^3_1\text{H}$	1/2	$(1s_{1/2})^3$	+2.98	+2.79
${}^3_2\text{He}$	1/2	$(1s_{1/2})^3$	-2.13	-1.91
${}^4_2\text{He}$	0	$(1s_{1/2})^4$	0	0

tab 8.3 momenti magnetici dei nuclei leggeri: confronto teoria-esperimenti per il modello a shell

La verifica sperimentale dell'assegnazione degli stati quantici di momento angolare ai vari nuclei è fornita dalla misura dei corrispondenti momenti magnetici. Nelle tabelle che seguono sono riportati alcuni confronti tra i momenti magnetici previsti dal modello a shell ed i corrispondenti valori misurati per nuclei leggeri.

Nucleus	Spin	State	μ_{exp}	μ_{theor}
${}^7_3\text{Li}$	3/2	$(1s_{1/2})^4 (1p_{3/2})^3$	3.26	3.07
${}^9_4\text{Be}$	3/2	$(1s_{1/2})^4 (1p_{3/2})^5$	-1.18	-1.14
${}^{10}_5\text{B}$	3	$(1s_{1/2})^4 (1p_{3/2})^6$	1.80	1.88
${}^{12}_6\text{C}$	0	$(1s_{1/2})^4 (1p_{3/2})^8$	0	0
${}^{13}_6\text{C}$	1/2	$(1s_{1/2})^4 (1p_{3/2})^8 1p_{1/2}$	0.70	0.64
${}^{14}_7\text{N}$	1	$(1s_{1/2})^4 (1p_{3/2})^8 (1p_{1/2})^2$	-0.40	-0.40
${}^{15}_7\text{N}$	1/2	$(1s_{1/2})^4 (1p_{3/2})^8 (1p_{1/2})^3$	-0.28	-0.24
${}^{16}_8\text{O}$	0	$(1s_{1/2})^4 (1p_{3/2})^8 (1p_{1/2})^4$	0	0

tab 8.4 momenti magnetici dei nuclei leggeri: confronto teoria-esperimenti per il modello a shell

8.5 Conseguenza e conferme della validità del modello a shell

Abbiamo visto che in natura esistono nuclei con livelli metastabili (nuclei isomeri) aventi una vita media considerevolmente lunga. E abbiamo anche associato la piccola costante di decadimento alla grande differenza tra i momenti angolari iniziale e finale del nucleo: $\Delta J \geq 4$. Dalla tabella 9.2 che rappresenta i vari stati del modello a shell si nota una notevole differenza di momento angolare alla fine della shell IV, dove gli ultimi due stati differiscono per $\Delta J = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4$. Pertanto i nuclei formati dalla occupazione dello stato $2p_{1/2}$ (che hanno cioè questo stato come stato fondamentale) avranno lo stato $2g_{9/2}$ come primo stato eccitato dal quale una transizione è impedita.

Così, per numeri di occupazione $N > 20 + 8 + 6 + 4 = 38$, i nuclei devono presentare proprietà isomeriche. Questa previsione coincide perfettamente con quanto osservato sperimentalmente e riportato nella figura 8.11 che segue, dove è riportata l'abbondanza di isomeri in funzione di Z oppure N. condizione del tutto simili è ritrovata alla fine della shell V ($N > 50 + 8 + 6 = 64$), dove si passa da uno stato $3g_{1/2}$ ad uno stato $1h_{11/2}$, con un corrispondente salto $\Delta J = \frac{11}{2} - \frac{1}{2} = 5$.

Come ulteriore conseguenza tratta dal modello a shell vediamo le regole di selezione del decadimento beta. Abbiamo visto che le regole di selezione sono associate ad un cambio di parità e di spin del nucleo a seguito del decadimento beta. Il modello a shell può prevedere questi valori e quindi la natura della transizione (permessa o proibita). Vediamo due casi: a) ${}^{17}_9\text{F} \xrightarrow{\beta^+} {}^{17}_8\text{O}$ e b) ${}^{123}_{50}\text{Sn} \xrightarrow{\beta^-} {}^{123}_{51}\text{Sb}$.

Nel primo caso il decadimento beta è ridotto ad una trasformazione del nono protone del nucleo ${}^{17}\text{F}$ nel nono neutrone del nucleo ${}^{17}\text{O}$. In base al modello a shell, entrambi questi nucleoni si trovano nello stato $1d_{5/2}$, quindi la trasformazione ${}^{17}\text{F} \rightarrow {}^{17}\text{O}$ non prevede alcun cambio del momento angolare totale o orbitale del nucleo che si trasforma: spin e parità restano uguali ($\Delta J = 0, P_f = P_i$). Secondo la teoria del decadimento beta questa trasformazione appartiene alle trasformazioni permesse, con un valore di $\log(F \cdot \tau) = 3 \div 5$, in ottimo accordo con il valore sperimentale che vale 3.36.

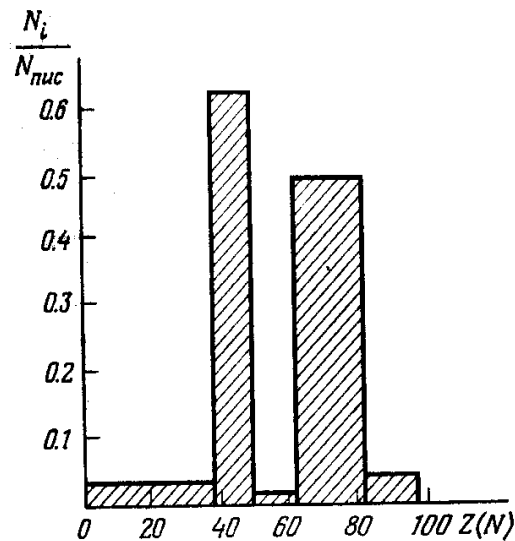


fig 8.11 abbondanza di nuclei con stati isomerici in funzione di Z (N)

Nel secondo caso il 73-esimo neutrone che occupa lo stato $1h_{11/2}$ nello ${}^{123}\text{Sn}$ viene trasformato nel 51-esimo protone che va ad occupare lo stato $1g_{7/2}$ nello ${}^{123}\text{Sb}$. Per una transizione del genere il momento angolare totale cambia di 2 unità

rispettivamente, ed inoltre cambia la parità del nucleo (passando un nucleone dalla stato h allo stato g). Quindi i nuclei ^{123}Sn e ^{123}Sb devono differire di 2 in spin totale e devono avere parità opposta ($\Delta J=2$, $P_f = -P_i$). Secondo la teoria questa transizione è proibita e deve avere un valore di $\log(F\tau) \approx 9$. In effetti il valore sperimentale risulta essere pari a 9.1.

D'altra parte, anche in casi apparentemente semplici, la teoria inspiegabilmente fallisce: qui ricordiamo a titolo di esempio solo il caso del nucleo ^6Li . La teoria prevede che il momento angolare totale del nucleo sia $J=3$, pari al doppio del momento angolare dei due nucleoni (protone e neutrone) spaiati, entrambi nella shell $1p_{3/2}$. viceversa il valore sperimentale è $J=1$.

Appendice

In questo modello i nucleoni sono trattati come particelle indipendenti tra loro e soggette ad un potenziale che rappresenta l'energia di legame di ciascun nucleone con il resto dei nucleoni. Pertanto si può scrivere l'equazione di Schroedinger per ogni singolo nucleone e trovare la funzione d'onda e l'energia corrispondente (in generale una serie di autofunzioni con le corrispondenti energie). Essendo i nucleoni non interagenti tra loro, la funzione d'onda del nucleo e la sua energia sono date rispettivamente dalle seguenti espressioni:

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_A) = \psi_1(\vec{r}_1) \cdot \psi_2(\vec{r}_2) \cdot \psi_3(\vec{r}_3) \cdot \dots \cdot \psi_A(\vec{r}_A)$$

$$E = E_1 + E_2 + E_3 + \dots + E_A$$

dove $\psi_i(\vec{r}_i)$ ed E_i sono la funzione d'onda e l'energia dello i-esimo nucleone che soddisfano l'equazione di Schroedinger:

$$\nabla^2 \psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V(x, y, z)) \psi = 0$$

dove $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ è il laplaciano, E è l'energia totale e $V(x, y, z)$ rappresenta il potenziale nucleare.

In generale viene considerato un potenziale dipendente solo da r : $V(r)$.

I potenziali più usati sono:

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{r} \quad (\text{potenziale coulombiano})$$

$$V(r) = \frac{1}{2}kr^2 \quad (\text{oscillatore armonico})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V = 0 \quad 0 \leq r < a \\ V = \infty \quad a \leq r \end{array} \right\} \quad (\text{buca sferica infinita})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V = -V_0 \quad 0 \leq r < a \\ V = 0 \quad a \leq r \end{array} \right\} \quad (\text{buca sferica finita})$$

$$V(r) = -V_0 \cdot e^{-r/a} \quad (\text{potenziale esponenziale})$$

Essendo $V=V(r)$, la funzione d'onda si può scrivere fattorizzata nel seguente modo:

$$\psi(\vec{r}) = \psi(r, \vartheta, \varphi) = \Psi(r) \cdot \Theta(\vartheta) \cdot \Phi(\varphi)$$

e l'equazione di Schroedinger si può dividere in tre equazioni nelle tre variabili r, ϑ, φ :

$$\frac{d^2\Theta}{d\varphi^2} + \alpha\Theta = 0 \quad (1)$$

$$\frac{1}{\sin(\vartheta)} \frac{d}{d\vartheta} \left(\sin(\vartheta) \frac{d\Theta}{d\vartheta} \right) - \frac{\alpha\Theta}{\sin^2(\vartheta)} + \beta\Theta = 0 \quad (2)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Psi}{dr} \right) + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V(r))\Psi - \frac{\beta}{r^2} \Psi = 0 \quad (3)$$

dove α e β sono costanti.

Le soluzioni della (1) e della (2) non dipendono dal potenziale e sono:

$$\Phi(\varphi) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \exp(im\varphi)$$

con $m^2 = \alpha$, e $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$\Theta_\ell^m(\vartheta) = \left(\frac{(\ell - |m|)!}{(\ell + m)!} \frac{2\ell + 1}{2} \right)^{1/2} (1 - z^2)^{|m|/2} \frac{d^{|m|}}{dz^{|m|}} P_\ell(z)$$

con $z = \cos(\vartheta)$, e $P_\ell(z)$ polinomi di Legendre

$$P_0 = 1$$

$$P_1 = z$$

$$P_2 = \frac{1}{2}(3z^2 - 1)$$

$$P_3 = \frac{1}{2}(5z^3 - 3z)$$

$$P_4 = \frac{1}{8}(35z^4 - 30z^2 + 3)$$

con: $\ell(\ell+1) = \beta$, $\ell = 0, 1, 2, \dots$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \pm \ell$

Essendo il valore delle costanti α e β fissato nelle equazioni (1) e (2), l'equazione (3)

diventa:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Psi}{dr} \right) + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E - V(r) + \frac{\hbar^2 \ell(\ell + 1)}{2mr^2} \right) \Psi = 0$$

Scrivendo: $\Psi(r) = \frac{u(r)}{r}$, si ha:

$$\frac{d^2 u(r)}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E - V(r) + \frac{\hbar^2 \ell(\ell + 1)}{2mr^2} \right) u(r) = 0$$

con: $\frac{\hbar^2 \ell(\ell + 1)}{2mr^2}$ termine di potenziale centrifugo (positivo quindi repulsivo).

Chiamando: $V_{\text{eff}}(r) = V(r) + \frac{\hbar^2 \ell(\ell + 1)}{2mr^2}$, si ottiene:

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar^2}[E - V_{\text{eff}}(r)]u = 0$$

Detto ϑ il numero di nodi della funzione $u(r)$, si definiscono i seguenti numeri quantici che rappresentano uno stato, cioè una soluzione dell'equazione di Schroedinger:

$$\begin{aligned} \nu &= \vartheta + 1 && \text{numero quantico radiale } (\nu_{\text{min}} = 1); \\ \ell &&& \text{numero quantico orbitale } (\ell_{\text{min}} = 0); \\ n &= \nu + \ell = \vartheta + \ell + 1 && \text{numero quantico totale } (\nu_{\text{min}} = 1) \end{aligned}$$

Sistema atomico

Gli elettroni sono legati al nucleo dal potenziale coulombiano $V(r) = -\frac{Ze^2}{r}$ e la loro

energia totale (negativa in quanto lo stato è legato) è data da: $E = -\frac{Z^2e^4m}{2\hbar^2n^2}$ con $n=1,$

$2, \dots$. L'energia quindi dipende solo dal numero quantico principale n . In base ai diversi valori di n e ℓ , si ha la seguente nomenclatura:

$$\begin{array}{lll} \ell = 0 \Rightarrow s & n = 1 \rightarrow 1s & n = 2 \rightarrow 2s \\ \ell = 1 \Rightarrow p & n = 2 \rightarrow 2p & n = 3 \rightarrow 3p \\ \ell = 2 \Rightarrow d & n = 3 \rightarrow 3d & n = 4 \rightarrow 4d \\ \ell = 3 \Rightarrow f & \dots\dots\dots & \\ \ell = 4 \Rightarrow g & \dots\dots\dots & \\ \ell = 5 \Rightarrow h & \dots\dots\dots & \\ \ell = s \Rightarrow i & n = 7 \rightarrow 7i & n = 8 \rightarrow 8i \end{array}$$

Per ogni valore di n , quindi fissato lo stato energetico, vi possono essere diversi valori di ℓ che danno la stessa energia, e per ogni ℓ vi sono $2\ell+1$ valori di m (proiezione di ℓ lungo l'asse z). Inoltre, considerando che gli elettroni sono fermioni con spin $\frac{1}{2}$, vi sono ancora due possibilità di orientamento dello spin: $\pm \frac{1}{2}$. Pertanto, poichè per il principio di Pauli in uno stato con fissati numeri quantici, compresa la proiezione dello spin e del momento angolare orbitale, può stare un solo elettrone, si hanno per ciascuno stato energetico (n fissato) i seguenti numeri di occupazione:

n	ϑ	ℓ	(n, ℓ)	$2(2\ell+1)$		Σ
1	0	0	1s	2	2	2
2	1	0	2s	2		10
	0	1	2p	6	8	
3	2	0	3s	2		28
	1	1	3p	6		
	0	2	3d	10	18	
4	3	0	4s	2		
	2	1	4p	6		
	1	2	4d	10		

	0	3	4f	14	32	60
5	4	0	5s	2		
	3	1	5p	6		
	2	2	5d	10		
	1	3	5f	14		
	0	4	5g	18	50	110
6	5	0	6s	2		
	4	1	6p	6		
	3	2	6d	10		
	2	3	6f	14		
	1	4	6g	18		
	0	5	6h	22	72	182

tab 8.5 schema dei livelli atomici

In effetti, l'azione del nucleo fa sì che l'ordine dei livelli non sia proprio questo: alcuni livelli si accavallano e la sequenza di chiusura delle shell è diversa da quella indicata in tabella: l'ordine naturale è il seguente:

1s 2s 2p 3s 3p 4s 3d 4p 5s 4d 6s 4f 5d 6p 7s 5f 5d.

Capitolo 9

La fissione e la fusione nucleare

9.1 La Fissione nucleare

I primi studi relativi alla fissione sono svolti in Italia da Enrico Fermi. Subito dopo la scoperta del neutrone (1932) Fermi e i suoi collaboratori iniziarono uno studio sistematico delle reazioni indotte dal bombardamento di nuclei pesanti con neutroni. In generale il nucleo bombardato, catturando un neutrone diventa instabile a causa dell'eccesso di neutroni e si porta successivamente verso una conformazione più stabile trasformando il neutrone in eccesso in protone ed emettendo una particella β^- . Si ottiene così un elemento di numero atomico Z superiore di un'unità rispetto a quello di partenza. L'Uranio, con $Z=92$, era l'ultimo elemento del sistema periodico conosciuto. Mediante il processo di cattura neutronica e successivo decadimento beta ci si aspettava di ottenere un elemento di numero atomico $Z=93$ (elemento transuranico). Fermi ed i suoi collaboratori fecero questo esperimento, e avendo ottenuto elementi finali radioattivi con tempi di decadimento non noti tra gli elementi pesanti ($82 < Z < 92$) pensarono di aver creato gli elementi transuranici. Sulla loro scia iniziarono esperimenti analoghi, ad opera di Curie e Sovitch (1938) e Hahn e Strassmann. Si deve a questi ultimi la prima ipotesi che nel processo studiato non venisse creato un elemento transuranico, bensì avvenisse un processo di "fissione", cioè una scissione del nucleo bersaglio in due frammenti. Hahn e Strassmann arrivarono a questa ipotesi avendo rivelato la presenza di Bario e Lantanio tra i prodotti di reazione (il termine "fissione" viene dalla biologia). L'ipotesi di Hahn e Strassmann fu poi verificata da tutta una serie di ricerche intraprese in tutto il mondo su questo nuovo problema. La spiegazione teorica della fissione fu dapprima suggerita da Meitner e Frisch e poi ripresa e sviluppata da Bohr e Wheeler sull'analogia del processo di suddivisione di una goccia di liquido in due gocce più piccole. Praticamente la teoria di Bohr e Wheeler è quella usata tutt'oggi per trattare il processo di fissione. Come nella formula di Weizsacher si è assunta l'analogia del nucleo con una goccia di liquido per riprodurre l'andamento dell'energia di legame dei nuclei ma si è dovuto tener conto di altri fatti quali la carica dei protoni e la simmetria tra protoni e neutroni manifestata dalle forze nucleari, allo stesso modo per studiare la fissione, oltre a rifarsi all'analogia con una goccia, occorre tener conto della carica elettrica dei protoni (e la loro repulsione) e del fatto che stabilità maggiore si ha per simmetria tra protoni e neutroni (in assenza di repulsione coulombiana). Il processo della fissione è schematizzato in figura 9.1.

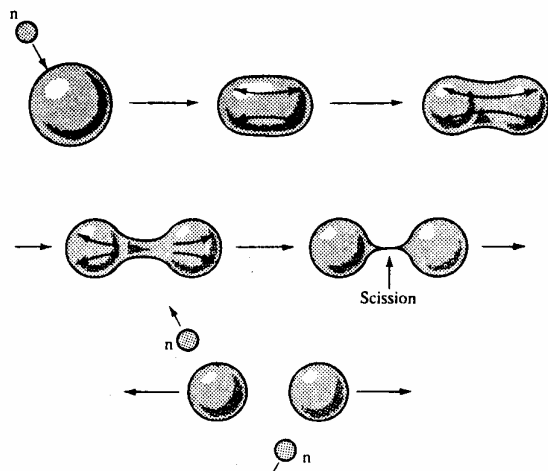
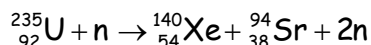


Fig. 9.1 Rappresentazione schematica del fenomeno della fissione

Nel nucleo sono presenti due forze antagoniste: la forza elettrostatica repulsiva esercitata tra i protoni e la forza nucleare attrattiva tra tutti i nucleoni. Quest'ultima è analoga alla forza di coesione in una goccia di liquido, che tende a farle prendere una forma sferica che è la configurazione più stabile perché la superficie è minima a parità di volume. Ma per le forze elettrostatiche del nucleo questa è la configurazione più instabile perché le azioni di repulsione sono in ragione inversa al quadrato della distanza e la sfera è la configurazione nella quale la distanza media tra i nucleoni presenta un minimo. Poiché la superficie del nucleo è proporzionale ad $A^{2/3}$ e quindi pressoché a $Z^{2/3}$, mentre l'energia elettrostatica dipende da Z^2 , è chiaro che all'aumentare di Z diventa sempre più importante la forza elettrostatica rispetto alla tensione superficiale e quindi basta una piccola deformazione rispetto alla sfera per far prevalere la prima (repulsiva) rispetto alla seconda (attrattiva). Penetrando in un elemento pesante il neutrone eccita il nucleo che si deforma e oscilla intorno alla forma sferica. Viene meno l'equilibrio tra le due forze; la repulsione elettrostatica che tende ad allungare ancora di più la goccia può prevalere sulla tensione superficiale che invece tende a ripristinare la forma sferica, e quindi il nucleo si può spezzare in due parti. I frammenti della fissione sono però in generale nuclei con troppi neutroni per essere stabili. La situazione è illustrata in figura 9.2, dove è riportata la zona di stabilità.

Questo spiega perché durante il processo di fissione vengono emessi uno o più neutroni ed i nuclei frammenti in generale sono emettitori β^- . Inoltre in generale non basterà un solo decadimento β^- se il nucleo frammento è molto lontano dalla zona di stabilità e quindi si avrà una vera famiglia radioattiva a radioattività β^- . Per esempio: lo ${}_{92}^{235}\text{U}$ colpito da un neutrone fissiona rompendosi nei due frammenti

${}_{54}^{140}\text{Xe}$ e ${}_{38}^{94}\text{Sr}$:



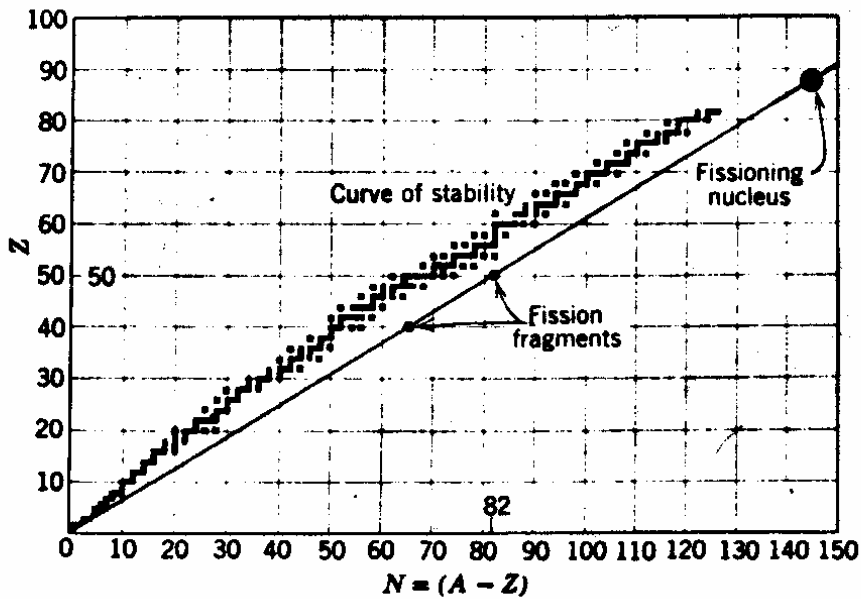
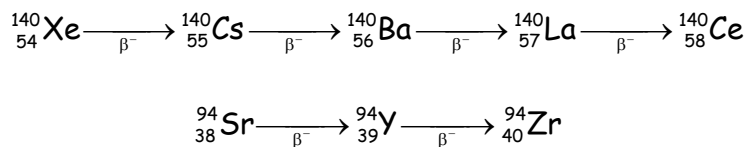


Fig. 9.2 Posizione dei frammenti di fissione rispetto alla curva di stabilità

$^{140}_{54}\text{Xe}$ e $^{94}_{38}\text{Sr}$ a loro volta decadono β^- :



Proprio a questa trasformazione è dovuta la scoperta della fissione, attraverso la rivelazione dell'attività β^- del $^{140}_{56}\text{Ba}$ e del $^{140}_{57}\text{La}$.

La probabilità che nella fissione si formino due nuclei di numero di massa $A_1 = A_2 = A/2$ ha un minimo, come risulta chiaro dalla figura 9.3. La fissione è asimmetrica, e presenta due massimi in corrispondenza di numeri di massa $90 < A_1 < 100$ e $130 < A_2 < 140$.

Il fenomeno della fissione può essere anche spiegato con la semplice analogia meccanica di una sferetta posta sulla sommità di una collina che presenta al suo centro una depressione più o meno accentuata, come mostrato in figura 9.4

Nel primo caso (fissione spontanea) l'energia necessaria per far precipitare la sfera dalla collina è nulla; l'energia guadagnata è uguale a mgh , se m è la massa della sfera. Nel secondo caso (fissione indotta da neutroni termici) l'energia necessaria per determinare la caduta della sfera è pari a $mg(h-b)$ e l'energia finale della sfera dopo la caduta è ancora uguale a mgh ; essendo $h-b \ll h$, con una piccola quantità di energia si può ottenere un quantità di energia molto maggiore. Nel terzo caso

(fissione indotta da neutroni veloci) l'energia necessaria per determinare la caduta della sfera, $mg(h-b)$, è quasi uguale all'energia finale della sfera dopo la caduta.

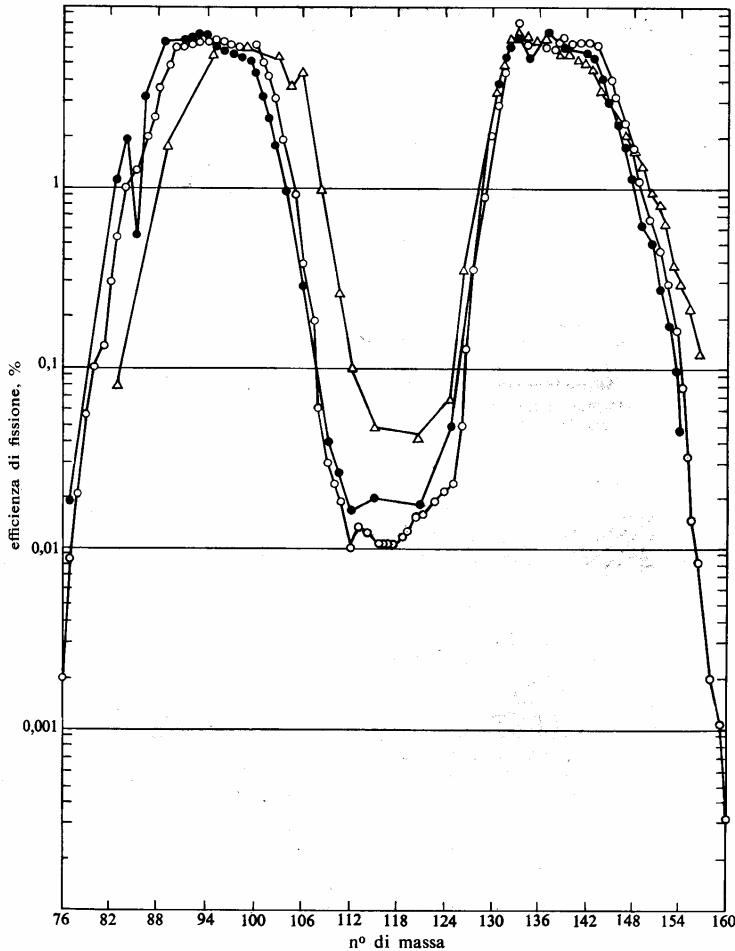


Fig. 9.3 Distribuzione dei numeri di massa nei prodotti di fissione

Nella figura 9.5 è riportato il grafico della energia potenziale di un nucleo che sta subendo il processo di fissione, in funzione della distanza di separazione tra i centri dei due frammenti: tale energia potenziale è dovuta alla presenza delle due forze antagoniste, tensione superficiale e repulsione coulombiana.

La risultante energia potenziale può avere oppure no una depressione più o meno marcata nel centro: in assenza di depressione la fissione può essere spontanea, nel senso che non occorre fornire energia dall'esterno per provocarla. Quando la depressione non è molto pronunciata è sufficiente l'energia potenziale guadagnata dal nucleo quando cattura il neutrone (energia di legame del neutrone nel nucleo composto, pari a circa 7.5 MeV).

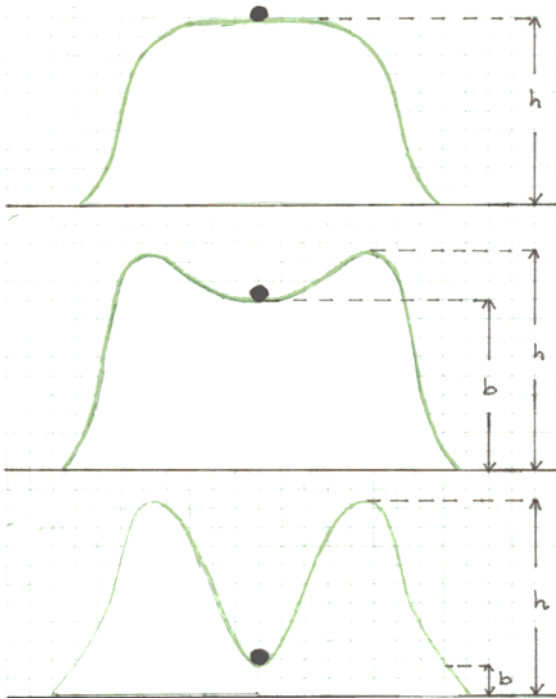


Fig. 9.4 Analogia meccanica della fissione

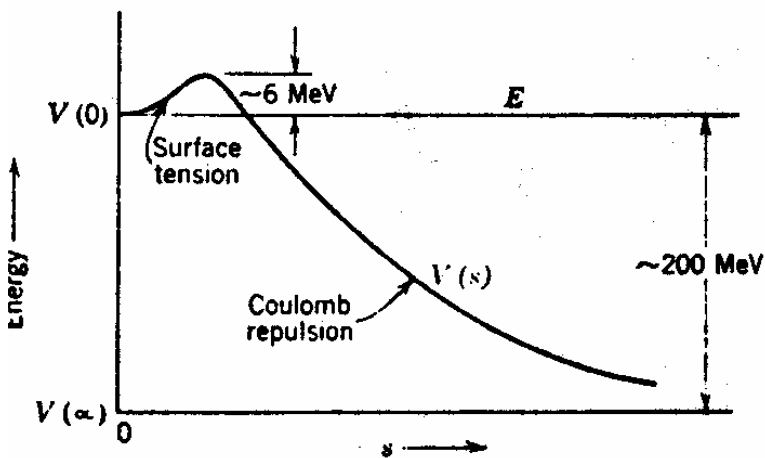
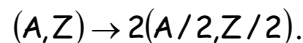


Fig. 9.5 Profilo dell'energia potenziale nella fissione nucleare

Se la depressione è abbastanza pronunciata il guadagno di energia di legame non è sufficiente ed il neutrone incidente deve possedere una energia cinetica addizionale per indurre la fissione. L'energia necessaria per far avvenire la fissione si dice "energia critica". Se quest'ultima è nulla o molto piccola, la fissione può avvenire anche con neutroni termici, cioè neutroni con energia cinetica pari all'energia di

agitazione termica ($kT_{\text{amb}} \approx \frac{1}{40} \text{ eV} = 0.026 \text{ eV}$); se è grande, la fissione avviene con neutroni energetici, detti "veloci". Un esempio di nucleo fissionabile con neutroni termici è lo ${}^{235}_{92}\text{U}$, mentre un esempio di nucleo fissionabile solo con neutroni veloci è lo ${}^{238}_{92}\text{U}$. Questa differenza è dovuta alla diversa energia di legame del neutrone catturato: aggiungendo un neutrone ad un nucleo di ${}^{235}_{92}\text{U}$ si forma un nucleo pari-pari, mentre aggiungendo un neutrone ad un nucleo di ${}^{238}_{92}\text{U}$ si forma un nucleo pari-dispari. Nel primo caso, essendo maggiore l'energia di legame, è maggiore l'energia guadagnata nel processo ed è sufficiente un neutrone termico; nel secondo caso, essendo l'energia di legame minore, il neutrone incidente deve possedere anche una certa energia cinetica.

Per comprendere in generale il motivo per cui durante il processo di fissione si guadagna molta energia, possiamo rifarci all'andamento della energia media per nucleone, B/A , in funzione del numero di nucleoni A : ricordiamo che per $A \approx 240$ si ha che $B/A \approx 7 \text{ MeV}$, mentre per $A \approx 120$ si ha $B/A \approx 8 \text{ MeV}$: perciò quando un sistema di 240 nucleoni passa dalla configurazione $A=240$ alla configurazione $A_1=120$ più $A_2=120$ nucleoni, si guadagna circa un MeV per nucleone, cioè un totale di circa 240 MeV per l'intero nucleo. La formula di Weizsacker porta ad un valore più realistico. Supponendo di avere una fissione simmetrica (il nucleo si spezza cioè in due frammenti uguali), si ha il processo:



La differenza di energia di legame è:

$$\Delta B = 2B(A/2, Z/2) - B(A, Z) = a_2(1 - 2^{1/3})A^{2/3} + a_3(1 - 2^{-2/3})Z^2A^{-1/3}$$

(si può facilmente verificare che i termini con a_1 e a_4 si semplificano nella differenza). Sostituendo i valori numerici di a_2 e a_3 da noi ricavati precedentemente si ottiene:

$$\Delta B = 13 \cdot (1 - 2^{1/3})A^{2/3} + 0.595 \cdot (1 - 2^{-2/3})Z^2A^{-1/3} = -3.4A^{2/3} + 0.22Z^2A^{-1/3}$$

che nel caso dello ${}^{235}_{92}\text{U}$ ($A=235, Z=92$) fornisce il valore: $\Delta B = 180 \text{ MeV}$.

9.2 Potere calorico della fissione.

È definito come l'energia sviluppabile sotto forma di calore da 1 kg di combustibile. Nella fissione di un nucleo si ottengono circa $\Delta B = 180 \text{ MeV}$. In 1 kg di ${}^{235}_{92}\text{U}$ vi è un numero di atomi pari a:

$$N = N_{\text{Av}} \frac{w}{M} = 6.023 \cdot 10^{23} \frac{10^3}{235} = 2.5 \cdot 10^{24} \text{ atomi}$$

Il potere calorico è allora:

$$Q = \Delta B \cdot N = 180 \frac{\text{MeV}}{\text{atomo}} \cdot 2.5 \cdot 10^{24} \text{ atomi/kg} = 4.5 \cdot 10^{26} \frac{\text{MeV}}{\text{kg}}$$

Poiché $1 \text{ MeV} = 1.6 \cdot 10^{-13} \text{ Joule} = 3.8 \cdot 10^{-14} \text{ cal}$, si ha: $Q = 1.7 \cdot 10^{13} \text{ cal/kg}$

Per confronto, il potere calorico del carbon fossile è pari a $7.5 \cdot 10^6 \text{ cal/kg}$, e quello del tritolo vale $7.3 \cdot 10^6 \text{ cal/kg}$.

9.3 La reazione a catena

L'emissione di neutroni a seguito della fissione di un nucleo è un fenomeno di capitale importanza perché rende possibile, in particolari condizioni, un fenomeno di eccezionale interesse pratico: la reazione a catena. Infatti, se ognuno dei neutroni risultanti da una fissione produce altre fissioni, il numero di queste cresce rapidamente, e al limite basterà un solo neutrone iniziale per provocare la fissione di un enorme numero di nuclei nel bersaglio. Tre parametri del processo di fissione sono particolarmente importanti al fine di realizzare e controllare la reazione a catena:

- 1) il numero ν di neutroni emessi per ogni fissione;
- 2) la distribuzione energetica dei neutroni emessi;
- 3) la probabilità P di indurre una fissione (legata alla sezione d'urto σ_{fiss} del processo) in funzione dell'energia dei neutroni.

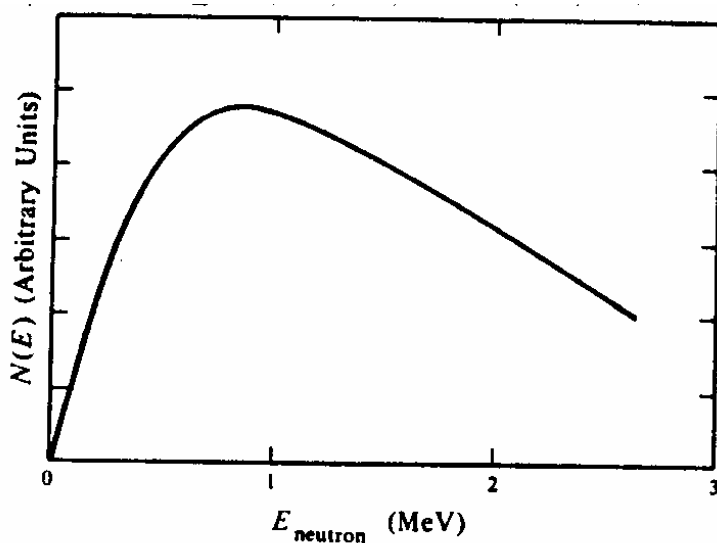


Fig. 9.6 Spettro di energia dei neutroni di fissione

Nella reazione $n + {}^{235}_{92}\text{U}$, il numero medio di neutroni emessi è $\nu=2.5$. La distribuzione energetica dei neutroni emessi e la probabilità di fissione in funzione dell'energia sono riportate nelle figure 9.6 e 9.7.

Da una fissione primaria risulteranno $P\nu$ fissioni secondarie, che a loro volta indurranno $(P\nu)^2$ nuove fissioni secondarie, e così via... Se si producono n_0 fissioni primarie, alla fine il numero di fissioni totali n sarà dato da: $n = n_0(1 + P\nu + (P\nu)^2 + (P\nu)^3 + \dots)$ Tale serie geometrica diverge se $P\nu > 1$

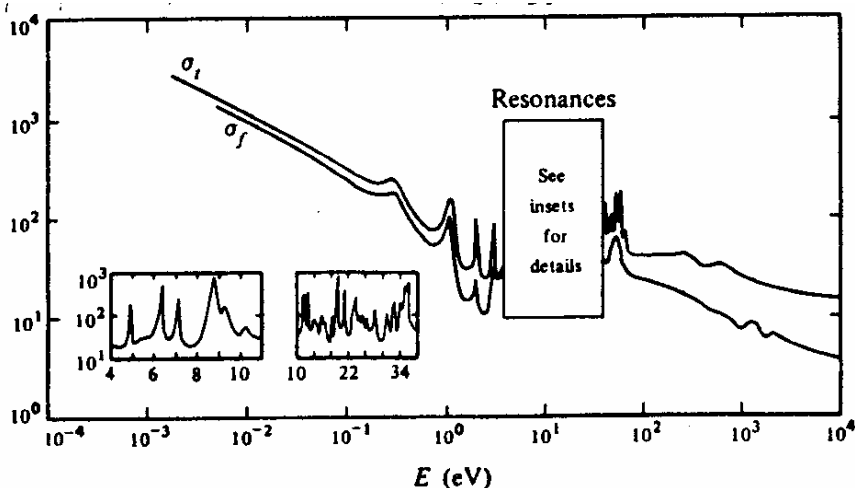
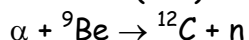
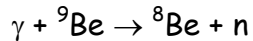


Fig. 9.7 Andamento della sezione d'urto di interazione neutrone-nucleo

Cioè, se N è il numero di atomi fissili presenti nel campione, dopo un tempo più o meno lungo tutti questi atomi saranno stati scissi e la reazione a catena si fermerà. Mentre ν è un dato che dipende solo dall'elemento considerato, la probabilità P dipende da molti fattori: dall'energia dei neutroni, dalla forma geometrica del materiale, eccetera. Quanto più grande è la superficie a parità di volume, tanti più neutroni usciranno dal materiale senza fare alcuna reazione, e quindi P diminuisce. Per minimizzare la fuga dei neutroni conviene minimizzare l'area a parità di volume, e perciò è preferibile la forma sferica. Ma il rapporto S/V diminuisce all'aumentare delle dimensioni della sfera: perciò aumentando la quantità di materiale diminuisce la fuga di neutroni, fino ad un certo raggio critico, per il quale la fuga e la produzione di neutroni si compensano esattamente. La quantità di materiale per la quale questo avviene si dice "massa critica": questa è la massa che dà un numero di neutroni costante: $P\nu = k = 1$. k è detto fattore di riproduzione. Un altro modo di variare P (e quindi k) è quello di variare l'energia dei neutroni. Questa si può ovviamente solo diminuire: e si vede (fig. 9.7) che al diminuire dell'energia P (e quindi k) aumentano. Si ottiene questo usando un "moderatore": per esempio carbonio o acqua pesante (D_2O) che rallentano i neutroni per urto ma non li catturano (l'idrogeno li catturerebbe, formando deuterio). Un metodo per diminuire P è invece quello di introdurre materiale che cattura i neutroni (per esempio il Cadmio $^{113}_{48}Cd$).

Nei reattori utilizzati per la produzione di energia, l'innesco della reazione a catena è facilitato e velocizzato dalla presenza, accanto al combustibile, di una sorgente di neutroni. Poiché non esistono elementi che emettono spontaneamente neutroni, le sorgenti di neutroni sono miscele di elementi alfa o gamma-emettitori e di Berillio naturale (9Be). Vengono sfruttati i meccanismi di reazione seguenti:





Il primo avviene nelle sorgenti Am-Be, sfruttando l'emissione alfa dell'elemento ${}^{241}\text{Am}$, mentre il secondo avviene nelle sorgenti di Ra-Be, dove la produzione di neutroni è provocata dai molti fotoni di diseccitazione associati al decadimento del Radio-226 e dei suoi figli.

Esercizio

nell'Uranio ${}^{238}_{92}\text{U}$ avviene una fissione spontanea ogni 100 ore per grammo di materiale. Trovare il tempo di dimezzamento dello ${}^{238}_{92}\text{U}$ per fissione spontanea. Per confronto ricordiamo che $T_{1/2} = 4.5 \cdot 10^9 \text{ y}$ per l'usuale decadimento alfa dello ${}^{238}_{92}\text{U}$.

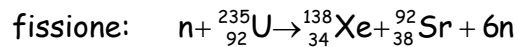
$$a = \lambda N = \frac{0.693}{T_{1/2}} N_{\text{Av}} \frac{w}{A} \quad a = 10^{-2} \text{ h}^{-1} = 1.2 \cdot 10^{-7} \text{ s}^{-1}$$

Pertanto:

$$T_{1/2} = \frac{0.693}{a} N_{\text{Av}} \frac{w}{A} = \frac{0.693}{1.2 \cdot 10^{-7}} 6.023 \cdot 10^{23} \frac{1}{238} = 2.03 \cdot 10^{18} \text{ s} = 6.37 \cdot 10^{10} \text{ y}. \text{ È questo}$$

un tempo molto lungo, pari a circa cinque volte l'età dell'Universo.

Come secondo esercizio calcoliamo il guadagno energetico nella trasformazione di



$$E = m({}^{235}_{92}\text{U}) - m({}^{138}_{34}\text{Xe}) - m({}^{92}_{38}\text{Sr}) - 5m_{\text{N}} = 164.2 \text{ MeV}$$

9.4 La Fusione nucleare

Partendo dalla curva di B/A in funzione di A , risulta chiaro che esiste un altro sistema di guadagnare energia mediante trasformazioni nucleari: nella zona a basso A , l'energia di legame per nucleone passa da valori di $1.1 \text{ MeV}/A$ (${}^2_1\text{H}$) fino a valori dell'ordine di $7 \text{ MeV}/A$.

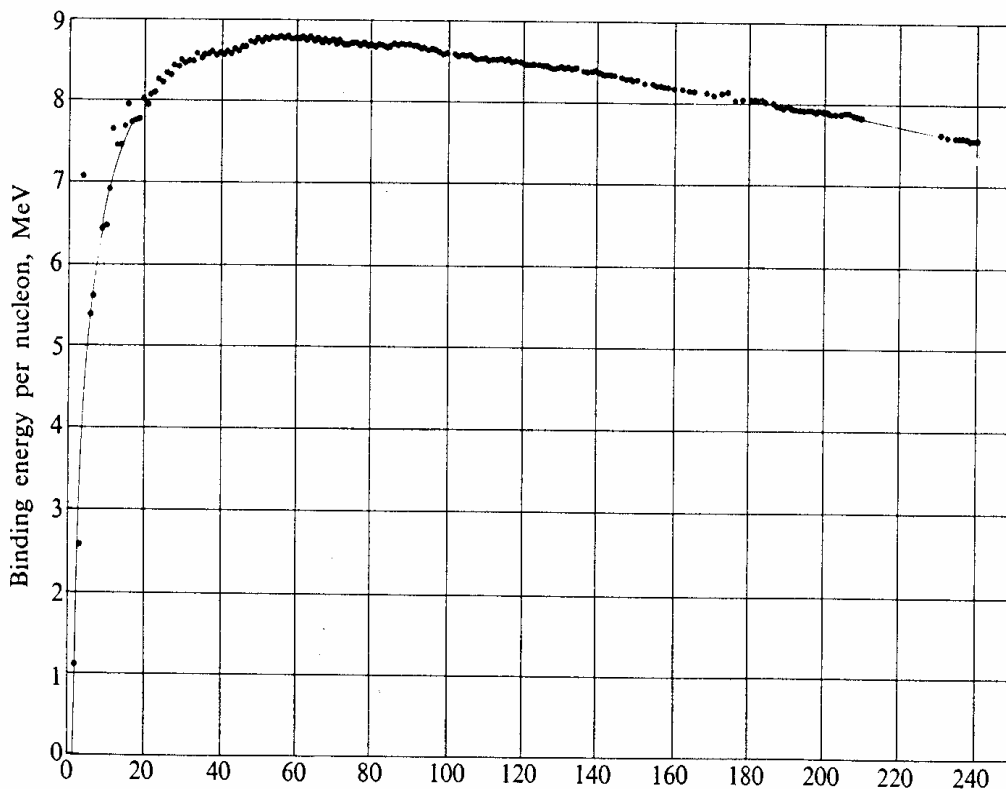
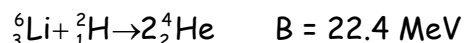
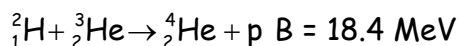
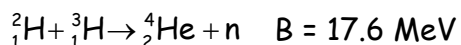
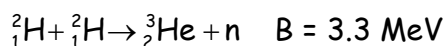


Fig. 9.8 Andamento di B/A in funzione di A

Sono esempi di questo tipo le seguenti reazioni:



Questo tipo di reazioni nucleari è detta "fusione" o "reazione termonucleare". Naturalmente, anche se in alcuni casi il valore di ΔB (e quindi dell'energia guadagnata) è maggiore, il guadagno energetico per ogni reazione è più basso che nel caso della fissione in quanto il numero di nucleoni interessati è molto più basso; il potere calorico è invece confrontabile. Infatti, per esempio:



Tra i due nuclei interagenti esiste un potenziale repulsivo dovuta alla forza di Coulomb: l'altezza della barriera coulombiana esistente tra due nuclei di carica rispettivamente Z_1 e Z_2 è data dalla solita espressione:

$$V_c(r) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r}$$

Ricordando che $e^2 = 1.44 \text{ MeV} \cdot \text{f}$ si vede che, anche per nuclei leggeri, alla distanza di "contatto" nucleare $r = R_1 + R_2$ (dove R_1 e R_2 rappresentano i raggi nucleari dei nuclei interagenti) di qualche fermi l'altezza della barriera è dell'ordine del MeV. D'altra parte queste reazioni avvengono ad energie cinetiche di gran lunga inferiori, grazie all'effetto tunnel. Tra l'altro l'effetto tunnel fu postulato per la prima volta da Gamow proprio per spiegare come le reazioni termonucleari potessero avvenire all'interno del sole (vedi nel seguito per una descrizione più approfondita).

In genere, dal punto di vista del possibile impiego pacifico dell'energia termonucleare, le reazioni avvengono tra due "gas" di particelle interagenti ad elevata energia cinetica e quindi ad elevata temperatura. Per avere un alto rendimento occorre raggiungere una energia cinetica (nel centro di massa dei due nuclei interagenti) dell'ordine della decina di keV. Poiché i gas possono essere trattati come gas perfetti, le energie cinetiche delle particelle seguiranno la distribuzione statistica di Maxwell-Boltzmann. dalla relazione $E \approx kT$ ($k = 8.6 \cdot 10^{-5} \text{ eV} \cdot \text{K}^{-1}$), si vede che la temperatura corrispondente a $1 \div 10 \text{ keV}$ vale $10^7 \div 10^8 \text{ K}$. Un gas a queste temperature è totalmente ionizzato e forma il cosiddetto "plasma": un insieme di nuclei nudi e di elettroni. È evidente quali siano i problemi tecnologici legati all'impiego delle reazioni di fusione per produrre energia: i nuclei, privati degli elettroni, si respingono ed il gas tende quindi ad espandere. Ovviamente nessun materiale a queste temperature può fungere da contenitore, e si cerca di sfruttare forti campi magnetici per confinare i nuclei e farli interagire. Per quanto riguarda poi il raggiungimento di tali elevate temperature, negli ultimi anni si è pensato di cedere energia agli atomi tramite laser di potenza, capaci di produrre altissime energie per brevissimi intervalli di tempo: per esempio si possono ottenere 100 Joule per tempi di durata dell'ordine del nanosecondo. Il problema tecnologico, tutt'altro che risolto, è quello di mantenere per tempi più lunghi lo stato di plasma attivo.

Ovviamente, al fine unico di studiare il processo di fusione, l'energia cinetica di 10 keV può essere fornita tramite una macchina acceleratrice (ciclotrone o acceleratore lineare). Certamente questo metodo non può essere utilizzato per produrre energia, ma solo a scopo di ricerca o per la produzione in piccolissime quantità di elementi leggeri, radioattivi o no.

Tramite il processo della fusione termonucleare hanno avuto origine gli elementi che oggi compongono l'Universo: si parla di nucleosintesi primordiale e di nucleosintesi

stellare: la prima avvenne durante i primi minuti di formazione dell'universo e produsse essenzialmente Elio, mentre la seconda avviene all'interno delle stelle e ne caratterizza la nascita, e la vita e la morte.

Daremo nel capitolo 21 una breve e sommaria descrizione della evoluzione dell'universo, cercando di seguirlo durante la sua espansione e conseguente raffreddamento, dall'istante iniziale del Big-Bang a come si presenta oggi alla nostra osservazione.

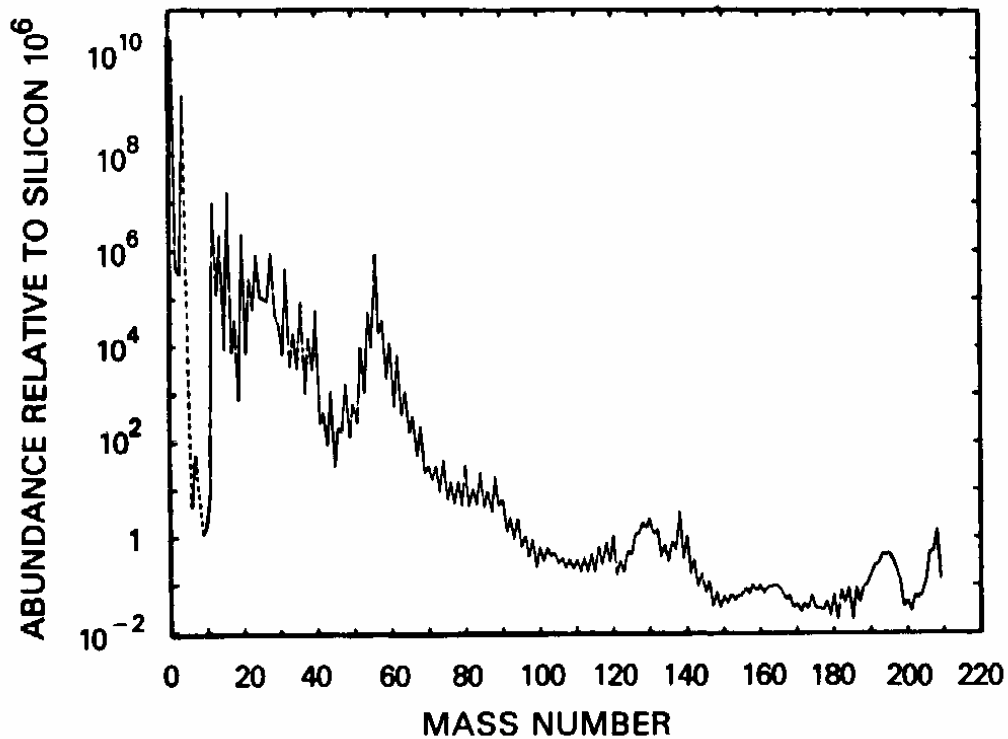


figura 8.9 l'abbondanza relativa degli elementi nell'Universo

La figura 9.9 rappresenta l'abbondanza relativa degli elementi nell'Universo: più del 99% della materia barionica è costituita da idrogeno (75%) ed Elio (25%). Gli elementi pesanti (con $A > 140$) costituiscono una frazione pari a una parte su 10^{12} dell'idrogeno.

Capitolo 10

L'origine degli elementi

10.1 Il Big-bang standard

Lo stato attuale dell'Universo è caratterizzato da quattro fenomeni di larga scala:

- 1) l'espansione dell'Universo. Sperimentalmente si osserva, attraverso misure di effetto Doppler sulla luce emessa dalla galassie, che esse sono in allontanamento da noi con una velocità proporzionale alla loro distanza. Questa osservazione sperimentale è riassunta nella legge di Hubble: $v(t) = H(t) \cdot R(t)$ che in pratica lega la velocità di espansione al raggio dell'Universo (attualmente la costante di Hubble vale: $H = 15 \text{ km/s per } 10^6 \text{ anni-luce} = 1.58 \cdot 10^{-18} \text{ s}^{-1}$.)
- 2) la radiazione di fondo a 2.76 K che riempie l'intero universo;
- 3) il rapporto che fissa il numero di barioni N_B rispetto al numero di fotoni N_γ . Esso vale: $N_B/N_\gamma \approx 10^{-9}$
- 4) l'abbondanza relativa in peso di circa 25% di ^4He e 75% di idrogeno.

Con questi dati, non è così arbitrario formulare un modello che descriva l'evoluzione dell'Universo, dall'istante iniziale ad oggi.

Inoltre, l'isotropia dell'universo osservata su larga scala ha portato all'adozione del così detto "principio cosmologico": esso stabilisce che l'evoluzione dell'Universo appare isotropa a tutti gli osservatori che partecipano all'espansione, ovunque e in ogni tempo. In altre parole la nostra Galassia si trova davvero al centro dell'Universo, ma lo stesso vale per ogni altra galassia.

L'energia nell'Universo conosciuto si presenta in parte sotto forma di radiazione, in parte sotto forma di materia. Per quanto riguarda la prima, la densità di energia del gas di fotoni segue la legge di Stefan-Boltzmann:

$$u_\gamma = \frac{\pi^2 (kT)^4}{15(\hbar c)^3} = 4.72 \cdot 10^{-3} T^4 \text{ eV} \cdot \text{cm}^{-3}$$

L'equivalente in massa è ottenuto dividendo per c^2 :

$$\rho_\gamma = 8.40 \cdot 10^{-36} T^4 \text{ g/cm}^3$$

Per $T = 2.76 \text{ K}$ si trova $\rho_\gamma = 8.40 \cdot 10^{-34} \text{ g/cm}^3$, che è decisamente trascurabile rispetto al valore della densità di materia attuale $\rho_0 \approx 2 \cdot 10^{-31} \text{ g/cm}^3$. Pertanto la maggior frazione di energia contenuta oggi nell'Universo, a differenza di quanto fu in passato, si trova sotto forma di materia ("matter-dominated epoch"). L'universo in espansione si comporta come un contenitore riempito di particelle: a causa dell'espansione, l'effetto Doppler fa aumentare la lunghezza d'onda dei fotoni (e delle particelle) in proporzione alle dimensioni del contenitore: $\lambda \propto R$ (qui R si può interpretare come la distanza tipica tra galassie). Questa interpretazione sembra restringere la discussione ad un piccolo volume sferico, ma poiché l'espansione è universale (principio cosmologico) le leggi derivate per un qualsiasi piccolo volume devono applicarsi a tutto l'universo nel suo insieme. Per simmetria sferica la materia esterna a questo volume parziale non esercita alcuna forza e per un volume limitato

le forze sono piccole e le velocità non relativistiche: pertanto, con buona approssimazione, possiamo usare la meccanica classica di Newton. Un aspetto tipico dello spettro di corpo nero è che, quando è osservato in un sistema di riferimento in moto relativo rispetto alla sorgente, mantiene la sua tipica forma, ma con una diversa temperatura caratteristica. Dalla legge di Wien: $T \propto 1/\lambda \propto 1/R$, la temperatura diminuisce mentre l'universo si espande. Per esempio, un fattore 1500 di diminuzione delle dimensioni dell'universo rispetto a quella attuale porta ad una temperatura $T=1500 \cdot 2.76K=4140K$, con una densità di radiazione:

$$\rho_\gamma = 8.40 \cdot 10^{-34} T^4 \text{ g/cm}^3 = 2,47 \cdot 10^{-21} \text{ g/cm}^3$$

La densità di materia invece dipende dal volume e quindi dalla terza potenza delle dimensioni lineari: $\rho_m \propto 1/R^3 \propto T^3$. Si può scrivere:

$$\rho_m = \rho_0 \cdot \left(\frac{T^3}{T_0^3} \right)$$

essendo $\rho_0 = 2 \cdot 10^{-31} \text{ g/cm}^3$ e $T_0=2.76 \text{ K}$ densità e temperatura attuali. Per $T=4140 \text{ K}$ si aveva: $\rho_m=6.7 \cdot 10^{-22} \text{ g/cm}^3$, così era $\rho_\gamma \gg \rho_m$. Questa epoca è dominata non dalla materia ma dalla radiazione ("radiation-dominated epoch") cioè allora l'universo conteneva essenzialmente radiazione, con un contenuto insignificante di materia. Al diminuire delle dimensioni dell'Universo la temperatura cresce e la densità di radiazione diventa sempre più alta. (Per esempio per una riduzione delle dimensioni di un fattore 10^{10} , la temperatura cresce fino a $T=2.76 \cdot 10^{10} \text{ K}$, che è al di sopra della soglia di temperatura $T_{pp}=1.2 \cdot 10^{10}K$ alla quale i fotoni possono creare coppie elettrone-positrone ($kT_{pp}=2m_e c^2=1.022 \text{ MeV}$): a questo punto la radiazione cessa di essere dominante e prevale nuovamente la materia, anche se si tratta di una "materia" ben diversa dalla materia fredda che compone l'Universo attuale. A temperature ancora più alte (volume ancora più piccolo) muoni, antimuoni ed altre particelle più le loro antiparticelle potevano essere create.

Consideriamo una sfera di raggio $R(t)$ che racchiude una porzione di universo, alla sua superficie una galassia tipica di massa m all'istante t . La massa totale di universo contenuta all'interno della sfera è:

$$M = \frac{4}{3} \pi R^3(t) \rho(t)$$

Sul moto relativo della galassia rispetto alla massa contenuta nella sfera, la massa di universo esterna non ha influenza. L'energia totale della galassia è allora data da:

$$E = \frac{1}{2} m v^2(t) - \frac{GmM}{R(t)} = mR^2(t) \cdot \left(\frac{1}{2} H^2(t) - \frac{4}{3} G\pi\rho(t) \right)$$

avendo usato la legge di Hubble.

Dato che E deve rimanere costante, e poiché $\rho(t) \propto 1/R^3(t)$, l'energia potenziale tende ad infinito per $R(t) \rightarrow 0$, ed i due termini in parentesi devono cancellarsi in questo limite:

$$\frac{1}{2} H^2(t) \approx \frac{4}{3} G\pi\rho(t)$$

La relazione precedente definisce il tempo di espansione caratteristico, che è appunto l'inverso della costante di Hubble:

$$t_{\text{exp}}(t) \equiv \frac{1}{H(t)} = \sqrt{\frac{3}{8\pi G \rho(t)}}$$

questa equazione è valida anche nel limite relativistico, se la densità $\rho(t)$ include anche l'equivalente in massa, E/c^2 , della densità di radiazione. Per esempio, a $\rho(t)=10^6 \text{g/cm}^3$, si trova $t_{\text{exp}}=1.4 \text{ s.}$ Da notare come la forza gravitazionale, tramite la costante G , sia la forza dominante su larga scala che controlla la dinamica dell'universo. In una epoca dominata dalla materia la massa contenuta in una sfera che si espande resta costante (conservazione del numero barionico e leptonico) e quindi $\rho_m \propto 1/R^3$. Invece in un'epoca dominata dalla radiazione $\rho_\gamma \propto T^4$ e, poiché $T \propto 1/R$, si ha che $\rho_\gamma \propto 1/R^4$. In generale si può quindi scrivere: $\rho_\gamma \propto 1/R^n$ con $n=3$ oppure $n=4$, a seconda che predomini la radiazione o la materia. Usando la relazione precedente: $H(t) \propto \rho(t)^{1/2}$ e la legge di Hubble: $v(t) = \frac{d}{dt}R(t) = H(t) \cdot R(t)$, si arriva

all'equazione differenziale:

$$\frac{d}{dt}R(t) = R(t)^{1-n/2},$$

che ha come soluzione:

$$t_2 - t_1 = \frac{2}{n} \left(\frac{1}{H(t_1)} - \frac{1}{H(t_2)} \right) = \frac{2}{n} \left(\frac{3}{8\pi G} \right)^{1/2} \left(\rho(t_1)^{-1/2} - \rho(t_2)^{-1/2} \right)$$

(i calcoli sono svolti nell'appendice alla fine del capitolo).

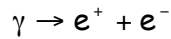
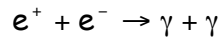
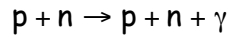
Per esempio, nell'era dominata dalla radiazione ($n=4$) una diminuzione di temperatura da $T_1=10^9 \text{ K}$ a $T_2=10^7 \text{ K}$ corrisponde ad un cambio di densità da $\rho(t_1)=8.4 \text{ g/cm}^3$ a $\rho(t_2)=8.4 \cdot 10^{-8} \text{ g/cm}^3$ in un tempo pari a $t_2-t_1 = \Delta t = 26.7$ giorni. Il risultato si può generalizzare per dare il tempo t necessario per decrescere la densità al valore $\rho(t)$:

$$t = \frac{2}{n} \left(\frac{3}{8\pi G \rho(t)} \right)^{1/2}$$

che è uguale a $\frac{1}{2} t_{\text{exp}}$ nell'era dominata dalla radiazione, e $\frac{2}{3} t_{\text{exp}}$ nell'era dominata dalla materia. Per esempio, a $T=4000 \text{ K}$ la densità della radiazione vale $\rho(t) = 2.1 \cdot 10^{-21} \text{ g/cm}^3$ ed il tempo necessario perché l'Universo raggiunga questa temperatura è di 470.000 anni, che è metà del tempo di espansione.

Descriviamo l'evoluzione dell'Universo a partire dalla temperatura $T=10^{12} \text{ K}$: nei primissimi istanti del Big-bang l'Universo, a temperatura ancora più elevata, era costituito da particelle ed antiparticelle esotiche a vita brevissima che si trovavano a densità, temperatura e pressione elevatissime ("primeval fireball"). Quando la temperatura scese, a causa dell'espansione dell'Universo, a 10^{12} K , la densità era ancora elevatissima: $\rho = 3.8 \cdot 10^{13} \text{ g/cm}^3$, che è praticamente la densità della materia nucleare. Sopravvissero essenzialmente neutrini, antineutrini, elettroni, positroni e

fotoni. Sopravvissero anche tracce di protoni e neutroni (circa uno ogni miliardo di fotoni), ma tutte le altre particelle ed antiparticelle pesanti erano state annichilate. Le reazioni in gioco, a questo stadio della vita dell'Universo, erano:



A questa epoca il normale decadimento del neutrone $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}$ è trascurabile a causa del "lunghissimo" tempo di dimezzamento (10.6 minuti) confrontato con il tempo caratteristico di espansione. Il numero dei neutrini e degli antineutrini è pari a quello degli elettroni e dei positroni. Il rapporto tra neutroni e protoni è puramente statistico e vale: $n/p \approx \exp(-\Delta mc^2/kT)$, dove Δm rappresenta la differenza dei valori delle masse (1.293 MeV). A $T=10^{12}$ K questo rapporto è circa uno. Sebbene neutroni e protoni interagiscano per formare il deuterio ($n + p \rightarrow d + \gamma$), la bassa energia di legame (2.2 MeV) unita all'altissimo flusso di fotoni di alta energia (circa 10^9 per ogni barione, come oggi) porta all'immediata fotodisintegrazione del deuterio ($\gamma + d \rightarrow n + p$). Così, a causa della fragilità del deuterio, ancora non è possibile la nucleosintesi, almeno fino a quando, con l'espansione ed il raffreddamento dell'Universo, l'energia media dei fotoni non scenderà al di sotto della soglia di fotodisintegrazione del deuterio (2.2 MeV corrispondono a circa $2.5 \cdot 10^{10}$ K).

Quando la temperatura scese a 10^{11} K la densità si abbassò al valore di $3.8 \cdot 10^9$ g/cm³, neutrini ed antineutrini cessarono di interagire con le altre particelle e con i fotoni ed uscirono dall'equilibrio, ossia si disaccoppiarono dal resto dell'Universo. Da quell'istante (circa 0.022 secondi dopo il Big-bang) non furono più prodotti nuovi neutrini né si annichilarono vecchi neutrini: i neutrini superstiti, non potendo più interagire con le altre particelle, si comportarono come particelle libere, espandendosi con l'universo ed aumentando la loro lunghezza d'onda all'aumentare delle dimensioni dell'universo. Essi cessarono di giocare un ruolo attivo, ma continuarono a contribuire alla densità dell'universo. Dovrebbero, al pari della famosa radiazione di fondo dei fotoni da 2.76 K, essere in tutto lo spazio tutt'oggi (circa 100 neutrini per centimetro cubo), ad una temperatura di circa 2 K. Purtroppo non vi è modo alcuno di rivelare la loro presenza.

Quando la temperatura dell'Universo raggiunse i 10^{10} K ($kT=0.86$ MeV), la maggior parte dei fotoni non avevano più l'energia sufficiente a creare coppie elettrone-positrone. Questo distrusse l'equilibrio tra fotoni e particelle poiché, mentre positroni ed elettroni continuavano ad interagire per produrre fotoni, essi non potevano più essere rimpiazzati dalla reazione inversa di creazione di coppie. Tutti i

positroni alla fine vennero consumati e rimase un piccolo eccesso di elettroni ($N_e/N_\gamma \approx 10^{-9}$).

Quando la temperatura dell'Universo scese al di sotto di 10^9 K ($kT=0.086$ MeV), divenne incredibilmente più facile convertire neutroni in protoni che il viceversa, ed il rapporto n/p scese fino a che venne raggiunta una condizione di stabilità con 87% di protoni e 13% di neutroni. A questo punto l'energia della maggior parte dello spettro di corpo nero dei fotoni era troppo bassa perché questi potessero dare origine a reazioni di fotodisintegrazione del deuterio, ed iniziò la nucleosintesi cioè una serie di reazioni nucleari il cui risultato predominante fu la formazione di ^4He , fino al completo utilizzo di tutti i neutroni liberi. E poiché i neutroni costituiscono il 50% in peso dello ^4He e furono completamente utilizzati per la sua formazione (oltre ad un corrispondente numero di protoni) la frazione in peso di ^4He divenne semplicemente il doppio della frazione in peso dei neutroni nella materia barionica, cioè il 26%. Questo valore previsto dalla teoria è in ottimo accordo con l'abbondanza di ^4He misurata nell'Universo. L'Universo, al tempo di formazione dello ^4He era composta da un eccesso di protoni e da nuclei di Elio che, assieme agli elettroni, formavano un gas ionizzato (plasma) in equilibrio termico con il mare di fotoni. Anche gli enigmatici neutrini, ormai disaccoppiati, sopravvivevano. Da notare che l'origine dell'eccesso di protoni ed elettroni rispetto ad antiprotoni e positroni (dal quale deriva l'Universo come noi lo conosciamo) è una questione fondamentale e non ancora risolta della cosmologia.

La temperatura della materia e della radiazione continuarono a decrescere mentre l'Universo si espandeva. Nell'intervallo di tempo tra 10^2 e 10^{13} secondi ($\approx 3 \cdot 10^5$ anni) la densità e l'energia dei fotoni diminuì fino a che fotoni e particelle non interagirono più tra loro: di conseguenza la dinamica su larga scala dell'Universo cambiò e la temperatura cominciò a scendere un po' più velocemente di prima. Quando la temperatura scese al di sotto dei 5000 K ($kT=0.43\text{eV}$, $\rho = 7.6 \cdot 10^{-21}$ g/cm³, $t_{\text{exp}}=5 \cdot 10^5$ anni) gli ioni e gli elettroni del gas ionizzato cominciarono a combinarsi per formare degli atomi, dando origine ad un gas neutro. Da notare che la combinazione iniziò ben al di sotto della temperatura corrispondente all'energia di ionizzazione dell'idrogeno (13.6 eV, $T=160.000$ K) a causa della distribuzione energetica dei fotoni (distribuzione di Plank). Questo periodo è denominato momento di disaccoppiamento, dopo il quale non restarono più cariche libere per diffondere i fotoni: l'era del dominio della radiazione cessò ed iniziò l'era della materia. La temperatura della radiazione scese più velocemente di prima, cioè $T \propto 1/t^{2/3}$, mentre il gas neutro si raffreddò seguendo le leggi dei gas perfetti, con una dipendenza temporale del tipo $T \propto 1/t$. Dopo il disaccoppiamento (e fino ad oggi) le temperature della radiazione e della materia sono radicalmente differenti in quanto la probabilità (sezione d'urto) delle interazioni radiazione-materia non è abbastanza elevata, rispetto al ritmo di espansione dell'Universo, da mantenere radiazione e materia in equilibrio termico.

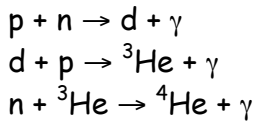
Con la neutralizzazione della carica l'Universo, fino ad allora opaco, divenne trasparente consentendo alla radiazione di attraversarlo senza interazioni conservando una immagine del plasma dal quale i fotoni erano stati diffusi per l'ultima volta. La temperatura era di circa 4500 K, che corrisponde alla temperatura della superficie del Sole. Originariamente emessa come luce visibile o infrarossa con una lunghezza d'onda piccata a $0.7 \mu\text{m}$, questa radiazione di fondo ha subito un "red-shift" di un fattore 1500: noi oggi osserviamo il picco ad una lunghezza d'onda di circa 1 mm. In un sistema di riferimento solidale con il plasma all'istante del disaccoppiamento la temperatura caratteristica della radiazione è di 4500 K; nel nostro sistema di riferimento la sua temperatura è 2.76 K. Originatasi circa 500.000 anni dopo il Big-bang, questa radiazione di fondo rappresenta un velo oltre il quale non possiamo vedere indietro nel tempo usando come sonda la radiazione elettromagnetica. Vi sono comunque altri relitti risalenti ad epoche precedenti: l'abbondanza dei nuclei leggeri, la densità della materia rispetto ai fotoni, l'eccesso di materia sull'antimateria.

10.2 Nucleosintesi nell'Universo primordiale e nelle stelle

Già nel 1937 von Weizsacker tentò di dimostrare teoricamente come gli elementi pesanti potessero essere prodotti. Egli parlò di un primordiale stato supermassivo (protostella) dell'Universo dopo il quale il sistema esplose nell'Universo in espansione. Gamow nel 1940 fece osservare che l'universo non sarebbe potuto esistere in questo protostato stazionario di altissima temperatura, e propose la teoria secondo la quale gli elementi leggeri si sarebbero in gran parte formati durante i primi istanti di rapidissima espansione dell'universo, ed introdusse l'idea fondamentale della nucleosintesi del Big-bang. Quando l'universo si espanse e si raffreddò alla temperatura $T=7.5 \cdot 10^9$ K, il rapporto neutroni-protoni si congelò al valore di circa 1/7, e tale rimase fino alla temperatura $T=10^9$ K, quando deuterio e quindi nuclei più pesanti poterono formarsi. Quando la temperatura scese ben al di sotto di 10^9 K, tutti i neutroni erano stati convertiti in protoni od inglobati nello ^4He . La nucleosintesi attraverso le particelle cariche si arrestò perché le energie termiche non erano più sufficienti a far superare ai nuclei reagenti la barriera coulombiana. Gamow pensò che successivamente si fossero formati gli elementi più pesanti attraverso una successione di catture di neutroni (insensibile alla barriera coulombiana) e decadimenti β : L'Universo di Gamow era assimilabile ad un gigantesco reattore a fusione. Successivamente, la scoperta che in natura non esistono nuclei stabili con numero di massa 5 e 8 implicò che la nucleosintesi di elementi più pesanti dello ^4He era praticamente impossibile, non potendo questo fornire nuclei stabili né reagendo con i protoni ($A=5$), né reagendo con altri nuclei di ^4He ($A=8$). Nel 1957 Fowler ed Hoyle, e indipendentemente Cameron, ipotizzarono che la nucleosintesi degli elementi avvenisse nelle stelle. Calcoli sulla abbondanza intergalattica di ^4He confermarono tuttavia che vi fu una prima fase di nucleosintesi nell'Universo

primordiale, che si arrestò con la produzione di ${}^4\text{He}$. La teoria oggi più accreditata è di fatto un insieme delle due teorie: nelle stelle ha origine la formazione degli elementi più pesanti, a partire dalla formazione di un nucleo di ${}^{12}\text{C}$ dalla fusione di tre nuclei di ${}^4\text{He}$

Durante i primi minuti del Big-bang, quando la temperatura era $T=10^9$ K e la densità $\rho=10^{-5}$ g/cm³, tutti i neutroni liberi servirono per dare vita alle seguenti reazioni:



La nucleosintesi si arrestò a questo punto, e riprese successivamente quando, dopo circa 10^8 anni dall'istante iniziale del Big-bang, nell'Universo si formarono le prime galassie e successivamente le stelle. Nelle stelle della sequenza principale (le più diffuse, come il nostro Sole), il meccanismo di produzione di energia avviene attraverso la trasformazione di quattro protoni in un nucleo di ${}^4\text{He}$, secondo il processo:

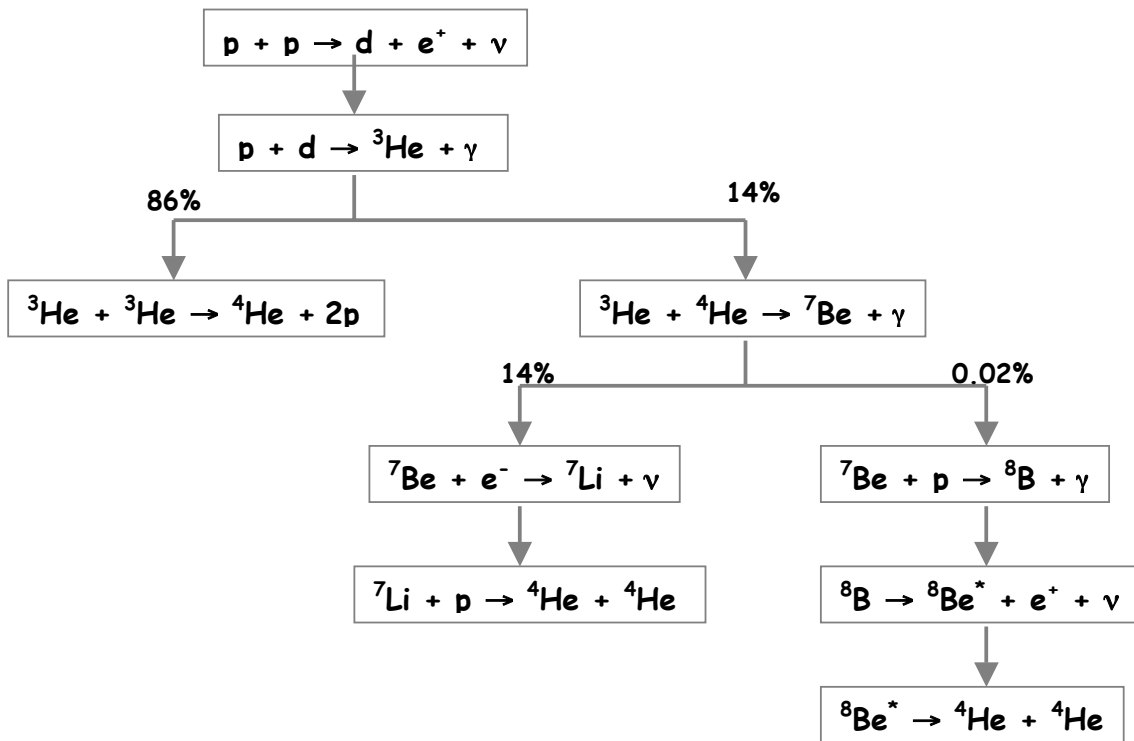


Fig 10.1 La catena p-p

Il processo avviene attraverso una serie di reazioni a due corpi, che costituiscono la catena p-p, schematizzata nella figura 10.1.

Da notare che la prima reazione della catena è regolata da una interazione debole (decadimento beta) ed è quindi contraddistinta da una sezione d'urto estremamente piccola rispetto a quelle delle reazioni che seguono: $\sigma_{pp} \approx 10^{-51} \text{cm}^2$, a differenza delle altre sezioni d'urto che hanno valori $\sigma \approx 10^{-36} \text{cm}^2 \div 10^{-33} \text{cm}^2$. Questo fatto impedisce che le stelle brucino velocemente tutto il loro combustibile: infatti la reazione più lenta regola la velocità di trasformazione della catena. Se anche la reazione di cattura p-p fosse regolata da interazione forte, le stelle non permarrebbero per tempi dell'ordine di 10^{10} anni in condizioni di equilibrio, ma libererebbero la loro energia in gigantesche esplosioni.

10.3 Come nasce una stella

La formazione di una stella comincia nel momento in cui una porzione di gas interstellare si raffredda al punto che diventa instabile e comincia a collassare a causa del prevalere dell'attrazione gravitazionale (E_G) sul moto di agitazione termica degli atomi costituenti il gas (E_T), vale a dire quando $E_G + E_T \leq 0$

$$E_G = \int_0^R -G \frac{M(r)}{r} \rho(r) \cdot 4\pi r^2 dr \approx -\left(G \frac{M(r)}{r}\right) \cdot M$$

$$E_T = \int_0^R \frac{3}{2} \frac{kT}{m} \rho(r) \cdot 4\pi r^2 dr \approx \left(\frac{3}{2} \frac{kT}{m}\right) \cdot M$$

dove M , R e T sono la massa, il raggio e la temperatura della porzione di gas ed m è il peso molecolare medio degli atomi che lo compongono.

Dapprima il calore che risulta dalla contrazione è rapidamente irradiato all'esterno a causa della elevata trasparenza del gas che in questa fase si trova essenzialmente in caduta libera. Via via che il gas diventa più denso la sua opacità aumenta e parte dell'energia può essere trattenuta. La nube gassosa si stabilizza e incomincia a costituire una stella quando la frazione di energia termica assorbita (E_T) risulta la metà di quella gravitazionale (E_G), come si ricava richiedendo che valga, istante per istante, il teorema del viriale:

$$2 \cdot E_T = - E_G$$

che si ottiene imponendo la condizione di equilibrio idrostatico (pressione interna in grado di bilanciare il peso degli strati esterni) ed il soddisfacimento dell'equazione di stato dei gas perfetti. Il percorso evolutivo che va dal collasso iniziale e questa condizione di equilibrio si svolge in un intervallo di soli $30 \div 100$ anni: a questo punto la stella diventa visibile. Poiché la stella irradia dalla sua superficie, si deve contrarre contemporaneamente quanto basta a rendere conto dell'energia emessa e di quella trasformata in agitazione termica interna: questo stadio dell'evoluzione stellare è detto di Kelvin-Helmholtz. In una stella che si contrae la conversione di energia gravitazionale in energia interna porta ad un progressivo aumento della temperatura che alla fine può raggiungere al centro della stella valori di 10^7 K tali

da consentire l'innescare di reazioni nucleari tra protoni per formare l'Elio, come vedremo tra breve. La quantità di energia rilasciata in questi processi è molto grande rispetto a quella liberata dalla contrazione gravitazionale: la stella raggiungerà un nuovo stadio, di lunga durata, in cui la contrazione gravitazionale sarà bloccata, l'energia nucleare prodotta al centro della stella fluirà al di fuori della superficie e per un lungo periodo non vi saranno variazioni significative di dimensioni, temperatura e forma della stella. L'insieme delle stelle che si trovano in questo stadio costituiscono la cosiddetta sequenza principale del diagramma di Hertzsprung-Russel (figura 10.2) in cui è rappresentata la luminosità delle stelle in funzione della loro temperatura superficiale.

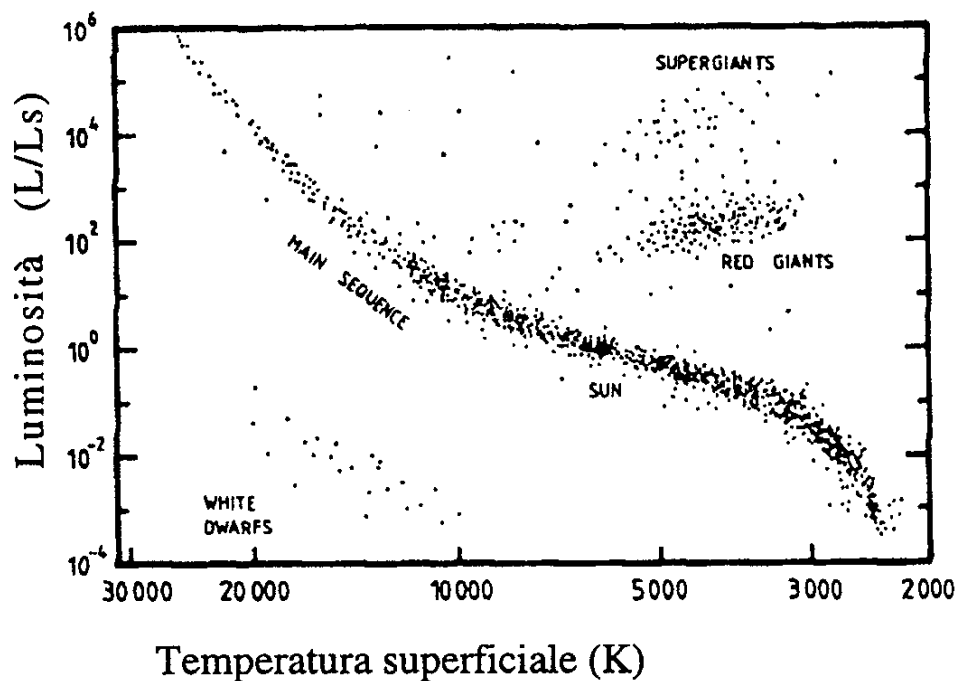


Fig 10.2 Il diagramma H-R (Hertzsprung-Russel)

21.4 Evoluzione della stella

Se si raffigura la storia di una stella in un diagramma H-R (figura 10.3) si vede che a partire dallo stadio di Kelvin-Helmholtz, all'aumentare della temperatura la stella si sposta con piccole variazioni della luminosità in orizzontale fino a raggiungere la sua posizione nella sequenza principale. La luminosità di una stella è strettamente connessa alla sua massa. Una stella con una massa dieci volte più grande del sole ha tipicamente una luminosità che è di un fattore 10^4 più grande: per compensare

questa enorme fuoriuscita di energia deve logicamente convertire idrogeno in elio più rapidamente del sole.

Così, mentre nel sole la scorta di idrogeno durerà almeno per circa 10 miliardi di anni, nelle stelle massive sarà esaurita in poche centinaia di migliaia di anni. Questo è un tempo ben più breve dell'età stimata della Galassia, che vale 12÷18 miliardi di anni: la storia dell'universo ha dunque conosciuto già parecchie generazioni di stelle calde e massive e proprio queste stelle hanno dato origine, come vedremo, alla produzione degli elementi più pesanti e alla loro abbondanza relativa.

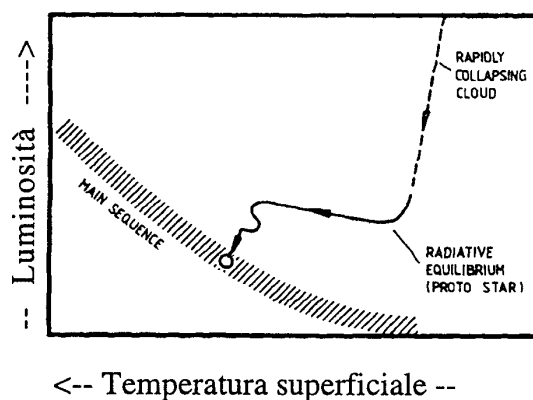


Fig 10.3 La nascita di una stella

Una stella rimane nella sua posizione originaria nella sequenza principale finché l'energia nucleare generata al suo interno è sufficiente a sostenere la sua luminosità. Quando è pressoché esaurito l'idrogeno presente nella parte più interna della stella, la contrazione gravitazionale riprende finché si innesca la combustione dell'idrogeno in una shell più esterna. In questa situazione però l'energia prodotta è maggiore di quella che viene emessa attraverso la superficie: l'innalzamento della temperatura si traduce in un incremento della pressione che ripristina l'equilibrio idrostatico attraverso una espansione, accompagnata da un raffreddamento degli strati più esterni. La stella, irraggiando una quantità di energia maggiore, diventa più luminosa e nel contempo più rossa a causa del raffreddamento della superficie: si muove dunque verso la regione in alto a destra del diagramma H-R diventando una gigante rossa.

E' stato calcolato che ad una temperatura centrale di circa 10^8 K il sole diventerà una stella rossa gigante di raggio pari a circa 30 volte quello attuale e con una luminosità 100 volte più grande. A questo punto gran parte dell'idrogeno presente nella stella sarà esaurito ma la temperatura centrale diventerà sufficientemente alta da innescare la combustione dell'elio. Il percorso evolutivo successivo dipende essenzialmente dalla massa della stella. Per masse stellari dell'ordine di quella

solare la contrazione successiva all'esaurimento dell'elio non è tale da comportare un innalzamento della temperatura sufficiente ad innescare la reazione di carbonio ed ossigeno: la stella attraversa perciò una fase caratterizzata da grande instabilità con fluttuazioni dell'energia irradiata, spostandosi verso la regione in basso a sinistra del diagramma H-R (figura 10.4 a).

Raggiunto lo stadio di nana bianca la stella, ormai di dimensioni planetarie, cessa definitivamente di contrarsi a causa della fortissima pressione esercitata dal gas di elettroni degeneri: un progressivo raffreddamento la porterà a diventare, dopo centinaia di milioni di anni, una nana nera cioè una stella morta. Masse molto più grandi di quelle solari comportano d'altro canto un'evoluzione assai più rapida e spettacolare (fig 10.4 b): contrazioni gravitazionali ed inneschi di reazioni tra elementi sempre più pesanti si succedono a determinare temperature centrali sempre più elevate, fino a miliardi di gradi. Questo processo, mostrato schematicamente in figura 10.5, non può continuare indefinitamente: ogni combustione nucleare produce sempre meno energia rispetto a quella che la ha preceduta e quando il centro della stella diventa costituito di material del gruppo del ferro, per i quali l'energia di legame è massima, le reazioni termonucleari si arrestano.

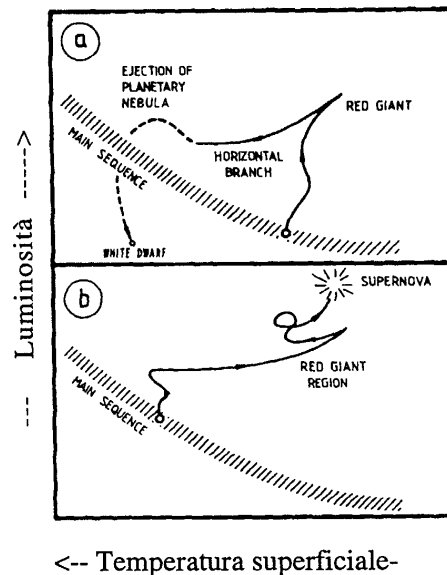


Fig 10.4 evoluzione di una stella in funzione della massa

La contrazione gravitazionale rende instabile la stella e la fa collassare: fotodisintegrazioni, catture elettroniche e neutrini che escono dalla stella provocano perdite di energia che possono essere compensate solo attraverso un

rapidissimo collasso gravitazionale del nucleo di ferro che subisce alla fine un'enorme esplosione. Si tratta del fenomeno delle supernovae, come quella che esplose nella costellazione del toro nel 1054 a.c. rimanendo visibile di giorno per 23 giorni e di notte per un totale di 21 mesi. Gli elementi formatisi durante gli stadi precedenti vengono così dispersi nello spazio interplanetario e costituiscono l'universo attuale.

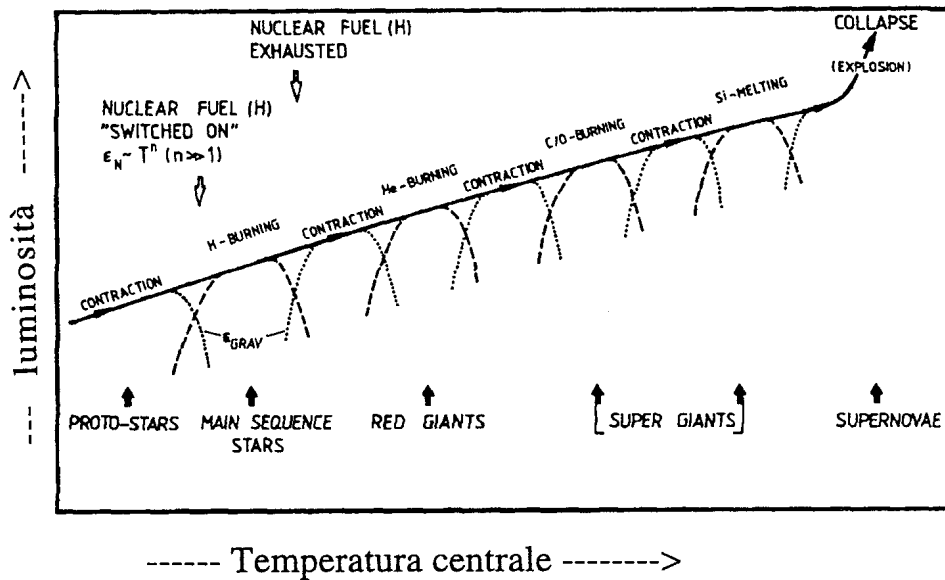


Fig 9.5 evoluzione di una stella massiva

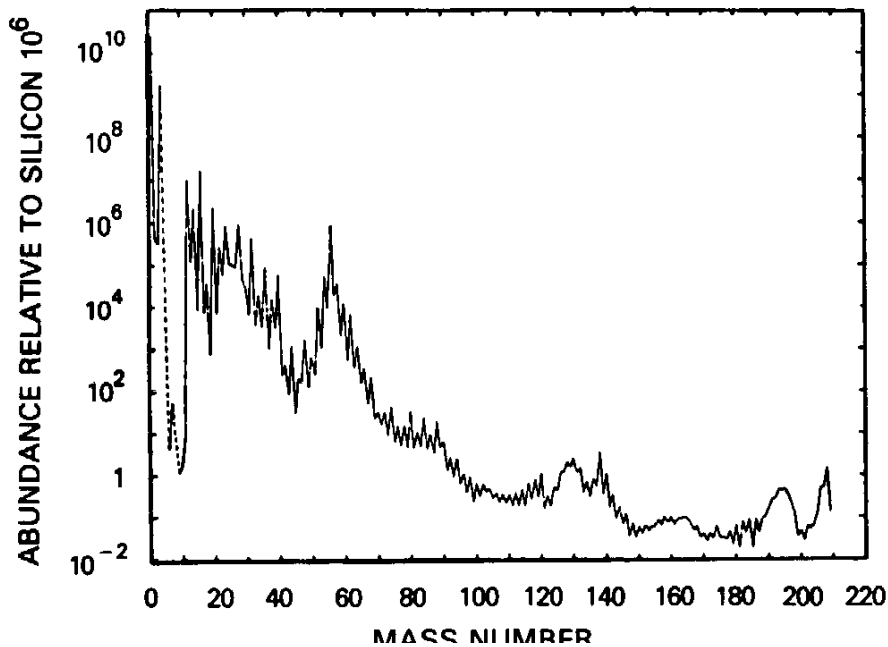


Fig 9.6 Abbondanza relativa degli elementi nel cosmo

La figura 10.6 rappresenta l'abbondanza relativa degli elementi nella nostra galassia in funzione del numero di massa A. La presenza di materiali pesanti (notare comunque i dodici ordini di grandezza della scala delle ordinate!) è segno che l'universo ha conosciuto parecchie generazioni di stelle. Nel seguito vedremo come si sono formati elementi di numero di massa superiore al Ferro e spiegheremo come si sono formati i nuclei Li, Be B nella profonda valle tra il picco dell'Elio e quello del Carbonio.

91.5 La fusione nelle stelle e l'origine degli elementi

La temperatura interna del sole è pari a 10^7 K, corrispondente ad una energia cinetica dell'ordine del keV. Le reazioni di fusione procedono tramite effetto tunnel. Nel plasma stellare le particelle hanno una distribuzione maxwelliana di velocità e la sezione d'urto di interazione sarà funzione della velocità relativa dei nuclei interagenti, anch'essa distribuita secondo la statistica di Maxwell-Boltzmann. Consideriamo un gas stellare con N_A particelle per unità di volume di tipo A e N_B particelle per unità di volume di tipo B. La sezione d'urto dipende soltanto dalla velocità relativa $v = v_A - v_B$: quindi si può considerare indifferentemente particelle di tipo A o B come proiettili o come bersagli. Se scegliamo nuclei di tipo A che si muovono con velocità v come proiettili, i nuclei B devono essere considerati in quiete. Di conseguenza i proiettili vedono una area effettiva di reazione $F = \sigma(v)N_B$. Il flusso J incidente è dato invece da: $J = N_A v$. Il numero di reazioni per unità di volume e di tempo r (rate) sarà allora:

$$r = FJ = N_A N_B \sigma(v)v$$

Se la velocità delle particelle ha una distribuzione $\varphi(v)$, è necessario effettuare il prodotto di convoluzione della funzione $\sigma(v)v$.

$$r = N_A N_B \int_0^{\infty} \varphi(v) \sigma(v) v dv = N_A N_B \langle \sigma v \rangle$$

La funzione $\varphi(v)$ è descritta dalla distribuzione di Maxwell-Boltzmann:

$$\varphi(v) = 4\pi v^2 \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT} \right)$$

La funzione $\varphi(v)$ può essere riscritta in termini dell'energia e risulta:

$$\varphi(E) \propto E \exp\left(-\frac{E}{kT} \right)$$

A bassa energia, con $E \ll kT$, la funzione $\varphi(E)$ cresce quasi linearmente con E e raggiunge un massimo per $E=kT$. Ad alta energia, per $E \gg kT$, la funzione decresce esponenzialmente e tende asintoticamente a zero. se la temperatura è misurata in unità 10^6 K (T_6), il valore numerico di kT in keV è dato da: $kT=0.0862T_6$. A temperatura ambiente il valore di kT ($2.6 \cdot 10^{-5}$ keV) è piccolo, mentre alla temperatura interna del sole ($T_6=15$) $kT=1.3$ keV e in una supernova ($T_6=5000$) $kT=430$ keV. Per le reazioni nucleari che avvengono nei mezzi stellari entrambi i

nuclei interagenti hanno velocità descritte dalla distribuzione di Maxwell-Boltzmann:

$$\varphi(v_A) = 4\pi v_A^2 \left(\frac{m_A}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv_A^2}{2kT}\right)$$

$$\varphi(v_B) = 4\pi v_B^2 \left(\frac{m_B}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv_B^2}{2kT}\right)$$

Perciò il rate di reazione per coppia di particelle $\langle \sigma v \rangle$ implica un integrale doppio su entrambe le distribuzioni di velocità:

$$\langle \sigma v \rangle = \int_0^\infty \int_0^\infty \varphi(v_A) \varphi(v_B) \sigma(v) v dv_A dv_B$$

v_A e v_B sono legate alla velocità relativa v e alla velocità del centro di massa V dalle relazioni:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B$$

$$\mathbf{V} = \frac{m_A \mathbf{v}_A + m_B \mathbf{v}_B}{m_A + m_B}$$

Usando la massa ridotta $\mu = \frac{m_A m_B}{m_A + m_B}$ e la massa totale $M = m_A + m_B$, il rate può

essere scritto in termini della variabili v e V :

$$\langle \sigma v \rangle = \int_0^\infty \int_0^\infty \varphi(V) \varphi(v) \sigma(v) v dV dv = \int_0^\infty \varphi(V) dV \int_0^\infty \varphi(v) \sigma(v) v dv$$

E ricordando che le funzioni di distribuzione sono normalizzate, rimane:

$$\langle \sigma v \rangle = \int_0^\infty \varphi(v) \sigma(v) v dv$$

Esplicitando le variabili, e ricordando che $E = \frac{1}{2} \mu v^2$, si ottiene:

$$\langle \sigma v \rangle = \left(\frac{8}{\pi \mu} \right)^{1/2} \frac{1}{(kT)^{3/2}} \int_0^\infty \sigma(E) E \exp\left(-\frac{E}{kT}\right) dE$$

Quanto alla sezione d'urto $\sigma(E)$, essa può essere fattorizzata nel seguente modo:

$$\sigma(E) = \frac{1}{E} S(E) P(E)$$

dove:

il termine $1/E$ tiene conto della natura quantistica dell'interazione: $\frac{1}{E} \propto \pi \lambda^2$;

$P(E)$ rappresenta la probabilità di penetrazione della barriera coulombiana;

$S(E)$, detto "fattore astrofisico" rappresenta la parte prettamente nucleare della sezione d'urto.

Dalla meccanica quantistica $P(E)$ è data dal rapporto dei moduli quadri della funzione d'onda a distanza nucleare e fuori dalla barriera:

$$P(E) = \frac{|\psi(R_n)|^2}{|\psi(R_c)|^2}$$

dove R_c rappresenta il punto di inversione classica del moto, cioè la distanza ricavata dalla relazione: $E = V(R_c) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{R_c}$, ed R_n è il raggio del nucleo

Se l'energia cinetica relativa E è molto minore dell'altezza di barriera $E_c = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{R_n}$,

si può scrivere: $P(E) = \exp(-2\pi\eta)$, dove $\eta = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar v}$. In termini numerici, esprimendo l'energia in keV e la massa in amu, si ha:

$$2\pi\eta = 31.29 Z_1 Z_2 \left(\frac{\mu}{E} \right).$$

La sezione d'urto si scrive quindi nel seguente modo:

$$\sigma(E) = \frac{1}{E} \exp(-2\pi\eta) \cdot S(E)$$

Pertanto il rate di reazione sarà:

$$\langle \sigma v \rangle = \left(\frac{8}{\pi \mu} \right)^{1/2} \frac{1}{(kT)^{3/2}} \int_0^\infty S(E) \exp\left(-\frac{E}{kT} - \frac{b}{E^{1/2}} \right) dE$$

dove il parametro b è legato ovviamente ad η e vale: $b = (2\mu)^{1/2} \pi e^2 Z_1 Z_2 / \hbar$. La quantità b^2 è anche detta energia di Gamow, indicata con E_G .

Tenuto presente che in genere il fattore astrofisico $S(E)$, in assenza di fenomeni risonanti è quasi indipendente dall'energia, l'andamento con l'energia del rate di reazione risulta dal prodotto di due funzioni:

- $\exp(-E/kT)$, che diminuisce all'aumentare dell'energia;
- $\exp\left[-(E_G/E)^{1/2}\right]$ che viceversa aumenta con l'energia.

Il risultato è mostrato in figura, dove è chiaro che alle reazioni nucleari contribuiscono solo le particelle più energetiche, quelle che si trovano sulla coda della distribuzione di Maxwell-Boltzmann. Inoltre le reazioni nucleari avvengono solo nell'introno di una ben precisa energia E_0 corrispondente al massimo della funzione integranda (ottenuto uguagliando a zero la derivata prima) data da:

$$E_0 = \left(\frac{bkT}{2} \right)^{2/3} = 1.22 \cdot (Z_1^2 Z_2^2 \mu T_6^2)^{1/3} \text{ keV}$$

Per esempio in una stella come il sole dove $T_6 = 15$, il valore di E_0 per alcune reazioni è il seguente:

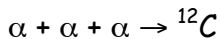
$p + p$	$E_0 = 5.9 \text{ keV}$
$p + {}^{14}\text{N}$	$E_0 = 26.5 \text{ keV}$
$\alpha + {}^{12}\text{C}$	$E_0 = 56 \text{ keV}$
${}^{16}\text{O} + {}^{16}\text{O}$	$E_0 = 237 \text{ keV}$

Tenuto conto che $kT = 1.3 \text{ keV}$ (per $T_6 = 15$), appare chiaro come nel sole, a parte l'abbondanza relativa dei nuclei reagenti, reazioni come $\alpha + {}^{12}\text{C}$ oppure ${}^{16}\text{O} + {}^{16}\text{O}$ non possono in pratica avvenire a causa della elevata barriera coulombiana. di fatto

queste reazioni avvengono in stelle più calde, durante le loro fasi evolutive successive a quella della combustione dell'idrogeno (fase attuale del nostro Sole).

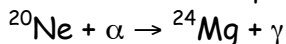
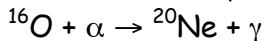
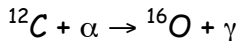
La fusione è il meccanismo di formazione degli elementi, almeno fino al Ferro, e le stelle rappresentano le fornaci cosmiche nelle quali questi processi avvengono: in fasi successive della vita delle stelle la temperatura centrale aumenta ed è quindi possibile formare elementi a Z via via crescente.

Quando tutto l'idrogeno è bruciato e trasformato in Elio, esaurito il combustibile nucleare la stella collassa su se stessa e l'energia gravitazionale è convertita in energia termica. La temperatura della zona centrale aumenta ed inizia il ciclo di combustione dell'Elio. La reazione chiave è la formazione del carbonio, attraverso la reazione:



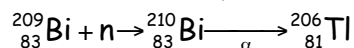
che avviene però in due tempi. Dapprima: $\alpha + \alpha \leftrightarrow {}^8\text{Be}$ cioè due particelle alfa si uniscono per formare il nucleo di ${}^8\text{Be}$ nello stato fondamentale che si dissocia nuovamente in due alfa, con una vita media pari a $\tau = 10^{-16}\text{s}$, abbastanza lunga da consentire la successiva fusione con una terza particella alfa prima della dissociazione, tramite la reazione: ${}^8\text{Be} + \alpha \rightarrow {}^{12}\text{C} + \gamma$

Il nucleo così formato, ${}^{12}\text{C}$, è stabile. Nuove reazioni possono avvenire:



A causa della sempre crescente barriera coulombiana, queste reazioni necessitano di una temperatura via via crescente per avvenire.

Elementi più pesanti del ${}^{56}_{26}\text{Fe}$ non si formano, dato che per $A=60$ la curva B/A ha raggiunto il suo massimo. Per $A>60$ la barriera coulombiana diventa talmente elevata che non è più energeticamente favorevole per un nucleo catturare un altro nucleo, ma piuttosto catturare un neutrone guadagnando appunto l'energia di legame del neutrone. A seguito della cattura di un neutrone, per aggiustare il rapporto Z/A segue in genere un decadimento β^- ed il numero atomico dell'elemento finale aumenta di un'unità. Si arriva così fino al nucleo ${}^{209}_{83}\text{Bi}$. Gli elementi più pesanti non si formano facilmente tramite cattura neutronica perché il ${}^{210}_{83}\text{Bi}$ è instabile per decadimento alfa:



Per la formazione di elementi più pesanti è quindi indispensabile essere in presenza di altissimi flussi di neutroni, in modo da compensare il decadimento del ${}^{210}_{83}\text{Bi}$ con una sua altissima velocità di creazione. Tali flussi di neutroni sono presenti durante le esplosioni delle stelle: le esplosioni avvengono quando le stelle, esaurito il combustibile nucleare (cioè raggiunto il valore $A=60$), collassano su se stesse.

Appendice

Consideriamo una sfera di raggio $R(t)$ che racchiude una porzione di universo, alla sua superficie una galassia tipica di massa m all'istante t . La massa totale di universo contenuta all'interno della sfera è: $M = \frac{4}{3}\pi R^3(t)\rho(t)$

Sul moto relativo della galassia rispetto alla massa contenuta nella sfera la massa di universo esterna non ha influenza.. L'energia totale della galassia è allora data da:

$$E = \frac{1}{2}mv^2(t) - \frac{GmM}{R(t)} = mR^2(t) \cdot \left(\frac{1}{2}H^2(t) - \frac{4}{3}G\pi\rho(t) \right)$$

avendo usato la legge di Hubble.

$$\frac{2E}{m} + \frac{8}{3}\pi G R^2(t)\rho(t) = \left(\frac{dR(t)}{dt} \right)^2$$

dove, come già visto, $\rho(t) \propto 1/R(t)^n$ (con $n=3$ per l'epoca della materia e $n=4$ per l'epoca della radiazione. Possiamo quindi scrivere $\rho(t) = \alpha/R(t)^n$

$$\frac{2E}{m} + \frac{8}{3}\pi G \alpha R^{2-n}(t) = \left(\frac{dR(t)}{dt} \right)^2 \quad \text{da cui:}$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = \sqrt{\left(\frac{2E}{m} + \frac{8}{3}\pi G \alpha R^{2-n}(t) \right)} \quad \text{ossia:} \quad dt = \frac{dR}{\sqrt{\left(\frac{2E}{m} + \frac{8}{3}\pi G \alpha R^{2-n} \right)}}$$

per $R \rightarrow 0$, il termine $\frac{8}{3}\pi G \alpha R^{2-n} \rightarrow \infty$ e quindi si può trascurare sotto radice il termine $\frac{2E}{m}$ e si ottiene:

$$\sqrt{\frac{8}{3}\pi G \alpha} \cdot dt = R^{\frac{n}{2}-1} dR. \quad \text{L'integrazione fornisce la soluzione:}$$

$$\sqrt{\frac{8}{3}\pi G \alpha} \cdot (t_2 - t_1) = \frac{2}{n} \left(R_2^{n/2} - R_1^{n/2} \right)$$

$$t_2 - t_1 = \frac{2}{n} \left[\sqrt{\frac{3R_2^n}{8\pi G \alpha}} - \sqrt{\frac{3R_1^n}{8\pi G \alpha}} \right]$$

e sostituendo $\rho(t) = \alpha/R(t)^n$:

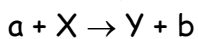
$$t_2 - t_1 = \frac{2}{n} \sqrt{\frac{3}{8\pi G}} \left[\frac{1}{\sqrt{\rho_2}} - \frac{1}{\sqrt{\rho_1}} \right]$$

Capitolo 11

Le reazioni nucleari

11.1 bilancio energetico: Q della reazione

Le reazioni nucleari sono analizzate quantitativamente in termini di massa ed energia dei nuclei e delle particelle interessate (bilancio energetico). L'analisi è simile a quella delle reazioni chimiche eccetto che per la relazione relativistica tra massa ed energia: un acquisto di energia in una reazione deve essere accompagnata da una diminuzione di massa corrispondente. Viceversa, un aumento di massa deve essere controbilanciato da un corrispondente apporto di energia (che può essere fornito per esempio bombardando un nucleo con proiettili di opportuna energia cinetica). Una reazione a due corpi in generale è rappresentata dall'espressione:



dove X è il nucleo iniziale, Y il nucleo finale, a il proiettile e b la particella emessa. Se a è un fotone la reazione è detta fotoreazione; se b è un fotone la reazione è detta cattura radiativa; se $b=a$, il che implica (per la conservazione del numero barionico) che $Y=X$, la reazione è detta di diffusione (scattering). Se dopo il processo di diffusione lo stato energetico del nucleo finale Y è lo stesso del nucleo iniziale X il processo si dice di (scattering elastico) diffusione elastica, mentre se Y si trova in uno stato eccitato si parla di diffusione inelastica. In generale si assume che il nucleo iniziale X, detto anche nucleo bersaglio (target) si trovi in quiete nel suo stato fondamentale, di modo che solo a possiede energia cinetica T_a .

La condizione di conservazione dell'energia si scrive:

$$E_a + E_X = E_b + E_Y$$

Che diviene, essendo X in quiete:

$$T_a + m_a + m_X = T_b + m_b + T_Y + m_Y$$

Dove T sono le energie cinetiche ed m le masse a riposo

Si definisce Q-valore della reazione la quantità:

$$Q = (m_X + m_a - m_Y - m_b)c^2$$

Cioè Q è la differenza tra l'energia a riposo iniziale e quella finale. Q può essere positivo negativo o nullo (nel caso della diffusione elastica). Dalla relazione che esprime la conservazione dell'energia totale segue che:

$$Q = T_b + T_Y - T_a; \quad T_Y = Q - T_b + T_a$$

11.2 Il formalismo relativistico dei quadri-vettori.

Consideriamo un sistema di riferimento inerziale solidale con le stelle fisse. In questo sistema di riferimento il tempo sarà misurato con orologi ordinari e la posizione di un evento sarà descritta in termini delle coordinate cartesiane. Consideriamo gli orologi in quiete rispetto al sistema di riferimento: orologi in punti diversi saranno sincronizzati per mezzo di segnali luminosi. Come unità di misura della velocità scegliamo la velocità della luce nel vuoto ($c=2.99796 \cdot 10^8$ m/s $\approx 3 \cdot 10^8$

m/s) e poniamo $c=1$. La velocità è una grandezza adimensionale, pertanto lunghezza e tempo hanno le stesse dimensioni ($1s \rightarrow 3 \cdot 10^8 m$ e $1m \rightarrow 3.3 \cdot 10^{-9} s$). Inoltre, dalla relazione $E=mc^2$ si vede che anche energia e massa hanno le stesse dimensioni: scegliamo come unità di misura per entrambe il MeV. Anche il momento $p=mv$ ha le stesse dimensioni di m e di E , e sarà misurato anch'esso in MeV.

Ad ogni evento, contraddistinto da una posizione \mathbf{x} e da un istante t , attribuiamo un 4-vettore x così costruito:

$$x_\mu = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ \mathbf{x} \end{pmatrix}$$

Si possono definire 4-vettori per molte grandezze fisiche.

La somma di due 4-vettori è definita nel seguente modo:

$$x_\mu + y_\mu = \begin{pmatrix} x_0 \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_0 \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + y_0 \\ \mathbf{x} + \mathbf{y} \end{pmatrix}$$

Il prodotto scalare tra due 4-vettori è definito come segue:

$$x_\mu y_\mu = x_0 y_0 - \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$$

Il modulo quadro di un 4-vettore, dato dalla relazione:

$$x_\mu^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = x_0^2 - \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$$

Il modulo dei 4-vettori è un invariante relativistico.

Naturalmente x può variare nel tempo e per descrivere in forma generale una particella in movimento, scriveremo:

$$x_\mu(t) = \begin{pmatrix} t \\ \mathbf{x}(t) \end{pmatrix}$$

che esprime in forma parametrica la linea di universo della particella. Vogliamo adesso definire il 4-vettore velocità. Come base di partenza, consideriamo il 3-vettore ordinario velocità $\mathbf{v} = d\mathbf{x}/dt$: poiché il tempo t non è una variabile invariante, \mathbf{v} non si trasforma come le tre componenti spaziali di un 4-vettore e non può quindi essere preso come base di partenza per costruire il 4-vettore velocità. Per costruire la 4-velocità bisogna considerare la derivata di x_μ rispetto a qualche variabile opportuna, certamente legata al tempo. Una scelta naturale è la seguente: al posto di t (tempo misurato nel sistema inerziale) introduciamo il tempo proprio τ della particella, cioè quello indicato da un orologio che si muove con la particella. Per trovare la relazione tra t e τ , consideriamo un sistema di riferimento inerziale nel quale la particella è istantaneamente in quiete. L'elemento differenziale di linea di universo in questo sistema di riferimento è dato da: $dx'_\mu = \begin{pmatrix} d\tau \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$, mentre nel nostro

sistema inerziale $dx_\mu = \begin{pmatrix} dt \\ d\mathbf{x} \end{pmatrix}$.

A causa della invarianza del modulo dei 4-vettori:

$$dx_{\mu}^2 = d\tau^2 = dx^2 = dt^2 - dx^2 = dt^2 \left(1 - \frac{dx^2}{dt^2} \right) = dt^2(1-\beta^2)$$

pertanto $d\tau = dt \sqrt{1-\beta^2} = dt/\gamma$

Il 4-vettore velocità è definito nel seguente modo:

$$u_{\mu} = \frac{d}{d\tau} x_{\mu}(\tau) = \begin{pmatrix} \frac{dt}{d\tau} \\ \frac{dx}{d\tau} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ \sqrt{1-\beta^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ \beta\gamma \end{pmatrix}$$

$$u_{\mu}^2 = \gamma^2 - \beta^2 \gamma^2 = \gamma^2(1-\beta^2) = 1$$

il 4-momento è quindi definito come:

$$p_{\mu} = m_0 u_{\mu} = m_0 \frac{d}{d\tau} x_{\mu}(\tau) = \begin{pmatrix} m_0 \frac{dt}{d\tau} \\ m_0 \frac{dx}{d\tau} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ m_0 \beta \\ \sqrt{1-\beta^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_0 \gamma \\ m_0 \beta \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}$$

dove m_0 è la massa a riposo.

Le componenti temporale e spaziale del 4-momento sono:

$$p_0 = m_0 \gamma = m = E \quad (\text{dalla relazione } E=mc^2, \text{ con } c=1)$$

$$\mathbf{p} = m_0 \beta \gamma$$

Naturalmente, per $\beta \ll 1$ (ossia $v \ll c$) si ottengono le usuali relazioni classiche:

$$E = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \approx m_0 + \frac{1}{2} m_0 \beta^2 \quad \text{e} \quad \mathbf{p} = m_0 \beta$$

Il modulo quadro del 4-momento fornisce una importante relazione tra $|\mathbf{p}|$ ed E :

$$p_{\mu}^2 = E^2 - \mathbf{p}^2 = m_0^2 \gamma^2 - m_0^2 \beta^2 \gamma^2$$

se scegliamo il sistema di quiete ($\beta = 0, \gamma = 1$): $p_{\mu}^2 = m_0^2$.

Dalla invarianza del 4-momento risulta $E^2 - \mathbf{p}^2 = m_0^2$ e quindi:

$$E^2 = m_0^2 + \mathbf{p}^2, \quad E = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_0^2}$$

con la formula corrispondente:

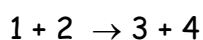
$$\mathbf{p}^2 = E^2 - m_0^2, \quad |\mathbf{p}| = \sqrt{E^2 - m_0^2}$$

Se poi sostituiamo $E=T+m_0$, dove indichiamo con T l'energia cinetica, otteniamo la relazione tra $|\mathbf{p}|$ e T :

$$\mathbf{p}^2 = E^2 - m_0^2 = T^2 + 2m_0 T \rightarrow |\mathbf{p}| = \sqrt{T(T + 2m_0)}$$

11.3 Centro di massa e laboratorio

Supponiamo di avere una reazione nucleare a due corpi del tipo:



dove con 1 indichiamo la particella incidente, con 2 il bersaglio (di solito a riposo nel sdr del laboratorio) e con 3 e 4 i prodotti della reazione. La reazione può essere

studiata nel sistema del centro di massa (CMS) o in quello del laboratorio (LS). I due sistemi sono visualizzati schematicamente in figura 11.1

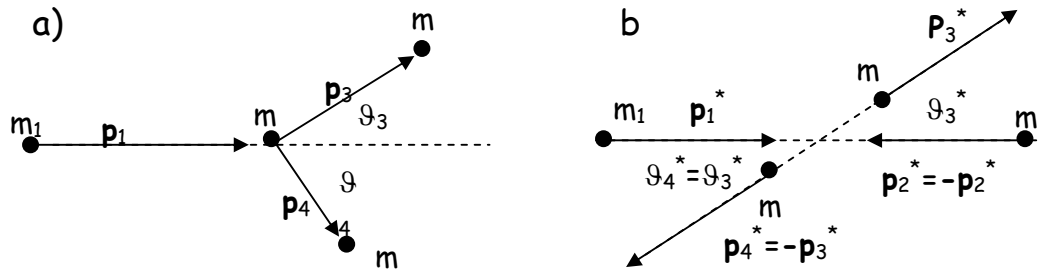


Figura 11.1 reazione a due corpi studiata: a) nel LS, e b) nel CMS

Il passaggio da un sistema di riferimento all'altro avviene tramite le usuali trasformate di Lorentz. Se scomponiamo i vettori quantità di moto secondo una componente parallela alla velocità relativa del sistema del centro di massa rispetto al laboratorio, abbiamo: $\mathbf{p} = \mathbf{p}_{||} + \mathbf{p}_{\perp}$. Naturalmente soltanto la componente parallela risente delle trasformazioni di Lorentz passando da un s.d.r. all'altro. Possiamo scrivere in forma compatta la trasformazione di Lorentz per passare dal LS al CMS:

$$\begin{pmatrix} E^* \\ \mathbf{p}_{||}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_f & -\gamma_f \beta_f \\ -\gamma_f \beta_f & \gamma_f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E \\ \mathbf{p}_{||} \end{pmatrix} \quad \mathbf{p}_{\perp}^* = \mathbf{p}_{\perp}$$

dove le grandezze asteriscate sono relative al CMS, quelle non asteriscate sono relative al LS, e β_f e γ_f rappresentano rispettivamente il beta ed il gamma del CMS rispetto al LS.

$$\beta_f = \frac{p_{\text{tot}}}{E_{\text{tot}}} = \frac{p_1}{E_1 + m_2} \quad \gamma_f = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_f^2}}$$

La trasformazione che fa passare dal CMS al LS si ottiene cambiando il segno alla velocità relativa:

$$\begin{pmatrix} E \\ \mathbf{p}_{||} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_f & \gamma_f \beta_f \\ \gamma_f \beta_f & \gamma_f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E^* \\ \mathbf{p}_{||}^* \end{pmatrix} \quad \mathbf{p}_{\perp} = \mathbf{p}_{\perp}^* \quad (11.1)$$

Le equazioni singole risultano allora per ciascuna particella "i" (esplicitando i rispettivi angoli di emissione):

$$E_i = \gamma_f \cdot (E_i^* + \beta_f \cdot p_i^* \cos \vartheta_i^*) \quad (11.2)$$

$$p_i \cdot \cos \vartheta_i = \gamma_f \cdot (p_i^* \cos \vartheta_i^* + \beta_f \cdot E_i^*) \quad (11.3)$$

$$p_i \cdot \sin \vartheta_i = p_i^* \sin \vartheta_i^* \quad (11.4)$$

Possiamo introdurre il beta della particella "i" nel CMS: $\beta_i^* = \frac{p_i^*}{E_i^*}$ e riscrivere la

(11.3) come segue:

$$p_i \cdot \cos \vartheta_i = \gamma_f \cdot p_i^* \left(\cos \vartheta_i^* + \frac{\beta_f}{\beta_i^*} \right) \quad (11.3a)$$

Dividendo la (11.4) per la (11.3a) otteniamo la relazione che esiste tra l'angolo di emissione nel CMS e quello nel LS:

$$\tan \vartheta_i = \frac{\sin \vartheta_i^*}{\gamma_f \left(\cos \vartheta_i^* + \frac{\beta_f}{\beta_i^*} \right)} \quad (11.5)$$

Mentre nel CMS l'angolo ϑ_i^* può assumere qualsiasi valore tra 0 e π , nel LS in alcuni casi l'angolo ϑ_i può avere un valore massimo minore di π . Per trovare questo valore massimo riscriviamo la (11.5) nel seguente modo:

$$\vartheta_i = \arctan \left[\frac{\sin \vartheta_i^*}{\gamma_f \left(\cos \vartheta_i^* + \frac{\beta_f}{\beta_i^*} \right)} \right]$$

deriviamo ϑ_i rispetto a ϑ_i^* e poniamo a derivata $\frac{d\vartheta_i}{d\vartheta_i^*} = 0$.

$$\frac{d\vartheta_i}{d\vartheta_i^*} = \frac{\left[\frac{\cos \vartheta_i^*}{\gamma_f \left(\cos \vartheta_i^* + \frac{\beta_f}{\beta_i^*} \right)} + \frac{\sin^2(\vartheta_i^*)}{\gamma_f \left(\cos \vartheta_i^* + \frac{\beta_f}{\beta_i^*} \right)^2} \right]}{\left[1 + \frac{\sin^2(\vartheta_i^*)}{\gamma_f^2 \left(\cos \vartheta_i^* + \frac{\beta_f}{\beta_i^*} \right)^2} \right]} = 0$$

$$\text{Otteniamo: } \cos \vartheta_i^* = -\frac{\beta_i^*}{\beta_f}$$

Pertanto vediamo che ϑ_i ha un valore limite $\vartheta_{i \text{ lim}} < \pi$ solo se : $\beta_f \geq \beta_i^*$

$$\tan \vartheta_{i \text{ lim}} = \frac{1}{\gamma_f \sqrt{\frac{\beta_f^2}{\beta_i^{*2}} - 1}}, \quad \text{con } \beta_f \geq \beta_i^* \quad (11.6)$$

In figura 11.2 sono visualizzate graficamente le precedenti situazioni.

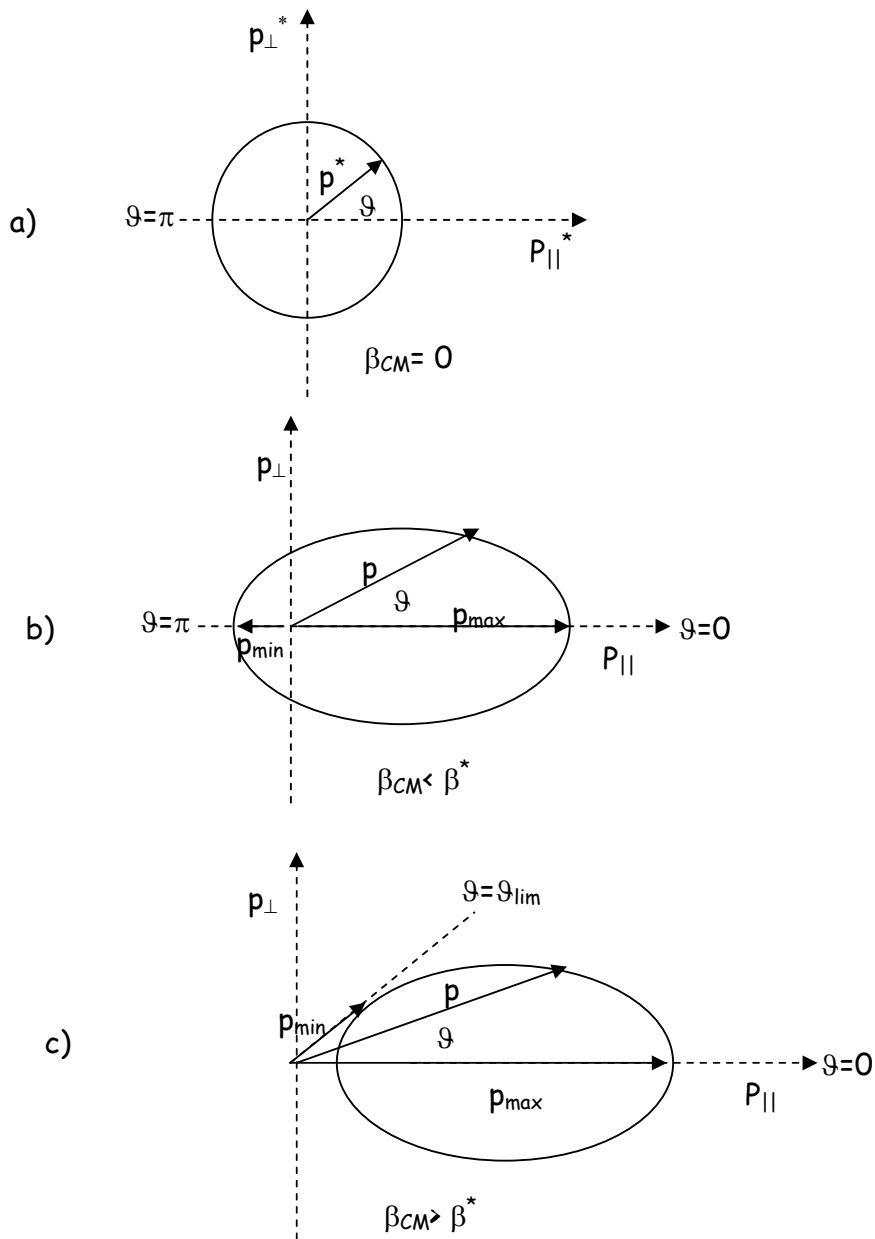
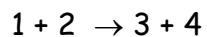


Figura 11.2 limiti cinematici in momento ed angolo nel CMS e nel LS
 a) sistema del centro di massa;
 b) sistema del laboratorio, con $\beta_{CM} < \beta^*$;
 c) sistema del laboratorio, con $\beta_{CM} > \beta^*$.

11.3 Cinematica delle reazioni nucleari (formalismo relativistico)

Supponiamo di avere la solita reazione nucleare a due corpi del tipo:



Con il formalismo dei 4-vettori possiamo scrivere:

$$p_{1\mu} + p_{2\mu} = p_{3\mu} + p_{4\mu}$$

o anche:

$$p_{1\mu} - p_{3\mu} = p_{4\mu} - p_{2\mu}$$

oppure:

$$p_{1\mu} - p_{4\mu} = p_{3\mu} - p_{2\mu}$$

Definiamo i seguenti invarianti:

$$s = (p_{1\mu} + p_{2\mu})^2 = (p_{3\mu} + p_{4\mu})^2$$

$$t = (p_{1\mu} - p_{3\mu})^2 = (p_{4\mu} - p_{2\mu})^2$$

$$u = (p_{1\mu} - p_{4\mu})^2 = (p_{3\mu} - p_{2\mu})^2$$

In particolare \sqrt{s} rappresenta l'energia totale nel sistema del centro di massa (CMS). Poichè inoltre s, t e u sono invarianti, possiamo per esempio scrivere:

$$s_{LS} = (p_{1\mu} + p_{2\mu})^2_{LS} = s_{CMS} = (p_{1\mu} + p_{2\mu})^2_{CMS}$$

dove con LS abbiamo indicato il sistema del laboratorio.

Supponendo la particella 2 in quiete ($E_2=m_2$, $\mathbf{p}_2=0$), si ha l'importante relazione:

$$s = m_1^2 + m_2^2 + 2E_1m_2$$

Vediamo come si passa da un sistema di riferimento all'altro con il formalismo dei 4-vettori. In genere sono utilizzati i sistemi di riferimento del laboratorio (LS) e del centro di massa (CMS). Indichiamo le variabili nel CMS con un asterisco (*). In genere nel laboratorio una delle due particelle interagenti (il bersaglio) è in quiete. Scegliamo l'asse z nella direzione di volo del proiettile e indichiamo con i pedici 1 e 2 rispettivamente il proiettile ed il bersaglio. In una reazione a due corpi indicheremo con 3 e 4 le particelle nello stato finale. I 4-momenti delle particelle 1 e 2 nei due sistemi si scrivono nel seguente modo:

$$p_{1\mu}^* = (E_1^*, \mathbf{p}_1^*) = (E_1^*, 0, 0, p_1^*) \quad p_{1\mu} = (E_1, \mathbf{p}_1) = (E_1, 0, 0, p_1)$$

$$p_{2\mu}^* = (E_2^*, -\mathbf{p}_1^*) = (E_2^*, 0, 0, -p_1^*) \quad p_{2\mu} = (E_2, \mathbf{p}_2) = (m_2, 0, 0, 0)$$

Le trasformazioni di Lorentz $LS \rightarrow CMS$ danno:

$$p_1^* = \gamma_{cm}(p_1 - \beta_{cm}E_1) \quad e \quad E_1^* = \gamma_{cm}(E_1 - \beta_{cm}p_1)$$

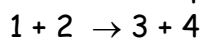
dove, essendo $\beta = \mathbf{p}/E$, $\gamma = E/m$, si ha:

$$\beta_{cm} = \frac{p_1}{E_1 + m_2}, \quad \gamma_{cm} = \frac{E_1 + m_2}{\sqrt{s}} \quad e \quad \beta_{cm}\gamma_{cm} = \frac{p_1}{\sqrt{s}}$$

Naturalmente per le trasformazioni $CMS \rightarrow LS$ è sufficiente cambiare β in $-\beta$

$$p_1^* = \gamma_{cm}(p_1 + \beta_{cm}E_1) \quad e \quad E_1^* = \gamma_{cm}(E_1 + \beta_{cm}p_1).$$

Nel caso della solita reazione nucleare a due corpi del tipo:



(dove con 1 indichiamo la particella incidente, con 2 il bersaglio a riposo nel sdr del laboratorio LS e con 3 e 4 i prodotti della reazione), la conservazione di energia e quantità di moto in un urto è sintetizzata nella conservazione del 4-momento. In maniera del tutto generale possiamo scrivere che:

$$p_{1\mu} + p_{2\mu} = p_{3\mu} + p_{4\mu}$$

o anche:

$$p_{1\mu} - p_{3\mu} = p_{4\mu} - p_{2\mu}$$

quadrando:

$$(p_{1\mu} - p_{3\mu})^2 = (p_{4\mu} - p_{2\mu})^2$$

Indicando rispettivamente con θ e φ l'angolo della particella 3 e della particella 4 rispetto alla direzione della particella incidente:

$$(p_{1\mu} - p_{3\mu})^2 = E_1^2 - \mathbf{p}_1^2 + E_3^2 - \mathbf{p}_3^2 + 2\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_3 - 2E_1E_3$$

$$= m_1^2 + m_3^2 + 2|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_3|\cos\theta - 2E_1E_3$$

$$(p_{4\mu} - p_{2\mu})^2 = E_4^2 - \mathbf{p}_4^2 + E_2^2 - \mathbf{p}_2^2 + 2\mathbf{p}_4 \cdot \mathbf{p}_2 - 2E_4E_2$$

$$= m_4^2 + m_2^2 - 2|\mathbf{p}_2||\mathbf{p}_4|\cos\varphi - 2E_4E_2 =$$

$$= m_4^2 + m_2^2 - 2m_2E_4$$

essendo $\mathbf{p}_2=0$ (in quiete nel lab) e quindi $E_2=m_2$.

In definitiva:

$$m_1^2 + m_3^2 + 2|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_3|\cos\theta - 2E_1E_3 = m_4^2 + m_2^2 - 2m_2E_4$$

che riscriviamo indicando il modulo dei vettori \mathbf{p}_i con il simbolo p_i anziché con la notazione più pesante $|\mathbf{p}_i|$:

$$m_1^2 + m_3^2 + 2p_1p_3\cos\theta - 2E_1E_3 = m_4^2 + m_2^2 - 2m_2E_4$$

La relazione precedente, unita alla relazione di conservazione dell'energia:

$$E_1 + E_2 = E_3 + E_4$$

permette di eliminare E_4 e di ricavare p_3 o E_3 della particella 3, ricordando che sono legati dalla relazione: $E_3^2 = p_3^2 + m_3^2$.

11.4 Esempi di applicazioni del formalismo dei 4-vettori alle reazioni nucleari

Come primo esempio di applicazione vediamo il caso in cui una particella decada in due frammenti (p. es. un nucleo che subisce un decadimento α). In questo caso avremo:



e, in termini di 4-momento, scriveremo: $P_\mu = P'_\mu + p_\mu$. Indichiamo con le lettere maiuscole le grandezze relative al nucleo padre e figlio e con le lettere minuscole le grandezze relative alla particella α . Quadrando:

$$P^2 = P'^2 + p^2 + 2 \cdot E' \cdot E_\alpha - 2 \cdot \mathbf{P}' \cdot \mathbf{p}$$

Ma i moduli dei 4-vettori sono: $P_\mu^2 = M^2$, $P'_\mu^2 = M'^2$, e $p_\mu^2 = m^2$

Sappiamo poi che deve essere:

$\mathbf{P}' = -\mathbf{p}$ (il nucleo rincula nel verso opposto alla particella α)

ed inoltre :

$M = E' + E_\alpha$ (il nucleo padre è a riposo, quindi $E=M$)

$$M^2 = M'^2 + m^2 + 2 \cdot E' \cdot E_\alpha + 2 \cdot p^2$$

Sapendo che: $E' = M - E_\alpha$, e che: $p^2 = E_\alpha^2 - m^2$

$$M^2 = M'^2 + m^2 + 2eM - 2(E_\alpha^2 - p^2) = 2 E_\alpha M - m^2$$

$$E_\alpha = T_\alpha + m = \frac{M^2 - M'^2 + m^2}{2M}$$

$$T_\alpha = \frac{M^2 - M'^2 + m^2 - 2mM}{2M} = \frac{(M - m)^2 - M'^2}{2M}$$

Come secondo esempio di applicazione studiamo l'effetto Compton (vedi Cap. 13), cioè la diffusione elastica di un fotone da parte di un elettrone libero (si trascura cioè l'energia di legame elettrone-atomo)

$$1 + 2 \rightarrow 3 + 4$$

$$\gamma + e \rightarrow \gamma' + e'$$

$$p_{\gamma\mu} + p_{e\mu} = p'_{\gamma\mu} + p'_{e\mu}$$

$$(p_{\gamma\mu} - p'_{\gamma\mu})^2 = (p'_{e\mu} - p_{e\mu})^2$$

$$(p_{\gamma\mu} - p'_{\gamma\mu})^2 = E_{\gamma}^2 - \mathbf{p}_{\gamma}^2 + E_{\gamma'}^2 - \mathbf{p}_{\gamma'}^2 - 2E_{\gamma}E_{\gamma'} + 2p_{\gamma}p_{\gamma'}\cos\theta = -2E_{\gamma}E_{\gamma'}(1-\cos\theta)$$

in quanto per i fotoni $p = E$.

$$(p'_{e\mu} - p_{e\mu})^2 = E_e'^2 - \mathbf{p}'_e{}^2 + E_e^2 - \mathbf{p}_e^2 - 2mE' = 2m^2 - 2mE'$$

Ed inoltre, dalla conservazione dell'energia:

$$E_{\gamma} + m = E'_{\gamma} + E', \text{ ossia: } E' = E_{\gamma} - E'_{\gamma} + m$$

Sostituendo:

$$-E_{\gamma}E'_{\gamma}(1-\cos\theta) = m^2 - mE' = m(E'_{\gamma} - E_{\gamma})$$

Da cui:

$$E'_{\gamma} = \frac{E_{\gamma}}{1 + \frac{E_{\gamma}}{m}(1 - \cos\theta)}$$

che rappresenta l'energia del fotone diffuso in funzione dell'angolo di scattering θ .

Dimostriamo infine che il fenomeno della bremsstrahlung (vedi Cap. 12) non può avvenire se non in presenza di materia: è necessario un partner (elettrone o nucleo) affinché si conservino energia e momento.

Dall'elettrodinamica classica sappiamo che una carica sottoposta ad una accelerazione \mathbf{a} emette radiazione, e la potenza media irradiata risulta essere:

$$\langle w^2 \rangle = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \langle a^2 \rangle$$

Se un elettrone spontaneamente irradiasse nel vuoto dovrebbe essere:

$$p_1 = p_2 + p$$

avendo identificato con 1 e 2 lo stato iniziale e finale dell'elettrone e con p il momento del fotone.

$$p_{1\mu}^2 = (p_{2\mu} + p_{\mu})^2$$

$$m^2 = m^2 + 2E_2E + 2p_2p \cos\theta = m^2 + 2E_2p + 2p_2p \cos\theta$$

in quanto per i fotoni $E = p$

si ricava quindi:

$$p_2p \cos\theta - E_2p = p(p_2 \cos\theta - E_2) = 0$$

che ha soluzioni:

$$p = 0 \rightarrow \text{l'elettrone non irraggia;}$$

$$p_2 \cos\theta - E_2 = 0 \rightarrow \beta_2 = p_2/E_2 = 1/\cos\theta > 1, \text{ il che è assurdo.}$$

11.5 Energia di soglia di una reazione nucleare

Supponiamo di avere una reazione nucleare a due corpi del tipo:

$$a + b \rightarrow 1 + 2 + 3 + \dots$$

Nella quale vengono materializzate n particelle nello stato finale.

Vogliamo trovare il minimo valore di energia cinetica T_a del proiettile che rende possibile la reazione. Tale valore di energia si chiama appunto energia di soglia e si indica con T_{thr} (dall'inglese: soglia = threshold). Il Q della reazione è dato dalla solita relazione: $Q = \sum_i m_{iniz}(i) - \sum_i m_{fin}(i)$.

Utilizzando la proprietà di invarianza dei 4-vettori possiamo scrivere:

$$(p_{a\mu} + p_{b\mu})_{LS}^2 = (p_{1\mu} + p_{2\mu} + p_{3\mu} + p_{4\mu} + \dots)_{LS}^2 = (p_{1\mu} + p_{2\mu} + p_{3\mu} + p_{4\mu} + \dots)_{CMS}^2$$

Nel sistema del centro di massa, in soglia le particelle dello stato finale vengono prodotte in quiete. Allora: $(p_{1\mu} + p_{2\mu} + p_{3\mu} + p_{4\mu} + \dots)_{CMS}^2 \geq (m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + \dots)^2$

Risulta pertanto: $(p_{a\mu} + p_{b\mu})_{LS}^2 = m_a^2 + m_b^2 + 2E_a m_b \geq (m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + \dots)^2$

che riscriviamo, essendo E_{thr} il minimo valore di energia possibile per la reazione: $m_a^2 + m_b^2 + 2E_{thr} m_b = (m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + \dots)^2$

ossia:

$$m_a^2 + m_b^2 + 2(T_{thr} + m_a) m_b = (m_a + m_b)^2 + 2T_{thr} m_b = (m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + \dots)^2$$

Nel caso generale, indicando con m_{bers} la massa del bersaglio, si riscrive:

$$\left(\sum_i m_{iniz}(i) \right)^2 + 2m_{bers} T_{thr} = \left(\sum_i m_{fin}(i) \right)^2$$

L'energia di soglia T_{thr} è data quindi dalla relazione:

$$T_{thr} = \frac{\left(\sum_i m_{fin}(i) \right)^2 - \left(\sum_i m_{iniz}(i) \right)^2}{2m_{bersaglio}} \quad (11.7)$$

La relazione precedente si può riscrivere esplicitando il Q della reazione, dato da:

$$Q = \sum_i m_{iniz}(i) - \sum_i m_{fin}(i)$$

Svolgendo i calcoli si ottiene:

$$T_{thr} = -Q \frac{\sum_i m_{iniz}(i) + \sum_i m_{fin}(i)}{2m_{bersaglio}} \quad (11.8)$$

Come c'era da aspettarsi, un valore di $Q > 0$ implica $T_{thr} < 0$, il che è assurdo poiché l'energia cinetica è definita positiva. In questo caso la reazione, essendo esotermica, avviene spontaneamente anche con energia cinetica nulla del proiettile.

11.6 cinematica delle reazioni a due corpi

Supponiamo ancora di avere una reazione nucleare a due corpi del tipo:

$$1 + 2 \rightarrow 3 + 4$$

Nel sdr del laboratorio (LS) lo stato iniziale è dato dai 4-vettori:

$$p_{1\mu} = (E_1, 0, 0, p_1); \quad p_{2\mu} = (m_2, 0, 0, 0)$$

Vogliamo calcolare momento p_3 (o energia E_3) della particella 3 in funzione della sua direzione di volo ϑ_3 rispetto alla direzione della particella incidente. Al solito scriviamo:

$$p_{1\mu} - p_{3\mu} = p_{4\mu} - p_{2\mu}$$

Sviluppando i calcoli (vedi paragrafo 11.2) si arriva all'equazione:

$$m_1^2 + m_3^2 + 2p_1 p_3 \cos \vartheta_3 - 2E_1 E_3 = m_4^2 + m_2^2 - 2m_2 E_4$$

La relazione precedente, unita alla relazione di conservazione dell'energia:

$$E_1 + E_2 = E_3 + E_4$$

permette di eliminare E_4 e di ricavare p_3 o E_3 della particella 3, ricordando che sono legati dalla relazione: $E_3^2 = p_3^2 + m_3^2$.

Se scriviamo: $E_T = E_1 + m_2$ (E_T rappresenta l'energia totale nello stato iniziale), arriviamo al seguente risultato finale:

$$E_3 = \frac{A_3 \cdot E_T \pm p_1 \cos \vartheta_3 \sqrt{A_3^2 - 4m_3^2 (E_T^2 - p_1^2 \cos^2 \vartheta_3)}}{2(E_T^2 - p_1^2 \cos^2 \vartheta_3)} \quad (11.9)$$

$$\text{con: } A_3 = E_T^2 - p_1^2 + m_3^2 - m_4^2 = s + m_3^2 - m_4^2$$

dove, al solito, $s = (m_1^2 + m_2^2 + 2m_2 E_1)$ e \sqrt{s} rappresenta l'energia totale nel CMS

Analogamente si ricavano i valori di energia ed angolo per la particella 4:

$$E_4 = \frac{A_4 \cdot E_T \pm p_1 \cos \vartheta_4 \sqrt{A_4^2 - 4m_4^2 (E_T^2 - p_1^2 \cos^2 \vartheta_4)}}{2(E_T^2 - p_1^2 \cos^2 \vartheta_4)} \quad (11.10)$$

$$\text{dove: } A_4 = E_T^2 - p_1^2 + m_4^2 - m_3^2 = s + m_4^2 - m_3^2$$

La condizione che i radicandi ($\Delta \geq 0$) siano positivi fissa un limite agli angoli ϑ_3 e ϑ_4 , e quindi alle direzioni di volo delle particelle uscenti:

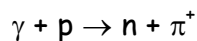
$$\sin^2 \vartheta_3 \leq \frac{(s - m_3^2 - m_4^2) - 4m_3^2 m_4^2}{4m_3^2 p_1^2} \quad \text{e} \quad \sin^2 \vartheta_4 \leq \frac{(s - m_3^2 - m_4^2) - 4m_3^2 m_4^2}{4m_4^2 p_1^2} \quad (11.11)$$

I valori forniti dalle (11.11) coincidono con quelli forniti dalla relazione (11.6)

Naturalmente, se prendiamo $\vartheta_3 = 0$ (oppure $\vartheta_4 = 0$), otteniamo il valore di soglia T_{thr} della reazione calcolato nel paragrafo precedente (11.7 e 11.8).

Se nelle (11.11) le relazioni a secondo membro risultano maggiori di uno non esiste per la particella in questione alcun angolo limite, e può essere emessa nell'intervallo $0 \leq \vartheta \leq \pi$

Se, viceversa, nelle (11.11) le relazioni a secondo membro risultano minori di uno, esiste un angolo limite ϑ_{lim} che si ricava invertendo le (11.11). In questo caso l'intervallo angolare vale: $0 \leq \vartheta \leq \vartheta_{lim}$. In quest'ultimo caso, la particella presenta due valori di energia diversa allo stesso angolo, che corrispondono all'emissione in avanti o all'indietro dell'altra particella. Alcuni esempi di relazione Energia cinetica - angolo sono dati nelle figure che seguono. La reazione studiata è la fotoproduzione di un pione da un nucleone:



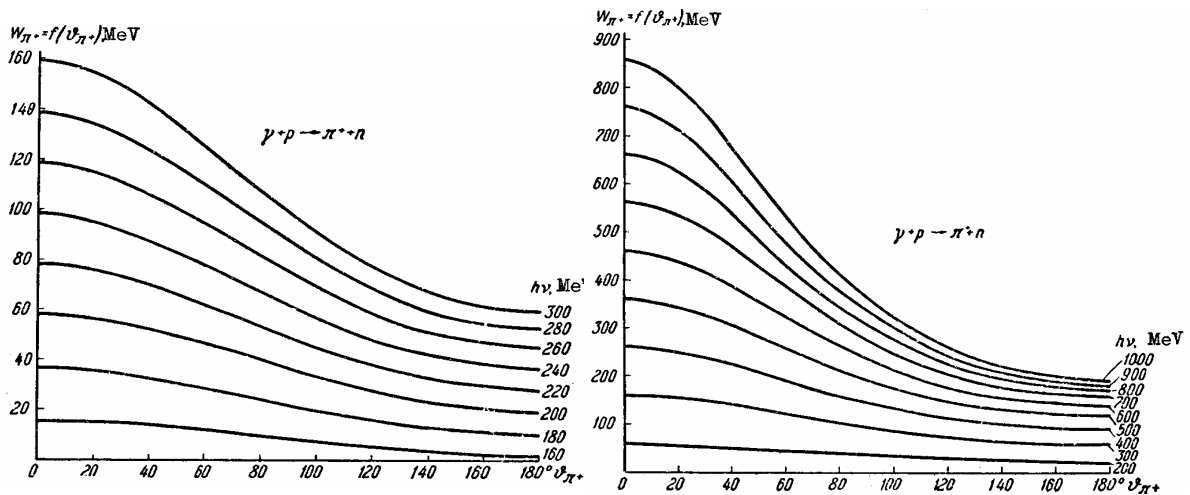


Figura 11.3 relazione energia-angolo del π^+ nella reazione: $\gamma + p \rightarrow n + \pi^+$

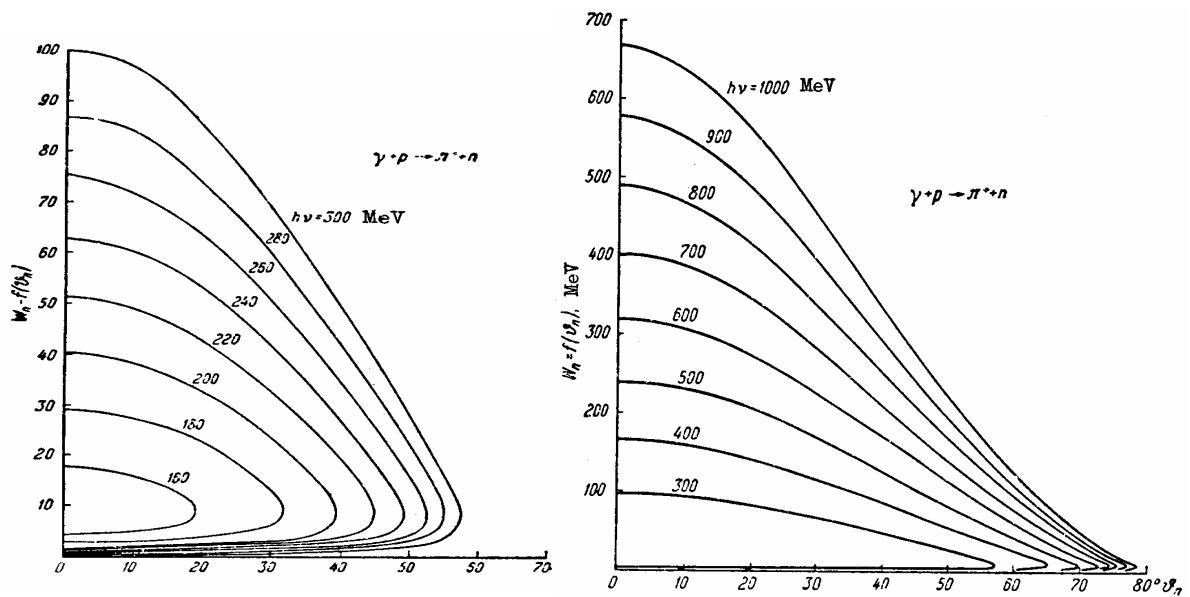


Figura 11.4 relazione energia-angolo del neutrone nella reazione: $\gamma + p \rightarrow n + \pi^+$

Nella fig. 11.3 viene studiato l'angolo di emissione del pione ($0 \leq \vartheta \leq \pi$), mentre nella fig. 11.4 viene studiato l'angolo di emissione del neutrone ($0 \leq \vartheta \leq \vartheta_{lim}$), dove il valore di ϑ_{lim} dipende dall'energie del fotone.

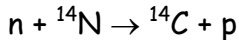
Un caso semplice si verifica quando la particella 3 o la particella 4 vengono prodotte ad un angolo $\vartheta_3 = 90^\circ$ oppure $\vartheta_4 = 90^\circ$ nel laboratorio, a patto che le disuguaglianze precedenti siano soddisfatte. Infatti, in questo caso, si ha rispettivamente:

$$E_3 = \frac{A_3 \cdot E_T}{2E_T^2} = \frac{A_3}{2E_T} = \frac{E_T^2 - p_1^2 + m_3^2 - m_4^2}{2E_T} = \frac{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 - m_4^2 + 2E_1 m_2}{2(E_1 + m_2)} \quad (11.12)$$

$$E_4 = \frac{m_1^2 + m_2^2 + m_4^2 - m_3^2 + 2E_1 m_2}{2(E_1 + m_2)}$$

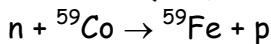
Vediamo ora qualche esempio.

Calcolare Q ed E_{thresh} per le seguenti reazioni.



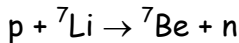
$$Q = m(n) + m({}^{14}\text{N}) - m(p) - m({}^{14}\text{C}) = 0.63 \text{ MeV}$$

Essendo $Q > 0$, $E_{\text{thresh}} = 0$



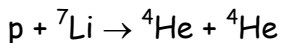
$$Q = m(n) + m({}^{59}\text{Co}) - m(p) - m({}^{59}\text{Fe}) = -0.82 \text{ MeV}$$

$$E_{\text{thresh}} = \frac{(m_3 + m_4)^2 - (m_1 + m_2)^2}{2m_2} = \frac{(m_{\text{Fe}} + m_p)^2 - (m_n + m_{\text{Co}})^2}{2m_n} = 0.834 \text{ MeV}$$



$$Q = m(p) + m({}^7\text{Li}) - m(n) - m({}^7\text{Be}) = -1.65 \text{ MeV}$$

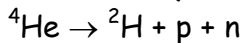
$$E_{\text{thresh}} = \frac{(m_{\text{Be}} + m_n)^2 - (m_p + m_{\text{Li}})^2}{2m_p} = 1.88 \text{ MeV}$$



$$Q = m(p) + m({}^7\text{Li}) - 2m({}^4\text{He}) = 17.34 \text{ MeV}$$

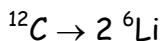
Essendo $Q > 0$, $E_{\text{thresh}} = 0$.

Trovare il Q-valore delle seguenti reazioni:



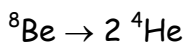
$$Q = m({}^4\text{He}) - m({}^2\text{H}) - m(p) - m(n) = -26.06 \text{ MeV}$$

Significa che per rompere un nucleo di ${}^4\text{He}$ in un deutone, un protone ed un neutrone occorre fornire al sistema almeno 26.06 MeV. il nucleo di ${}^4\text{He}$ infatti è estremamente stabile



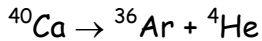
$$Q = m({}^{12}\text{C}) - 2 \cdot m({}^6\text{Li}) = -28.17 \text{ MeV}$$

Anche in questo caso bisogna fornire al sistema energia dall'esterno in quanto si trova in una conformazione stabile.



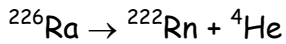
$$Q = m({}^8\text{Be}) - 2 \cdot m({}^4\text{He}) = +0.094 \text{ MeV}$$

Il valore positivo di Q sta a indicare che il nucleo di ${}^8\text{Be}$ spontaneamente si spezza in due particelle alfa (il Berillio 8 non esiste in natura)



$$Q = m({}^{40}\text{Ca}) - m({}^{36}\text{Ar}) - m({}^4\text{He}) = -7.04 \text{ MeV}$$

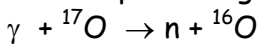
Il ${}^{40}\text{Ca}$ è un nucleo doppiamente magico, quindi estremamente stabile: per spezzarlo occorre fornire energia dall'esterno.



$$Q = m({}^{226}\text{Ra}) - m({}^{222}\text{Rn}) - m({}^4\text{He}) = +4.87 \text{ MeV}$$

Infatti, come abbiamo visto, il ${}^{226}\text{Ra}$ decade alfa in ${}^{222}\text{Rn}$. Essendo inoltre $m({}^{222}\text{Rn}) \gg m({}^4\text{He})$, il valore Q coinciderà praticamente con l'energia cinetica della particella alfa.

Come ultimo esercizio valutiamo l'energia cinetica del neutrone uscente ad un angolo $\vartheta = 90^\circ$ per la seguente reazione:



per una energia del fotone di 50 MeV

Applicando la (11.12) a questo caso ($1=\gamma$, $2={}^{17}\text{O}$, $3=n$, $4={}^{16}\text{O}$), abbiamo:

$$E_n = \frac{m_n^2 + m_{17}^2 - m_{16}^2 + 2E_\gamma m_{17}}{2(E_\gamma + m_{17})} = 982.56 \text{ MeV}$$

Da cui si ricava l'energia cinetica del neutrone : $T_n = E_n - m_n = 43.05 \text{ MeV}$

Data la bassa energia il calcolo si può ovviamente fare anche in modo classico:

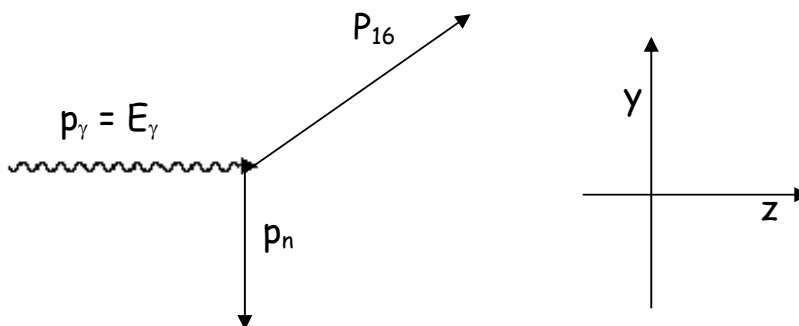


Figura 11.5 la cinematica della reazione $\gamma + {}^{17}\text{O} \rightarrow n + {}^{16}\text{O}$ descritta nel testo

Dalle leggi di conservazione di energia e quantità di moto (vedi figura 11.5):

$$E_\gamma + m_{17} = E_n + E_{16} = T_n + m_n + T_{16} + m_{16}$$

$$p_\gamma = E_\gamma = p_{16z}$$

$$p_n = p_{16y}$$

Introducendo Q, la prima relazione può essere riscritta come:

$$E_\gamma + Q = T_n + T_{16}$$

Quadrando e sommando la seconda e la terza:

$$2m_{16} T_{16} = p_{16}^2 = (p_{16z}^2 + p_{16y}^2) = E_\gamma^2 + p_n^2 = E_\gamma^2 + 2m_n T_n$$

Sostituendo $T_{16} = E_\gamma + Q - T_n$ si ricava:

$$T_n = \frac{m_{16}}{m_n + m_{16}} (E_\gamma + Q) - \frac{E_\gamma^2}{2(m_n + m_{16})}$$

Dai calcoli si ricava che $Q = -4.14 \text{ MeV}$ (negativo in quanto il nucleo ^{17}O è stabile, ma non elevato in quanto il nono neutrone è aggiunto ad un numero magico di neutroni ed è quindi relativamente poco legato). Inoltre, essendo $E_\gamma \ll m_{16}$ si può trascurare il secondo termine e si ottiene:

$$T_n \approx \frac{m_{16}}{m_n + m_{16}} (E_\gamma + Q) \approx \frac{A-1}{A} (E_\gamma + Q) \approx 43 \text{ MeV}$$

dove A rappresenta il numero di massa del bersaglio ($A=17$).

Per completare il problema, troviamo anche la quantità di moto e la direzione di volo del nucleo ^{16}O .

$$p_n = \sqrt{2m_n T_n} = 285 \text{ MeV}$$

che risulta molto maggiore del momento iniziale del fotone $p_\gamma = E_\gamma = 50 \text{ MeV}$. Quanto al nucleo ^{16}O di rinculo (di massa $m_A = 14895.08 \text{ MeV}$), esso avrà una quantità di moto di componenti:

$$p_\perp = p_n = 285 \text{ MeV} \quad \text{e} \quad p_{||} = p_\gamma = 50 \text{ MeV}.$$

Pertanto $p_A = (p_\perp^2 + p_{||}^2)^{1/2} = 289 \text{ MeV}$ e $T_A = \frac{p_A^2}{2m_a} = 2.8 \text{ MeV}$. La direzione del

nucleo di rinculo è: $\varphi = \text{atan}(p_\perp / p_{||}) \approx 10^\circ$

11.7 Energia di legame B di un nucleone in un nucleo

Se si vuole separare un nucleone da un nucleo, le reazioni corrispondenti sono le seguenti:



Avremo pertanto:

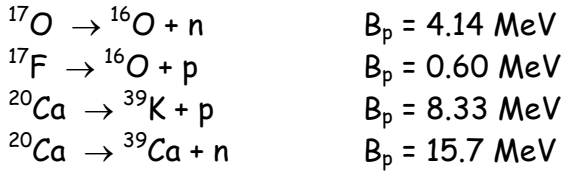
$$B_p = M_{Z-1, A-1} + m_p - M_{Z, A}$$

$$B_n = M_{Z, A-1} + m_n - M_{Z, A}$$

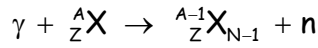
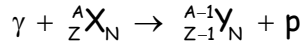
Nel caso della separazione di un protone, bisogna fare attenzione al fatto se le masse fornite sono atomiche o nucleari: nel primo caso infatti bisogna aggiungere la massa dell'elettrone (0.511 MeV)

Come esempio, calcoliamo qualche energia di separazione.





Se l'energia per strappare un nucleone viene ceduta tramite un fotone:



Dalla definizione di Q, essendo $m_1=0$, si ottiene: $Q = (m_2 - m_3 - m_4)$

Nel caso di separazione di un protone: $Q = (M_{Z,A} - m_p - M_{Z-1,A-1}) = -B_p$

Nel caso di separazione di un neutrone: $Q = (M_{Z,A} - m_n - M_{Z,A-1}) = -B_n$

Cioè l'energia di separazione rappresenta proprio il Q della reazione cambiato di segno.

Ricordando la relazione tra energia di soglia e Q di una reazione, l'energia di soglia del fotone dovrà essere rispettivamente:

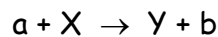
$$E_{\text{thr}} = -Q \frac{M_{Z,A} + M_{Z-1,A-1} + m_p}{2M_{Z,A}} = B_p \frac{M_{Z,A} + M_{Z-1,A-1} + m_p}{2M_{Z,A}} = B_p + \frac{B_p^2}{2M_{Z,A}}$$

$$E_{\text{thr}} = -Q \frac{M_{Z,A} + M_{Z,A-1} + m_n}{2M_{Z,A}} = B_n \frac{M_{Z,A} + M_{Z,A-1} + m_n}{2M_{Z,A}} = B_n + \frac{B_n^2}{2M_{Z,A}}$$

Poiché per tutti i nuclei $B < 10 \text{ MeV}$ e $M_{Z,A} > 10^3 \text{ MeV}$, in pratica si ha che, con ottima approssimazione, possiamo scrivere: $E_{\text{thr}} \approx B$

11.8 Diffusione elastica

approfittiamo di questo capitolo per risolvere il problema delle reazioni a due corpi con il formalismo della meccanica classica. Supponiamo quindi in generale di avere una reazione del tipo:



Dalla conservazione della quantità di moto (vedi figura 11.6) si ha:

$$p_Y^2 = p_a^2 + p_b^2 - 2 \cdot p_a \cdot p_b \cdot \cos \vartheta$$

$$\frac{p_Y^2}{2m_Y} = \frac{p_a^2}{2m_a} \frac{m_a}{m_Y} + \frac{p_b^2}{2m_b} \frac{m_b}{m_Y} - 2 \frac{p_a p_b \sqrt{m_a m_b}}{m_Y \sqrt{m_a} \sqrt{m_b}} \cos \vartheta$$

Ricordando che : $Q = T_b + T_Y - T_a$ si ricava l'espressione: $T_Y = Q - T_b + T_a$

Pertanto, dopo qualche passaggio algebrico, si ottiene

$$Q = T_b \left(1 + \frac{m_b}{m_Y} \right) - T_a \left(1 - \frac{m_a}{m_Y} \right) - \frac{2}{m_Y} \sqrt{T_a T_b m_a m_b} \cos \vartheta$$

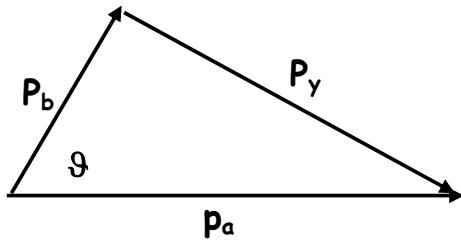
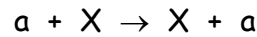


Fig. 11.6 Il diagramma dei momenti

Da questa relazione si può ricavare T_b in funzione di T_a e di ϑ :

$$\sqrt{T_b} = \frac{\sqrt{m_a m_b T_a} \cos \vartheta \pm \sqrt{m_a m_b T_a \cos^2 \vartheta + (m_y + m_b) \cdot [m_y Q + (m_y - m_a) T_a]}}{m_y + m_b}$$

La formula si semplifica notevolmente nel caso di una diffusione elastica del tipo:



Avremo infatti: $m_b = m_a$; $m_y = m_x$; $Q = 0$; $T_b = T_a$

Sostituendo:

$$\sqrt{T_a'} = \frac{m_a \sqrt{T_a} \cos \vartheta \pm \sqrt{m_a^2 T_a \cos^2 \vartheta + T_a (m_x^2 - m_a^2)}}{m_x + m_a}$$

che si riscrive:

$$\sqrt{T_a'} = \frac{m_a \sqrt{T_a} \cos \vartheta \pm \sqrt{T_a (m_x^2 - m_a^2 \sin^2 \vartheta)}}{m_x + m_a}$$

In particolare, se "a" è un nucleone ed "x" un nucleo, si può scrivere:

$$m_a = m_N \quad e \quad m_x \approx A \cdot m_N$$

$$\sqrt{T_N'} = \frac{\sqrt{T_N} \cos \vartheta \pm \sqrt{T_N (A^2 - \sin^2 \vartheta)}}{A + 1}$$

Quadrando:

$$T_N' = \frac{T_N}{(A + 1)^2} \left(\cos \vartheta + \sqrt{A^2 - \sin^2 \vartheta} \right)^2$$

dove abbiamo tenuto solo il segno più, essendo l'energia cinetica sempre positiva. In particolare:

$$\text{per } \vartheta = 0 \rightarrow T_{N \max}' = \frac{T_N}{(A + 1)^2} (1 + A)^2 = T_N$$

$$\text{per } \vartheta = \pi \rightarrow T_{N \min}' = T_N \frac{(A - 1)^2}{(A + 1)^2}$$

$$\text{per } A = 1 \rightarrow T_{N \min}' = 0 \quad \text{per } A > 1 \rightarrow T_{N \min}' < T_N$$

Nuclide	A	$(A-1)^2/(A+1)^2$
H	1	0
² H	2	0.111

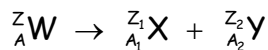
${}^9\text{Be}$	9	0.640
${}^{12}\text{C}$	12	0.716
${}^{16}\text{O}$	16	0.779
${}^{23}\text{Na}$	23	0.840
${}^{56}\text{Fe}$	56	0.931
${}^{238}\text{U}$	238	0.983

Tab. 11.1

La tabella 11.1 fornisce il valore della frazione minima $\frac{T'_{N\min}}{T_N}$ di energia cinetica residua. Ci sarà utile quando affronteremo il problema del rallentamento dei neutroni per scattering elastico. È comunque chiaro che sono molto più efficaci bersagli leggeri piuttosto che bersagli pesanti.

11.10 Reazioni senza proiettile (decadimento)

Sono reazioni del tipo:



Se si suppone che il nucleo iniziale sia in quiete, detta m_0 la sua massa, m_1 e m_2 le masse dei due frammenti e T_1 e T_2 le loro energie cinetiche, deve essere:

$$\begin{cases} \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 0 \\ m_0 = T_1 + m_1 + T_2 + m_2 \end{cases}$$

Vediamo il caso non relativistico

$$p_1^2 = p_2^2$$

$$\frac{p_1^2}{2m_1} = \frac{p_2^2}{2m_2} \quad T_1 = \frac{m_2}{m_1} T_2$$

$$\text{ed essendo : } Q = m_0 - m_1 - m_2 = T_1 + T_2$$

$$T_1 \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right) = Q, \text{ e quindi:}$$

$$T_1 = Q \frac{m_2}{m_1 + m_2} \quad \text{e} \quad T_2 = Q \frac{m_1}{m_1 + m_2}$$

Nel caso relativistico:

$$\begin{cases} \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 0 \\ m_0 = E_1 + E_2 \end{cases}$$

$p_1^2 = p_2^2$ implica che: $E_1^2 - m_1^2 = E_2^2 - m_2^2$ e pertanto dal sistema:

$$\begin{cases} E_1^2 - m_1^2 = E_2^2 - m_2^2 \\ E_1 + E_2 = m_0 \end{cases}$$

Si ricava:

$$E_1 = \frac{m_0^2 + m_1^2 - m_2^2}{2m_0} \quad \text{ed} \quad E_2 = \frac{m_0^2 + m_2^2 - m_1^2}{2m_0}$$

le corrispondenti energie cinetiche risultano essere:

$$T_1 = \frac{(m_0 - m_1)^2 - m_2^2}{2m_0} \quad e \quad T_2 = \frac{(m_0 - m_2)^2 - m_1^2}{2m_0}$$

Naturalmente se avessimo utilizzato il formalismo dei 4-vettori avremmo ottenuto lo stesso risultato. Nel caso di un decadimento possiamo scrivere:

$$0 \rightarrow 1 + 2$$

$$p_{0\mu}^2 = (p_{1\mu} + p_{2\mu})^2$$

$$m_0^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2E_1E_2 - 2\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2$$

che, essendo $m_0 = E_1 + E_2$ e $\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1$, diventa:

$$m_0^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2m_0E_1 - 2E_1^2 + 2p_1^2 = 2m_0E_1 + m_2^2 - m_1^2$$

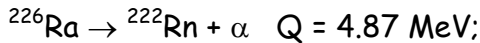
e quindi:

$$E_1 = \frac{m_0^2 + m_1^2 - m_2^2}{2m_0}$$

Come esempi valutiamo le energie cinetiche dei prodotti di reazione nei seguenti decadimenti:



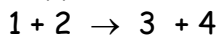
$$T_\alpha = \frac{(m_{\text{Be}} - m_\alpha)^2 - m_\alpha^2}{2m_{\text{Be}}} = \frac{m_{\text{Be}}^2 - 2m_{\text{Be}}m_\alpha}{2m_{\text{Be}}} = \frac{m_{\text{Be}} - 2m_\alpha}{2} = \frac{Q}{2} = 0.046 \text{ MeV}$$



$$T_\alpha = \frac{m({}^{222}\text{Rn})}{m({}^{222}\text{Rn}) + m(\alpha)} Q \approx Q = 4.87 \text{ MeV}$$

11.11 Soluzione generale: calcolo relativistico delle reazioni a due corpi

Supponiamo al solito di studiare la reazione a due corpi



In maniera del tutto generale possiamo scrivere che:

$$p_1 + p_2 = p_3 + p_4 \quad \text{o anche: } p_1 - p_3 = p_4 - p_2$$

$$\text{quadrando: } (p_1 - p_3)^2 = (p_4 - p_2)^2$$

che, nell'ipotesi della particella 2 in quiete, da il solito risultato:

$$m_1^2 + m_3^2 + 2p_1p_3\cos\theta - 2E_1E_3 = m_4^2 + m_2^2 - 2m_2E_4$$

La relazione precedente, unita alla relazione di conservazione dell'energia:

$$E_1 + m_2 = E_3 + E_4$$

permette di eliminare E_4 e di ricavare p_3 o E_3 della particella 3 in funzione di ϑ_3 .

se poniamo:

$$\alpha = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 - m_4^2 + 2m_2E_1$$

$$\beta = 2(E_1 + m_2)$$

$$\gamma = 2p_1\cos\vartheta_3$$

$$\varepsilon = \frac{\cos\vartheta_3}{|\cos\vartheta_3|} \quad (\varepsilon = \pm 1 \text{ a seconda del valore dell'angolo } \vartheta_3)$$

e ridefiniamo a, b, c come segue:

$$a = \beta^2 - \alpha^2$$

$$b = -\alpha \cdot \gamma$$

$$c = \alpha^2 + \gamma^2 + m_3^2$$

$$\Delta = b^2 - a \cdot c$$

possiamo calcolare E_3 :

$$E_3 = \frac{-b + \varepsilon \cdot \sqrt{\Delta}}{a}$$

da cui si ricavano tutte le altre grandezze cinematiche:

$$T_3 = E_3 - m_3 \quad E_4 = E_1 + m_2 - E_3 \quad T_4 = E_4 - m_4$$

$$p_3 = \sqrt{E_3^2 - m_3^2} \quad p_4 = \sqrt{E_4^2 - m_4^2}$$

Qui sotto è riportata una subroutine in F77 che calcola la cinematica delle reazioni a due corpi.

```

subroutine kine(tc1,rm1,rm2,tc3,rm3,t3,tc4,rm4,t4,iflag)
c      reazione : 1 + 2 ----> 3 + 4
c      parametri input: tc1,rm1, rm2, rm3,t3, rm4
c      parametri output: tc3, tc4,t4, iflag
c      tcj = en cinetica;  rmj = massa;  tj = angolo
c      iflag =0/1 => reaz impossibile/possibile
      implicit double precision (a-h,o-z)
      iflag=0
      sign=1.
      e1=tc1+rm1
      p=rm1**2+rm3**2-rm2**2-rm4**2+2.*rm2*(e1+rm2)
      q=2.*(e1+rm2)
      p1=dsqrt(e1**2-rm1**2)
      r=2.*p1*dcos(t3)
      if(r.eq.0.) go to 1
      sign=r/dabs(r)
1      a=q**2-r**2
      b=-p*q
      c=r**2*rm3**2+p**2
      delta=b**2-a*c
      if(delta.lt.0.) return
      e3=(-b+sign*dsqrt(delta))/a
      tc3=e3-rm3
      e4=e1+rm2-e3
      tc4=e4-rm4
      p3=dsqrt(e3**2-rm3**2)
      p4=dsqrt(e4**2-rm4**2)
      denom=p1-p3*dcos(t3)
      if(denom.eq.0.) denom=1.0e-06
      t4=datan(p3*dsin(t3)/denom)
      if(t4.lt.0.) t4=3.1415+t4
      iflag=1
      return
end

```

11.12 La Sezione d'urto

Supponiamo (vedi figura 11.7) di avere un fascio di particelle (protoni, elettroni, fotoni o qualsiasi altra particella) di ben definita energia che incide su un bersaglio (target). L'intensità I di un fascio è definita come il numero di particelle che passano attraverso una sezione perpendicolare alla direzione del fascio nell'unità di tempo.

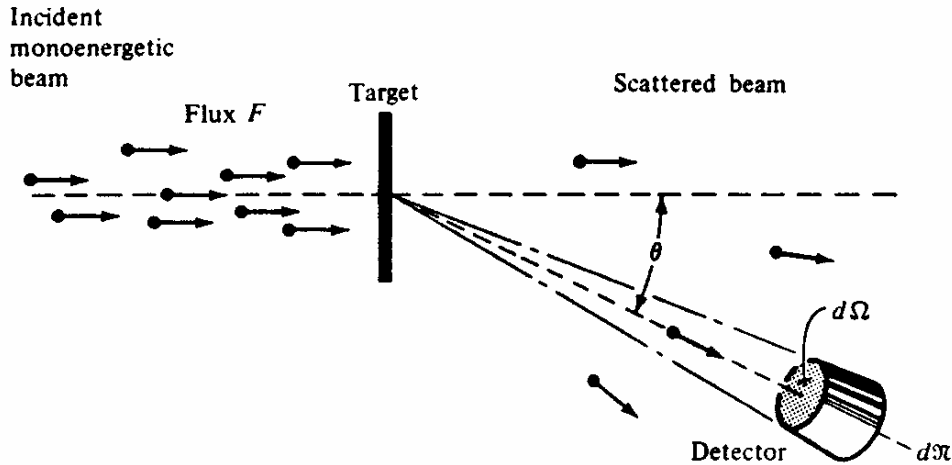


Fig. 11.7 geometria di un apparato di conteggio

Le particelle emesse dal bersaglio entro un angolo solido $d\Omega$ attorno alla direzione ϑ, φ a seguito della reazione indotta dal fascio sono "contate" da un opportuno rivelatore. Il numero dN di particelle rivelate per unità di tempo è ovviamente proporzionale all'intensità del fascio incidente, all'angolo solido $d\Omega$, al numero di centri diffusori del bersaglio per unità di volume n e allo spessore x del bersaglio stesso.

$$dN \propto I n x d\Omega$$

La costante di proporzionalità è indicata con $\sigma(\vartheta)$ o $\sigma(\vartheta, E)$ ed è chiamata sezione

$$\text{d'urto differenziale: } \sigma(\vartheta) = \frac{d\sigma(\vartheta)}{d\Omega}$$

$$dN = I \cdot n \cdot x \cdot \frac{d\sigma(\vartheta)}{d\Omega} d\Omega$$

Il numero totale di particelle emesse per unità di tempo si ottiene integrando su tutto l'angolo solido:

$$N = \int_{4\pi} I n x \sigma(\vartheta) d\Omega = \int_{4\pi} I n x d\sigma(\vartheta) = I n x \sigma_{\text{tot}}$$

$$\text{dove } \sigma_{\text{tot}} = \int_{4\pi} \sigma(\vartheta) d\Omega = \int_{4\pi} \frac{d\sigma(\vartheta)}{d\Omega} d\Omega$$

σ_{tot} è chiamata sezione d'urto totale (o semplicemente sezione d'urto) della reazione: essa dipende ovviamente dal tipo di reazione e assai spesso dall'energia del proiettile. La sezione d'urto ha le dimensioni di un'area e le unità di misura più usate sono il barn ed i suoi sottomultipli millibarn (mbarn) e microbarn (μbarn). 1 barn = 10^{-24} cm^2 .

11.13 Misura di sezioni d'urto

La misura delle sezioni d'urto è importantissima in fisica nucleare, in quanto la sua conoscenza permette di risalire ai meccanismi dinamici della reazione e quindi alle interazioni nucleari. Proprio attraverso la misura delle sezioni d'urto si ricavano quindi informazioni relative alle forze nucleari.

La sezione d'urto di un certo processo nucleare si deduce dalla misura del numero di eventi rivelati per unità di tempo da un appropriato rivelatore. Nota l'intensità del fascio e le caratteristiche del bersaglio (essenzialmente il numero di centri diffusori indipendenti), è necessario conoscere l'efficienza di rivelazione ε_{det} che in genere consta di due fattori indipendenti: $\varepsilon_{\text{det}} = \varepsilon_{\text{geom}} \cdot \varepsilon_{\text{intr}}$

L'efficienza geometrica del rivelatore $\varepsilon_{\text{geom}}$ è definita come la frazione di angolo solido totale (4π) coperta dal rivelatore. Se la distanza d rivelatore-bersaglio è molto maggiore delle dimensioni del bersaglio, questo può essere considerato "puntiforme" e si ha: $\varepsilon_{\text{geom}} \approx \frac{S}{d^2}$, dove S rappresenta la sezione del rivelatore

perpendicolare al bersaglio. Infatti, presa una sfera di raggio d e quindi di superficie $4\pi d^2$, essa sottende un angolo solido pari a 4π rispetto al suo centro. Una porzione di sfera di superficie S sottenderà rispetto al centro un angolo solido proporzionalmente minore dato dalla seguente relazione:

$$\frac{4\pi d^2}{4\pi} = \frac{S}{\Delta\Omega}, \text{ da cui appunto } \Delta\Omega = \frac{S}{d^2}$$

L'efficienza intrinseca del rivelatore $\varepsilon_{\text{intr}}$ dipende dal tipo di particelle e dal materiale del rivelatore. Essa esprime la probabilità che una particella che incide nel volume sensibile del rivelatore venga da questo rivelata. Vedremo nel seguito, quando parleremo dei rivelatori, come è possibile valutarla nei casi più complicati di rivelazione di particelle neutre come fotoni e neutroni. Nel caso di particelle cariche invece essa praticamente vale: $\varepsilon_{\text{intr}} \approx 1$.

Supponiamo di far incidere un fascio di intensità I particelle al secondo su un bersaglio di spessore x contenente n centri diffusori (in genere nuclei, se siamo interessati a sezioni d'urto di processi nucleari) per unità di volume e di rivelare i prodotti di reazione tramite un rivelatore posizionato alla distanza d lungo la direzione ϑ, φ . Il numero R di eventi "contati" sarà dato da:

$$R = n \times \int_{\Delta\Omega} \sigma(\vartheta) d\Omega \cdot I \varepsilon_{intr}$$

Se il numero di massa dei nuclei bersaglio è A e la densità del bersaglio è ρ , risulta:

$$n = \frac{N_0}{A} \rho. \text{ Pertanto si può scrivere:}$$

$$R = \frac{N_0}{A} \rho \times \int_{\Delta\Omega} \sigma(\vartheta) d\Omega \cdot I \varepsilon_{intr}$$

Se la sezione d'urto differenziale $\sigma(\vartheta)$ si può considerare costante entro l'angolo solido $\Delta\Omega$ (condizione senz'altro vera perché vogliamo misurare proprio $\sigma(\vartheta)$), possiamo scrivere:

$$R = \frac{N_0}{A} \rho \times \sigma(\vartheta) \Delta\Omega \cdot I \varepsilon_{intr}$$

da cui possiamo ricavare il valore della sezione d'urto:

$$\sigma(\vartheta) = \frac{R A}{N_0 \rho \times \Delta\Omega \cdot I \varepsilon_{intr}}$$

Nel caso particolare di sezione d'urto isotropa, si avrà:

$$\sigma_{tot} = \int_{4\pi} \frac{d\sigma(\vartheta)}{d\Omega} d\Omega = \frac{d\sigma}{d\Omega} \int_{4\pi} d\Omega = 4\pi \frac{d\sigma}{d\Omega}$$

$$\text{ossia: } \sigma(\vartheta) = \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\sigma_{tot}}{4\pi} \text{ per ogni valore di } \vartheta.$$

Le relazioni precedenti diventano:

$$R = \frac{N_0}{A} \rho \times \sigma(\vartheta) \Delta\Omega \cdot I \varepsilon_{intr} = \frac{N_0}{A} \rho \times \sigma_{tot} \frac{\Delta\Omega}{4\pi} \cdot I \varepsilon_{intr} = \frac{N_0}{A} \rho \times \sigma_{tot} \cdot I \varepsilon_{intr} \varepsilon_{geom}$$

$$\sigma_{tot} = \frac{4\pi R A}{N_0 \rho \times \Delta\Omega I \varepsilon_{intr}} = \frac{R A}{N_0 \rho \times I \varepsilon_{intr} \varepsilon_{geom}}$$

Vediamo ora alcuni esempi.

Esercizio 1

Calcolo dell'angolo solido di un contatore quadrato di lato 5 cm posto a distanza di 50 cm dal bersaglio.

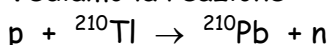
$$\text{Si ha: } \Delta\Omega = \frac{5^2}{50^2} = 0.01 \text{ sterad.}$$

Se il rivelatore ha invece forma circolare, sempre di raggio 5 cm e distanza 50 cm:

$$\Delta\Omega = \frac{\pi 5^2}{50^2} = 0.314 \text{ sterad.}$$

Esercizio 2

Vediamo la reazione



Troviamo il numero totale di neutroni emessi al secondo se la sezione d'urto totale è $\sigma_{\text{tot}} = 50 \mu\text{barn}$, l'intensità del fascio di protoni è $I = 5 \cdot 10^7$ protoni al secondo, ed il bersaglio ha uno spessore massico $\tau = 100 \text{ mg/cm}^2$.

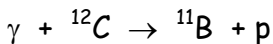
Quando studieremo le interazioni delle radiazioni con la materia vedremo che gli spessori vengono misurati in g/cm^2 : si chiamano spessori massici e sono dati dal prodotto dello spessore lineare per la densità: $\tau = \rho \cdot x$. Poiché siamo interessati al numero totale di neutroni emessi, l'angolo solido da considerare sarà pari a 4π steradiani, equivalente a $\varepsilon_{\text{geom}} = 1$. Inoltre prendiamo ovviamente $\varepsilon_{\text{intr}} = 1$. Dalla formula:

$$R = \frac{N_0}{A} \rho x \sigma_{\text{tot}} \frac{\Delta\Omega}{4\pi} \cdot I \varepsilon_{\text{intr}}$$

sostituendo i valori numerici si ottiene: $R = 0.7$ neutroni/secondo = 42 neutroni/minuto

Esercizio 3

Studiamo ora la reazione



Supponiamo di avere un flusso di fotoni pari a $\Phi = 10^8$ fotoni/ cm^2/s con una sezione del fascio ad $a = 1 \text{ cm}^2$. Supponiamo di sapere che la sezione d'urto del processo sia in prima approssimazione isotropa e valga $\sigma(\vartheta) = 1 \mu\text{barn/sterad}$. I protoni vengono contati da un rivelatore di raggio $r = 5 \text{ cm}$ posto alla distanza $d = 100 \text{ cm}$ dal bersaglio di ${}^{12}\text{C}$ che ha uno spessore $x = 10^{-2} \text{ cm}$ ed è di dimensioni maggiori del fascio ed una densità $\rho = 2.2 \text{ g/cm}^3$. Si domanda quanti protoni vengono contati al secondo.

Dobbiamo utilizzare la relazione:

$$R = \frac{N_0}{A} \rho x \sigma(\vartheta) \Delta\Omega \cdot I \varepsilon_{\text{intr}}$$

dove:

$$A = 12$$

$$\sigma(\vartheta) = 10^{-30} \text{ cm}^2/\text{sterad}$$

$$\Delta\Omega = \frac{\pi r^2}{d^2} = 7.85 \cdot 10^{-3} \text{ sterad}$$

$$I = \Phi \cdot a = 10^8 \text{ fotoni/s}$$

$$\varepsilon_{\text{intr}} = 1$$

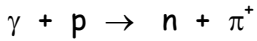
sostituendo si ottiene:

$$R = 8.6 \cdot 10^{-4} \text{ protoni al secondo} = 3.1 \text{ protoni all'ora.}$$

Nota se le dimensioni del bersaglio fossero state minori delle dimensioni del fascio avremmo dovuto considerare la sezione del bersaglio e non quella del fascio per il calcolo dell'intensità effettiva I . Infatti, ai fini delle interazioni, ha importanza solo la intersezione fascio-bersaglio: la parte di fascio e/o bersaglio che non si sovrappongono non ha alcun affetto.

Esercizio 4

Un fotone incidente su un bersaglio di idrogeno produce un mesone π^+ (di massa $m = 139.6 \text{ MeV}/c^2$) secondo la reazione:



illustrata in figura 11.8

- Trovare la soglia della reazione;
- Se il mesone ha una energia cinetica di 10 MeV ed è emesso a 90° rispetto alla direzione del fotone incidente, calcolare l'energia del fotone;
- Calcolare l'energia cinetica del neutrone e la sua direzione;
- Avendo a disposizione un fascio di intensità $I = 5 \cdot 10^8$ fotoni/secondo, un bersaglio di spessore $\tau = 0.8 \text{ g}/\text{cm}^2$, un rivelatori di pioni di dimensioni $15 \times 15 \text{ cm}^2$ posto a distanza $d = 150 \text{ cm}$ dal bersaglio, valutare il numero di pioni rivelati al secondo se la sezione d'urto del processo è $\sigma_{\text{tot}} = 0.1 \text{ } \mu\text{barn}/\text{sterad}$.

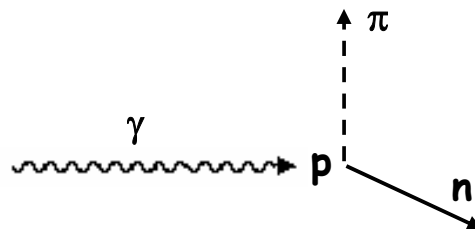


Fig. 11.8 cinematica di una fotoreazione

$$Q = m_p - m_n - m_\pi = -141 \text{ MeV}$$

$$E_{\text{thr}} = \frac{(m_n + m_\pi)^2 - m_p^2}{2m_p} = 151.47 \text{ MeV}$$

Per calcolare l'energia del fotone scriviamo la reazione in termini di 4-vettori.

$p_\gamma + p_p = p_n + p_\pi$ che riscriviamo nel seguente modo:

$$(p_\gamma - p_\pi)^2 = (p_n - p_p)^2$$

Poiché l'angolo tra il π ed il fotone è 90° il termine con il prodotto scalare scompare.

Inoltre supponiamo in quiete il protone.

$$m_\pi^2 - 2E_\pi E_\gamma = m_p^2 + m_n^2 - 2m_p E_n$$

dalla conservazione dell'energia si elimina E_n

$$E_n = E_\gamma + m_p - E_\pi, \quad \text{dove} \quad E_\pi = T_\pi + m_\pi = 149.6 \text{ MeV}$$

svolgendo i conti si ricava:

$$E_\gamma = \frac{m_\pi^2 + m_p^2 - m_n^2 - 2m_p E_\pi}{2(E_\pi - m_p)} = 167.16 \text{ MeV}$$

la quantità di moto del pione è : $p_{\pi} = \sqrt{T_{\pi}(T_{\pi} + 2m_{\pi})} = 53.78 \text{ MeV}$

e per la conservazione della quantità di moto sarà:

$$p_{n\perp} = p_{\pi} = 53.78 \text{ MeV}$$

$$p_{n\parallel} = p_{\gamma} = E_{\gamma} = 167 \text{ MeV}$$

$$p_n = (p_{n\perp}^2 + p_{n\parallel}^2)^{1/2} = 175 \text{ MeV}$$

$$T_n = \frac{p_n^2}{2m_n} = 15.4 \text{ MeV}$$

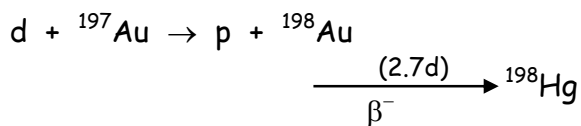
la direzione è data da: $\varphi = \text{atan}(p_{n\perp}/p_{n\parallel}) = 17.9^\circ$

Infine:

$$R = \frac{N_0}{A} \tau \sigma(\vartheta) \Delta\Omega \cdot I \varepsilon_{\text{intr}} = 36 \text{ s}^{-1}$$

Esercizio 5

Quando il nuclide ^{197}Au è bombardato con deutoni ha luogo la reazione:



La sezione d'urto totale della reazione è $\sigma_{\text{tot}} = 1 \text{ mbarn}$

L' ^{198}Au è instabile e decade β^- in ^{198}Hg con un tempo di dimezzamento di 2.7 giorni. Esso emette un unico spettro beta seguito da fotoni da 0.412 MeV.

a) Trovare la soglia della reazione;

b) Calcolare l'energia massima dei beta emessi;

c) Supponendo di avere un fascio di deutoni di intensità $I = 10^7 \text{ s}^{-1}$, un bersaglio di ^{197}Au di spessore $\tau = 10 \text{ mg/cm}^2$, valutare il conteggio di protoni che si ha su un rivelatore di superficie $S = 10 \text{ cm}^2$ posto alla distanza $d = 10 \text{ cm}$ dal bersaglio;

d) Valutare il numero di nuclei di ^{198}Au presenti nel bersaglio dopo un tempo di irraggiamento di 80 ore;

e) Supponendo di contare la radiazione beta con un rivelatore che sottende un angolo $\Delta\Omega = 1 \text{ sterad}$, valutare il rateo di conteggio atteso immediatamente dopo la fine dell'irraggiamento.

$$Q = m_d + m({}^{197}\text{Au}) - m_p - m({}^{198}\text{Au}) = 4.28 \text{ MeV}$$

Le reazione è quindi endotermica e pertanto $T_{\text{thresh}} = 0$

Poichè la transizione beta finisce sullo stato eccitato del ^{198}Hg :

$$E_{\beta \text{ max}} = m({}^{198}\text{Au}) - [m({}^{198}\text{Hg}) + 0.412] = 1.463 \text{ MeV}$$

$$T_{\beta \text{ max}} = E_{\beta \text{ max}} - m_e = 0.952 \text{ MeV}$$

Dalla geometria si ricava : $\Delta\Omega = S/d^2 = 0.1 \text{ sterad}$

$$R = \frac{N_0}{A} \rho \times \sigma_{\text{tot}} \frac{\Delta\Omega}{4\pi} \cdot I \varepsilon_{\text{intr}} = 2.42 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}.$$

Per valutare il numero di nuclei presenti nel bersaglio dopo un certo tempo bisogna fare il bilancio tra il processo di formazione ed il processo di decadimento.

$$\frac{dn(t)}{dt} = r - \lambda n(t)$$

dove λ è la costante di decadimento beta del nucleo ^{198}Au che vale:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{2.7 \cdot 86400} = 2.97 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}$$

r invece rappresenta la velocità di formazione del nucleo ^{198}Au , che dipende dalla sezione d'urto dalla intensità del fascio e dallo spessore massico del bersaglio. Si può quindi usare la stessa formula che fornisce il rateo di produzione R , avendo posto $\Delta\Omega = 4\pi$ e $\varepsilon_{\text{intr}} = 1$:

$$r = \frac{N_0}{A} \tau \sigma_{\text{tot}} I = 0.3 \text{ s}^{-1}$$

Nel bersaglio si formano quindi 0.3 nuclei di ^{198}Au per secondo e se questo nucleo fosse stabile la sua quantità crescerebbe linearmente con il tempo. Dobbiamo però tenere conto del processo di decadimento e risolvere l'equazione differenziale:

$$\frac{dn(t)}{dt} = r - \lambda n(t)$$

dove $n(t)$ indica il numero di nuclei di ^{198}Au presenti nel bersaglio al tempo t . Risolvendo l'omogenea associata, aggiungendo la soluzione particolare $n(t) = r/\lambda$ e utilizzando la condizione iniziale: $n(t=0) = 0$, si ricava:

$$n(t) = \frac{r}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t})$$

La curva è un esponenziale crescente che tende al valore asintotico r/λ per $t \rightarrow \infty$. In pratica, dopo un tempo $t \approx 3\tau = 3/\lambda$ non si ha più alcun incremento significativo della attività della sorgente essendo ormai prossimi alla regione asintotica.

Sostituendo $t = 80 \cdot 3600 = 2.9 \cdot 10^5 \text{ s}$ si ottiene:

$$n = \frac{0.3}{2.97 \cdot 10^{-6}} \left(1 - e^{-2.97 \cdot 10^{-6} \cdot 2.9 \cdot 10^5} \right) \approx 10^5 (1 - 0.42) \approx 6 \cdot 10^4$$

dopo 80 ore di irraggiamento sono presenti nel bersaglio $6 \cdot 10^4$ nuclei di ^{198}Au . Da quando cessa l'irraggiamento il bersaglio decade con la solita legge esponenziale:

$$n(t) = n_0 e^{-\lambda t}$$

dove $n_0 = 6 \cdot 10^4$ e t è il tempo misurato a partire dalla fine dell'irraggiamento.

L'attività del campione è data da:

$$a(t) = -\frac{dn(t)}{dt} = n_0 \lambda e^{-\lambda t}$$

e l'attività iniziale è quindi: $a_0 = n_0 \lambda = 0.18 \text{ s}^{-1}$

Le particelle beta vengono emesse isotropicamente dal bersaglio e se si trascurano effetti di autoassorbimento delle radiazioni nel bersaglio stesso, in prima approssimazione il rateo di conteggio sul rivelatore di particelle beta è dato da:

$$R = a \frac{\Delta\Omega}{4\pi} = 1.4 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1}.$$

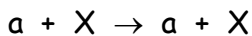
Esercizio 6

Protoni di energia cinetica 40 MeV urtano nuclei di ^{12}C . Calcolare l'energia cinetica del protone dopo l'urto quando questo viene deviato di un angolo pari a 30° rispetto alla direzione di moto iniziale se:

- 1) il ^{12}C è lasciato nel suo stato fondamentale (urto elastico);
- 2) il ^{12}C dopo l'urto è lasciato nello stato eccitato a 4.43 MeV (urto inelastico).

Vediamo il primo caso.

Si tratta di uno scattering elastico



La formula esatta è data dalla seguente espressione:

$$\sqrt{T'_a} = \frac{m_a \sqrt{T_a} \cos \vartheta \pm \sqrt{T_a (m_x^2 - m_a^2 \sin^2 \vartheta)}}{m_x + m_a}$$

poiché però "a" è un nucleone, si può usare la formula approssimata

$$\sqrt{T'_N} = \frac{\sqrt{T_N} \cos \vartheta \pm \sqrt{T_N (A^2 - \sin^2 \vartheta)}}{A + 1}$$

dove abbiamo sostituito A al rapporto m_x/m_a (in realtà $A = 12$, mentre $m_x/m_a = 11.91$: stiamo così commettendo un errore del 7.5 per mille, del tutto trascurabile per gli scopi che ci prefiggiamo). Quadrando si ottiene:

$$T'_N = \frac{T_N}{(A + 1)^2} \left(\cos \vartheta + \sqrt{A^2 - \sin^2 \vartheta} \right)^2$$

sostituendo i valori numerici troviamo.

$$T'_N = 39.11 \text{ MeV}$$

Poiché, trattandosi di uno scattering elastico, $Q = 0$, abbiamo che il nucleo ^{12}C rincula con una energia cinetica $T_A = 40 - 39.11 = 0.88 \text{ MeV}$. Se volessimo sapere in quale direzione esso rincula, dovremmo usare la conservazione della quantità di moto. Supponiamo che il protone si muova inizialmente lungo l'asse z, e che la reazione avvenga nel piano xz. Se indichiamo con p la quantità di moto del protone e con P quella del nucleo ^{12}C , dovrà essere:

$\mathbf{p} = \mathbf{p}' + \mathbf{P}$, che proiettata sugli assi x e z fornisce:

$$p = p'_z + P_z$$

$$0 = p'_x + P_x \quad \rightarrow \quad |P_x| = |p'_x|$$

$$\text{dove: } p = \sqrt{2m_p T} = 273.97 \text{ MeV}$$

$$p'_z = p \cdot \cos \vartheta = 237.27 \text{ MeV} \quad p'_x = p \cdot \sin \vartheta = 136.99 \text{ MeV}$$

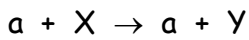
pertanto

$$P_x = -p'_x = -136.99 \text{ MeV} \quad P_z = p - p'_z = 36.71 \text{ MeV}$$

L'angolo φ di rinculo del nucleo risulta: $\varphi = \text{atan}(P_x/P_z) = -74.9^\circ$

Il segno meno indica che il nucleo di ^{12}C rincula nel semipiano xz opposto a quello del protone.

Vediamo il secondo caso. Adesso lo scattering è inelastico, e quindi la reazione è del tipo:



dove X rappresenta il ^{12}C prima dell'urto ed Y il ^{12}C dopo l'urto. Le masse sono infatti diverse: la massa del ^{12}C dopo l'urto è la sua massa a riposo aumentata dell'energia di eccitazione di 4.43 MeV. Dobbiamo usare la formula completa:

$$\sqrt{T'_b} = \frac{\sqrt{m_a m_b T_a} \cos \vartheta \pm \sqrt{m_a m_b T_a \cos^2 \vartheta + (m_y + m_b) [m_y Q + (m_y - m_a) T_a]}}{m_y + m_b}$$

che per $m_b = m_a$ diventa:

$$\sqrt{T'_a} = \frac{m_a \sqrt{T_a} \cos \vartheta \pm \sqrt{m_a^2 T_a \cos^2 \vartheta + (m_y + m_a) [m_y Q + (m_y - m_a) T_a]}}{m_y + m_a}$$

qui ovviamente Q coincide con l'energia del livello eccitato cambiata di segno:

$$Q = - 4.43 \text{ MeV.}$$

$$m_a = 938.272 \text{ MeV}$$

$$T_a = 40 \text{ MeV}$$

$$m_y = m(^{12}\text{C}) - Q = 11174.861 + 4.43 = 11179.291 \text{ MeV}$$

$$\cos \vartheta = 0.866$$

Sostituendo i valori numerici si trova:

$$T'_a = T'_N = 34.75 \text{ MeV}$$

In pratica questo valore è il valore calcolato per l'urto elastico diminuito dell'energia dello stato eccitato: questo è dovuto al fatto che i 4.43 MeV di energia di eccitazione sono trascurabili rispetto alla massa del ^{12}C .

Capitolo 12

Interazione radiazione-materia: le particelle cariche

12.1 Interazione delle particelle cariche con la materia

Consideriamo una particella di carica ze che attraversa un materiale di numero atomico Z ; per fissare le idee, un protone che attraversa una lastra di alluminio. Lungo la sua traiettoria il protone incontra atomi di alluminio, quindi nuclei circondati dalla loro nube elettronica. Il protone interagisce elettricamente sia con gli elettroni che con il nucleo. Naturalmente il bersaglio nucleare offre una sezione estremamente piccola rispetto al bersaglio atomico: le sezioni S vanno come il quadrato dei raggi e quindi: $S_{\text{atom}} = 10^{10} S_{\text{nucl}}$. Quindi si deduce che l'interazione con gli elettroni è molto più probabile. Il sistema formato dalla particella incidente e dall'atomo bersaglio è un sistema isolato e quindi nell'urto si conserva la quantità di moto totale. Poiché gli elettroni molto più leggeri dei nuclei, accade che le particelle incidenti trasferiscono energia negli urti elettronici, senza apprezzabilmente deviare dalla loro traiettoria. Viceversa, negli urti con i nuclei le particelle, oltre a perdere energia, subiscono deviazioni rispetto alla direzione incidente. Talvolta gli elettroni atomici ricevono una quantità di energia tale che da essere strappati dall'atomo, che resta così ionizzato; talvolta l'atomo viene semplicemente eccitato ma non ionizzato. In ogni caso per questi processi è fornita dell'energia dalla particella incidente, che pertanto viene rallentata. Se la particella incidente è un elettrone, il tipo di interazione coulombiana con gli elettroni e i nuclei del mezzo è la stessa; ma in questo caso, avendo l'elettrone una massa confrontabile con quella dei bersagli, può subire deflessioni rilevanti rispetto alla direzione di volo. Durante l'urto inoltre decelera maggiormente: infatti, a parità di forza di interazione (e^2/r), essendo molto più leggero dei protoni, subisce una accelerazione (inversamente proporzionale alla massa) estremamente più intensa. Dall'elettromagnetismo classico si sa che una carica elettrica accelerata irraggia energia elettromagnetica al ritmo di:

$$\frac{dE}{dt} = W_{\text{em}} = \frac{2e^2}{3c^3} \langle a^2 \rangle$$

proporzionale al quadrato della sua accelerazione. Quindi gli elettroni, nelle interazioni con la materia, perdono energia anche per irraggiamento: il termine usato è di origine tedesca: "bremsstrahlung", che vuol dire appunto radiazione di frenamento. Nel seguito di questo capitolo esamineremo entrambi questi processi:

Ionizzazione ed eccitazione degli atomi;

Irraggiamento (bremsstrahlung)

Come abbiamo visto, in entrambi i casi si tratta di interazioni atomiche: i processi nucleari (che pure avvengono) sono a sezione d'urto molto minore e si possono pertanto trascurare.

12.2 Perdita di energia per ionizzazione

Consideriamo una particella non relativistica di massa m , carica z ed energia cinetica E che si muove in un materiale di numero atomico Z e di densità N atomi/cm³: essa interagisce con gli elettroni del mezzo tramite forze coulombiane, e la forza che si esercita tra la particella e un elettrone vale ze^2/r , dove r è la distanza che li separa. La traiettoria della particella pesante non è modificata in misura apprezzabile dall'elettrone, che è molto più leggero, e si può pensare che l'urto abbia una durata talmente breve che l'elettrone vi acquisti un impulso senza cambiare posizione. Consideriamo per ora un singolo elettrone: se il parametro d'urto dell'interazione è b e se la velocità della particella è abbastanza grande da poter considerare l'elettrone in quiete, la quantità di moto acquistata dall'elettrone nell'urto è data da:

$$p = \Delta p = \int_{-\infty}^{+\infty} F dt = \int_{-\infty}^{+\infty} eE_{\perp} dt \quad (1)$$

dove E_{\perp} rappresenta la componente del campo elettrico perpendicolare alla direzione di moto della particella (la componente parallela, per motivi di simmetria, dà un contributo nullo). Dal teorema di Gauss per una superficie cilindrica di raggio b , avente l'asse lungo la direzione di volo della particella carica (vedi figura 11.1), il campo elettrico applicato all'elettrone dovuto alla particella di carica z risulta:

$$\int_{\text{cilindro}} \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = 4\pi ze \quad \int_{-\infty}^{+\infty} E_{\perp}(x) \cdot 2\pi \cdot b \cdot dx = 4\pi ze \quad \int_{-\infty}^{+\infty} E_{\perp}(x) dx = \frac{2ze}{b} \quad (2)$$

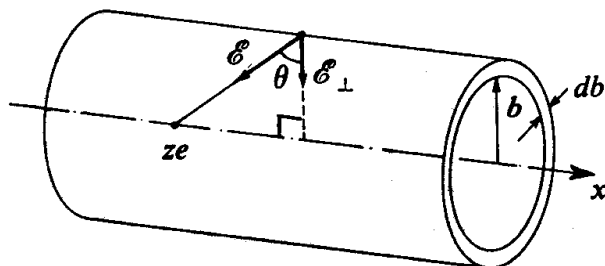


Fig. 12.1 Interazione tra particella carica ed elettrone

La (1), tenendo conto della (2) si può riscrivere: $\int_{-\infty}^{+\infty} eE_{\perp} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} eE_{\perp} \cdot \frac{dx}{v} = \frac{2ze^2}{bv}$

$$\text{pertanto: } p = \int_{-\infty}^{+\infty} eE_{\perp} dt = \frac{2ze^2}{bv} \quad \text{e quindi } E = \frac{p^2}{2m_e} = \frac{2z^2e^4}{m_e b^2 v^2}$$

E rappresenta l'energia acquistata dall'elettrone quando il parametro d'urto è b . Se la particella si muove in un materiale di numero atomico Z e di densità N atomi/cm³, per un tratto infinitesimo di percorso dx , il numero di elettroni incontrati dalla particella con parametro d'urto compreso tra b e $b+db$ è:

$$dn = NZ \cdot 2\pi \cdot b db \cdot dx$$

L'energia persa dalla particella (acquistata dagli elettroni) nel tratto dx risulta allora:

$$dE = \frac{2z^2 e^4}{m_e b^2 v^2} NZ \cdot 2\pi \cdot b db \cdot dx = \frac{4\pi z^2 e^4}{m_e v^2} NZ \frac{db}{b} dx$$

allora:
$$\frac{dE}{dx} = \frac{4\pi z^2 e^4}{m_e v^2} NZ \frac{db}{b}$$

L'energia complessivamente persa nel tratto dx si ottiene integrando su tutti i possibili parametri d'urto.

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{ion} = \int_{b_{min}}^{b_{max}} \frac{4\pi z^2 e^4}{m_e v^2} NZ \frac{db}{b} = \frac{4\pi z^2 e^4}{m_e v^2} NZ \ln\left(\frac{b_{max}}{b_{min}}\right)$$

Si tratta ora di definire b_{max} e b_{min} .

Valutiamo b_{max} . Essendo v la velocità della particella possiamo immaginare che il tempo di interazione sia dell'ordine di $\tau \approx b/v$. Questa espressione in generale, tenuto conto della contrazione relativistica, si scrive: $\tau \approx b/(v \cdot \gamma)$, dove al solito: $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$.

Ora, l'elettrone può essere considerato fermo se la sua velocità orbitale è minore della velocità dello ione, ossia se il periodo T del suo moto è maggiore di τ . Se questa relazione non è rispettata, ossia se la velocità orbitale dell'elettrone è confrontabile con la velocità dello ione, la perturbazione è adiabatica e non vi è trasferimento di energia (principio dell'invarianza adiabatica). Dalla relazione $T \geq \tau$ si ricava:

$$b \approx \tau \cdot v \cdot \gamma \leq T \cdot v \cdot \gamma \rightarrow b_{max} = T \cdot v \cdot \gamma = \frac{v \cdot \gamma}{\nu}$$

In effetti, invece di parlare di una frequenza ν ben determinata, si deve parlare di frequenza media $\bar{\nu}$ caratteristica degli elettroni orbitanti attorno all'atomo che caratterizza la materia: $b_{max} = \frac{v \cdot \gamma}{\bar{\nu}} = \frac{h \cdot v \cdot \gamma}{I}$

dove h è la costante di Plank e $I = h\bar{\nu}$ è il potenziale medio di eccitazione ed ionizzazione degli elettroni. I dipende ovviamente dal numero atomico Z del mezzo: una relazione empirica approssimata è la seguente:

$$I = 12 \cdot Z + 7 \text{ [eV]} \quad \text{per } Z < 13$$

$$I = 9.76 \cdot Z + 58.8 \cdot Z^{-0.19} \text{ [eV]} \quad \text{per } Z > 13$$

Valutiamo adesso b_{min} . Quantisticamente l'elettrone non può essere localizzato con una indeterminazione minore della sua lunghezza d'onda relativa alla particella in avvicinamento. Pertanto:

$$b \geq \lambda_{rel} \text{ e perciò: } b_{min} = \lambda_{rel} = \frac{h}{p_{rel}} = \frac{h}{m_e v_{rel} \gamma} = \frac{h}{m_e v \cdot \gamma}, \text{ dove la velocità relativa particella-}$$

elettrone (supposto fermo) v_{rel} coincide con la velocità v della particella.

Infine abbiamo:
$$\frac{b_{max}}{b_{min}} = \frac{m_e v^2 \gamma^2}{I}$$

Pertanto:
$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{ion} = \frac{4\pi e^4 z^2}{m_e v^2} NZ \ln\left(\frac{m_e v^2 \gamma^2}{I}\right) \quad (3)$$

Questa è la formula classica di Bohr che, fissato il materiale nel quale la particella si propaga (cioè N,Z e I), si può scrivere in maniera del tutto generale:

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{\text{ion}} \propto z^2 \cdot f(v)$$

Se ci limitiamo al caso non relativistico ($\gamma \approx 1$) e sostituiamo nella formula la velocità dello ione con la sua energia cinetica, l'energia perduta per ionizzazione per unità di percorso da una particella di massa m , carica z ed energia cinetica E in un materiale di numero atomico Z e di densità N atomi/cm³ è quindi data dalla seguente espressione:

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{\text{ion}} = \frac{2\pi e^4 m z^2}{m_e E} N Z / h \left(\frac{2m_e E}{mI}\right) \quad (4)$$

dove m_e è la massa dell'elettrone e I è il potenziale medio di eccitazione e ionizzazione del materiale. Introducendo la densità massica ρ e ponendo $\xi = \rho x$:

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{dE}{dx}\right)_{\text{ion}} = \left(\frac{dE}{d\xi}\right)_{\text{ion}} = \frac{2\pi e^4 N_0 m z^2 Z}{m_e E A} / h \left(\frac{2m_e E}{mI}\right) \quad (5)$$

qui N_0 è il numero di Avogadro ed A il numero di massa del materiale.

La formula corretta per particelle relativistiche è quella calcolata da Bethe e Block:

$$\left(\frac{dE}{d\xi}\right)_{\text{ion}} = \frac{2\pi e^4 N_0 z^2 Z}{m_e v^2 A} \left[/ h \left(\frac{m_e v^2 \gamma^2 \cdot E_{\text{max}}}{I^2}\right) - 2\beta^2 \right] \quad (6)$$

dove al solito v è la velocità della particella ed E_{max} rappresenta la massima energia trasferibile in una singola collisione, che dalla cinematica risulta essere:

$$E_{\text{max}} = \frac{2m_e c^2 \beta^2}{1 + 2\frac{m_e}{M} \gamma^2 + \frac{m_e^2}{M^2}}$$

m_e ed M rappresentano la massa dell'elettrone e della particella incidente.

Nel caso di ioni, ma anche semplicemente del protone, poiché risulta $m_e \ll M$, si ha:

$$E_{\text{max}} \approx 2m_e c^2 \beta^2$$

$dE/d\xi$ viene chiamato potere frenante massico. Poiché il rapporto Z/A è quasi lo stesso per tutti gli elementi (vale $\approx \frac{1}{2}$), l'unica dipendenza dal materiale, I , appare sotto logaritmico. Per questo motivo il potere frenante massico è quasi lo stesso per tutti i materiali (escluso l'idrogeno, per il quale $Z/A=1$).

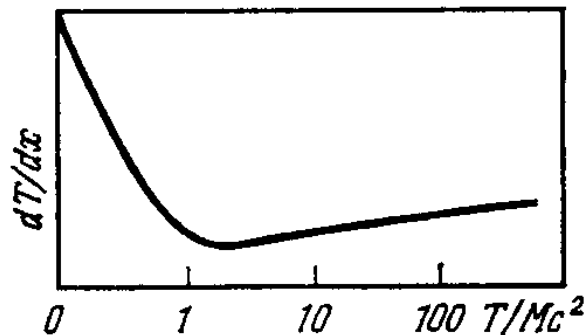


Fig. 12.2 Perdita di energia per ionizzazione dE/dx

L'andamento in funzione dell'energia della particella incidente è illustrato in figura 12.2. Qui in ascissa è riportato il valore dell'energia cinetica E diviso per la massa a riposo Mc^2 della particella. La prima parte della curva, che si estende fino a $E \approx Mc^2$, riflette l'andamento $1/E$ (ossia: $1/v^2$). Ad energie elevate ($\beta \approx 1$) il termine logaritmico comincia a farsi sentire e il potere frenante risale. Proprio a causa di questo aumento del potere frenante al diminuire dell'energia, una peculiarità delle particelle cariche pesanti è quella di presentare una curva di ionizzazione specifica piccata verso la fine del loro percorso, dove la loro energia cinetica tende a zero e il valore di dE/dx aumenta enormemente (vedi fig. 12.3)

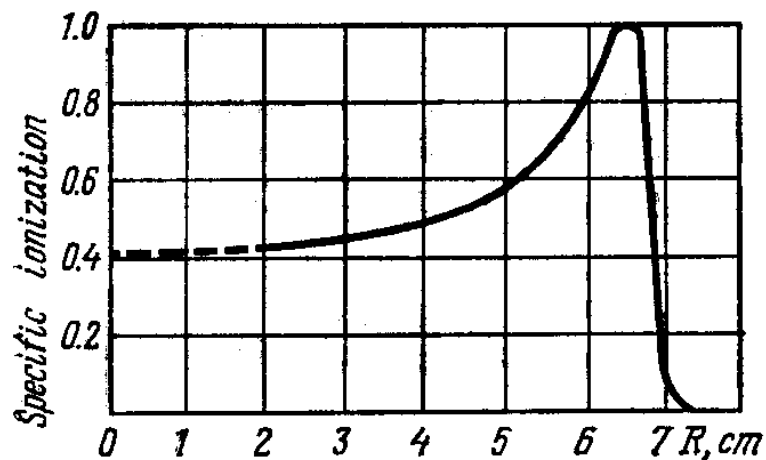


Fig. 12.3 curva di ionizzazione specifica di particelle cariche pesanti

Il picco che si presenta alla fine della traiettoria viene chiamato "picco di Bragg". In pratica la densità di energia perduta, e quindi ceduta al mezzo, aumenta verso la fine del percorso della particella. Questa caratteristica viene sfruttata nella terapia oncologica fatta con fasci adronici (cioè di particelle pesanti).

La divergenza ad energia zero è solo matematica, in quanto questa formula cessa di essere vera a bassissima energia, dove la curva tende a zero con andamento proporzionale velocità (e quindi alla \sqrt{E}).

Ricordando che:

$$e^2 = 1.44 \text{ MeV} \cdot \text{fm} = 1.44 \cdot 10^{-13} \text{ MeV} \cdot \text{cm}$$

$$N_0 = 6.02 \cdot 10^{23}$$

$$m_e = 0.511 \text{ MeV}/c^2$$

il valore numerico della costante a fattore vale: $\frac{2\pi e^4 N_0}{m_e} = 0.154 \text{ MeV} \cdot \text{cm}^2$.

Per protoni non relativistici, essendo $m_p = 938.21 \text{ MeV}/c^2$ e $z=1$, la formula (4) diventa:

$$\left(\frac{dE}{d\xi} \right)_{\text{ion}} = 145 \frac{Z}{E \cdot A} \left[\ln \left(\frac{E}{Z} \right) + C \right] \quad [\text{MeV} \cdot \text{cm}^2/\text{g}]$$

dove E rappresenta l'energia cinetica del protone. Abbiamo scritto, in prima approssimazione: $I=ZI_0$ ($I_0=13.5$ eV). La costante C è data nella tabella che segue per alcuni materiali.

Elemento	C
He	4.68
Li	4.69
Be	5.04
C	5.14
N	5.08
O	5.12
Al	5.08
Cu	5.21
Ag	5.28
Sn	5.29
Au	5.22
Pb	5.28

La debole variazione di C deriva dal fatto che la relazione $I=ZI_0$ è in effetti approssimata.

Abbiamo visto che dalla formula generale (3), fissato il materiale del mezzo assorbitore, se esplicitiamo solo la dipendenza dal tipo di particella troviamo:

$$\left(\frac{dE}{d\xi}\right)_{\text{ion}} \propto z^2 \cdot f(v)$$

Per cui, per due particelle diverse aventi la stessa velocità:

$$\left(\frac{dE}{d\xi}\right)_1 \propto z_1^2 \cdot f(v) \quad \text{e} \quad \left(\frac{dE}{d\xi}\right)_2 \propto z_2^2 \cdot f(v)$$

$$\text{Sostituendo: } \left(\frac{dE}{d\xi}\right)_2 = \frac{z_2^2}{z_1^2} \left(\frac{dE}{d\xi}\right)_1$$

Ma poiché $v_1 = \sqrt{\frac{2E_1}{m_1}}$ e $v_2 = \sqrt{\frac{2E_2}{m_2}}$, si vede che la relazione: $v = v_1 = v_2$, in termini di energia cinetica equivale a:

$$E_1 = E_2 \frac{m_1}{m_2}$$

Pertanto possiamo scrivere la seguente legge di scala per la perdita di energia, nello stesso mezzo, di due particelle 1 e 2:

$$\left[\frac{dE}{d\xi}(E_2)\right]_2 = \frac{z_2^2}{z_1^2} \cdot \left[\frac{dE}{d\xi}\left(E_1 = E_2 \frac{m_1}{m_2}\right)\right]_1$$

Naturalmente queste formule sono approssimate e valgono solo nel confronto tra perdite di energia di ioni pesanti, avendo gli elettroni una formula diversa.

La figura 12.4 mostra le curve del potere frenate massico e del range (vedi nel seguito) di protoni in rame in funzione della loro energia cinetica e/o del loro impulso.

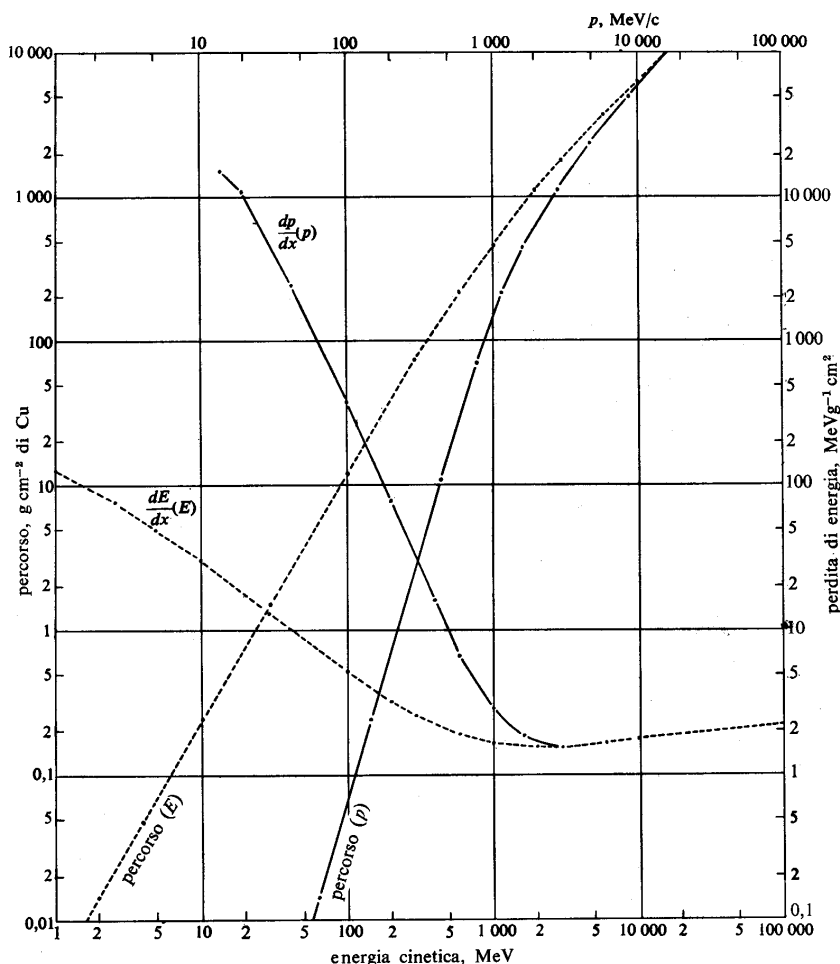


Fig. 12.4 potere frenante e percorso di protoni in Rame in funzione di energia e impulso

Se la particella incidente è un elettrone o un positrone bisogna considerare ulteriori condizioni. Infatti:

- non si può trascurare la deflessione dell'elettrone/positrone incidente;
- la trattazione è necessariamente relativistica;
- l'urto è tra particelle identiche e la trattazione deve essere quantistica;

La formula che si ottiene è la seguente:

$$\left(\frac{dE}{d\xi}\right)_{\text{ion}} = \frac{2\pi e^4 N_0}{m_e c^2} \frac{1}{\beta^2} \frac{Z}{A} \left[\ln \left(\frac{\tau^2(\tau+2)}{2(I/m_e c^2)^2} \right) + F(\tau) \right] \quad (7)$$

dove $\tau = E/m_e c^2$ rappresenta l'energia cinetica della particella in unità $m_e c^2$.

La funzione $F(\tau)$ è diversa a seconda che si tratti di un elettrone o di un positrone:

$$F(\tau) = 1 - \beta^2 + \frac{\tau^2 - (2\tau + 1) \cdot \ln 2}{(\tau + 1)^2} \quad \text{nel caso di elettroni}$$

$$F(\tau) = 2 \ln 2 - \frac{\beta^2}{12} \left(23 + \frac{14}{\tau + 2} + \frac{14}{(\tau + 2)^2} + \frac{4}{(\tau + 2)^3} \right) \quad \text{nel caso di positroni}$$

12.3 Perdita di energia per irraggiamento (Bremsstrahlung)

L'energia perduta per irraggiamento ha una dipendenza diversa dall'energia della particella e dal materiale. Anche classicamente una carica elettrica accelerata irraggia potenza sotto forma di energia elettromagnetica e la potenza irraggiata risulta proporzionale al quadrato della accelerazione:

$$w = \frac{2e^2}{3c^3} < a^2 >$$

Essendo: $a = F/m$ (con F forza di Coulomb non dipendente dalla massa della particella) si vede che la potenza irraggiata è inversamente proporzionale al quadrato della massa: un elettrone perde quindi energia per irraggiamento un fattore 10^6 più di un protone. Si capisce pertanto perché questo fenomeno è trascurabile nel caso di particelle pesanti (almeno fino ad energie cinetiche dell'ordine del migliaio di MeV).

La formula che descrive questa perdita di energia è la seguente:

$$\left(\frac{dE}{dx} \right)_{\text{rad}} = N \frac{Z(Z+1) e^4}{137 m_e^2} E \cdot \left(4 \ln \left(\frac{2 \cdot E}{m_e} \right) - \frac{4}{3} \right)$$

dove N è il numero di atomi per unità di volume e $E = T + m_e$ rappresenta l'energia totale dell'elettrone. Introducendo la densità massica ρ e ponendo $\xi = \rho x$ si ottiene:

$$\left(\frac{dE}{d\xi} \right)_{\text{rad}} = N_0 \frac{e^4 \cdot Z(Z+1)}{137 \cdot m_e^2 \cdot A} \cdot E \cdot \left(4 \ln \left(\frac{2 \cdot E}{m_e} \right) - \frac{4}{3} \right) \quad (8)$$

Il termine $Z(Z+1)$ ci dice che si tratta in effetti di una somma di contributi: uno proporzionale a Z^2 che descrive l'interazione dell'elettrone incidente con i nuclei, e l'altro proporzionale a Z che descrive l'interazione con gli elettroni del mezzo nel quale si propaga.

Confrontando la (8) con la perdita di energia per ionizzazione (7) per gli elettroni nel caso estremo relativistico ($\beta \rightarrow 1$ e $\gamma \rightarrow \infty$) ed approssimando $Z(Z+1)$ con Z^2 si ottiene la relazione:

$$\frac{\left(\frac{dE}{d\xi} \right)_{\text{rad}}}{\left(\frac{dE}{d\xi} \right)_{\text{ion}}} = \frac{\left(\frac{dE}{dx} \right)_{\text{rad}}}{\left(\frac{dE}{dx} \right)_{\text{ion}}} \approx \frac{E \cdot Z}{800}$$

Ad esempio, per $Z=82$ (Pb) i due effetti diventano confrontabili per $E \approx 10$ MeV. Nel caso dell'aria ($Z \approx 7.5$) i due effetti diventano confrontabili solo ad energie dell'ordine di 100 MeV. L'energia critica E_c in un certo materiale è definita tramite la relazione

precedente e corrisponde al valore per il quale i due effetti (ionizzazione ed irraggiamento) si equivalgono. Risulta quindi, approssimativamente: $E_c = \frac{800}{Z} \text{ (MeV)}$

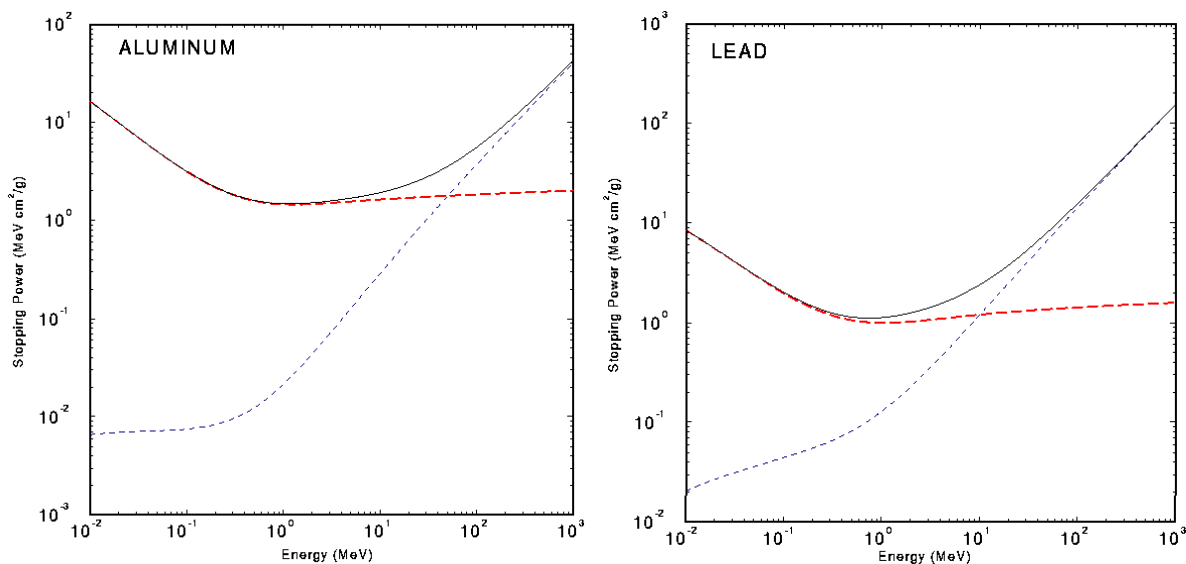


Fig. 12.5 perdita di energia totale di elettroni in Al e Pb. Sono indicati separatamente i contributi della ionizzazione e dell'irraggiamento

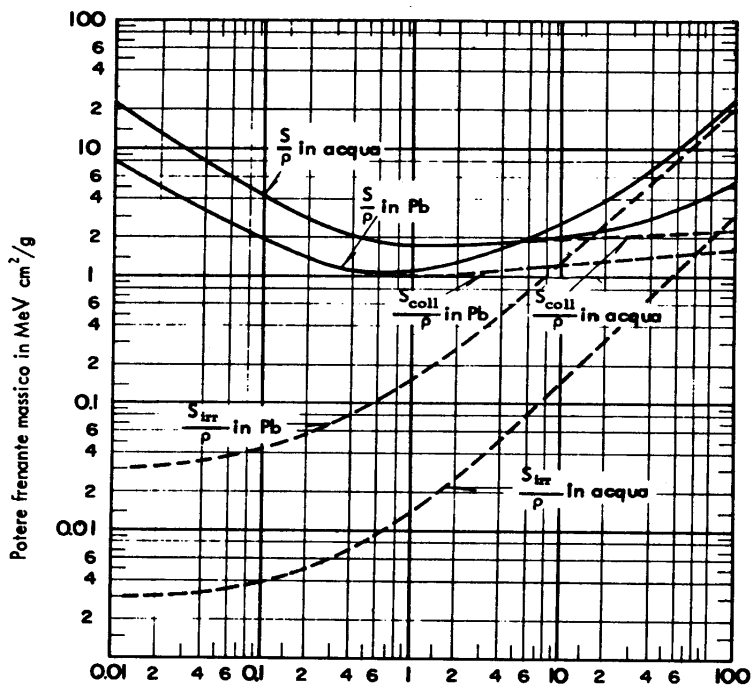


Fig. 12.6 perdita di energia totale di elettroni in Pb e H₂O . Sono indicati separatamente i contributi della ionizzazione e dell'irraggiamento

La figura 12.6 rappresenta la perdita di energia di elettroni in Alluminio e Piombo. Sono indicati separatamente i contributi del termine di ionizzazione e di quello dell'irraggiamento. L'energia critica (punto di intersecazione delle curve parziali) nel caso del Piombo vale appunto $E_c \approx 10$ MeV, mentre per l'Alluminio vale $E_c \approx 40$ MeV. La figura 12.6 rappresenta invece la perdita di energia di elettroni in Acqua e Piombo. Si vede chiaramente che, nel caso dell'acqua, $E_c \approx 100$ MeV.

12.4 Range

Lo spessore di materiale nel quale una particella perde tutta la sua energia cinetica è detto "range". Sperimentalmente il range può essere determinato indirizzando un fascio di particelle di energia nota su uno spessore di materiale variabile, via via crescente, e misurando il rapporto tra particelle trasmesse e particelle incidenti in funzione dello spessore, come mostrato in figura 12.7. Quando lo spessore di materiale si avvicina al valore del range il rapporto crolla bruscamente. Il fatto che la funzione non sia una vera funzione a gradino ci fa capire che la perdita di energia non è affatto un processo continuo, ma statistico. Particelle diverse del fascio subiscono microscopicamente effetti leggermente diversi dando luogo ad una distribuzione statistica del loro range individuale, detta appunto "straggling". In prima approssimazione questa è una distribuzione gaussiana come mostrato dalla curva tratteggiata in figura 12.7

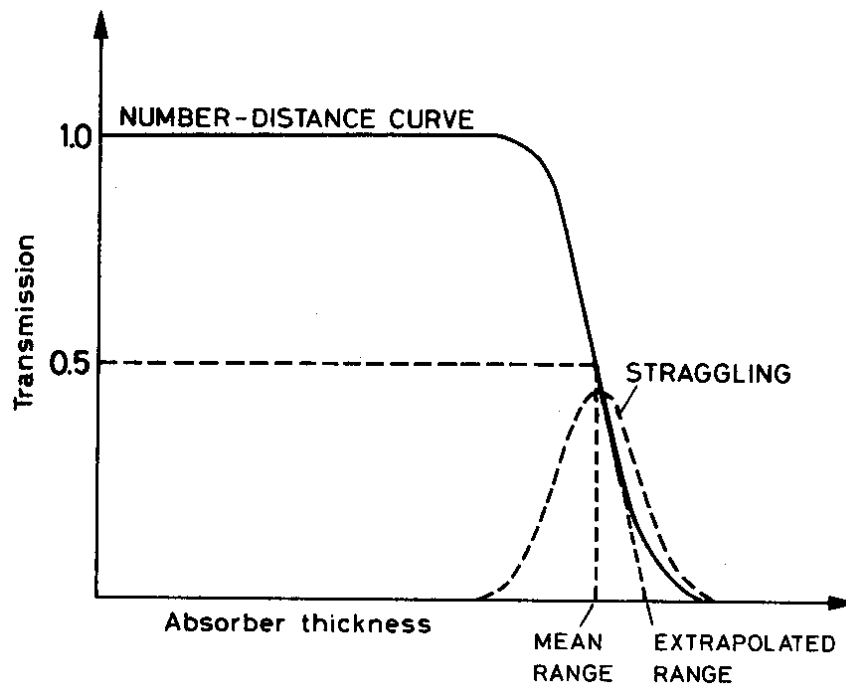


Fig 12.7 la trasmissione di un fascio in funzione dello spessore attraversato

Dal punto di vista teorico, il range medio per una particella carica di energia cinetica iniziale E_0 , risulta:

$$R_\ell = \int_{E_0}^0 \frac{dx}{dE} dE = \int_{E_0}^0 \frac{1}{(dE/dx)} dE \quad [\text{cm}]$$

Se si usa invece il potere frenante massico $dE/d\xi$, si ottiene il range massico:

$$R_m = \int_{E_0}^0 \frac{d\xi}{dE} dE = \int_{E_0}^0 \frac{1}{(dE/d\xi)} dE \quad [\text{g/cm}^2]$$

Poiché per particelle cariche non relativistiche, in prima approssimazione si ha che $dE/d\xi \approx 1/E$, risulta: $R_m \propto E_0^2$

Pertanto: $\ln(R_m) = A + B \ln(E_0)$. In una scala bi-logaritmica le curve $R = R(E)$ del range per particelle differenti sono quasi delle rette con pendenze assai simili (fig. 12.6)

In prima approssimazione, poiché: $dE/d\xi \propto z^2 m$, la dipendenza del range dalla caratteristiche della particella incidente, è la seguente: $R_m \propto 1/(z^2 m)$

La dipendenza del range massico dal materiale è invece assai debole (soprattutto per gli elettroni), in quanto risulta che $dE/d\xi \propto Z/A \approx \frac{1}{2}$ per tutti gli elementi.

Anche per le formule del range valgono delle leggi di scala che permettono di legare range di particelle diverse nello stesso materiale. Le leggi di scala dedotte per il range lineare valgono ovviamente anche per il range massico. Dalla definizione di range

$$R_\ell = \int_{E_0}^0 \frac{dx}{dE} dE = \int_{E_0}^0 \frac{1}{(dE/dx)} dE = \int_{v_0}^0 \frac{mv}{z^2 \cdot f(v)} dv \quad (\text{essendo } dE = mv dv)$$

Per due particelle diverse 1 e 2 nello stesso materiale, vale quindi la relazione:

$$R_1 = \frac{m_1}{z_1^2} \int_{v_0}^0 \frac{v}{f(v)} dv \quad \text{e} \quad R_2 = \frac{m_2}{z_2^2} \int_{v_0}^0 \frac{v}{f(v)} dv$$

Analogamente a quanto visto nel caso del potere frenante, adesso possiamo scrivere:

$$R_2(E_2) = \frac{m_2 z_1^2}{m_1 z_2^2} \cdot R_1 \left(E_1 = E_2 \frac{m_1}{m_2} \right)$$

Quindi per esempio, per deutone, trizio, ed ^3He :

$$R_d(E) = 2 \cdot R_p \left(\frac{1}{2} E \right)$$

$$R_t(E) = 3 \cdot R_p \left(\frac{1}{3} E \right)$$

$$R_{^3\text{He}}(E) = \frac{3}{4} \cdot R_{^4\text{He}} \left(\frac{4}{3} E \right)$$

Se confrontiamo invece i range di ^4He con i protoni:

$$R_{^4\text{He}}(E) = R_p \left(\frac{1}{4} E \right)$$

Per energie delle particelle α (^4He) fino a qualche decina di MeV è comunque più appropriata la seguente semplice relazione: $R_\alpha(E) = R_p \left(\frac{1}{4} E \right) + 1.0 \text{ mg/cm}^2$, come si vede ad esempio dal grafico del range in acqua (figura 12.8), dove:

$$R_\alpha(40 \text{ MeV}) \approx R_p(10 \text{ MeV}) \approx 120 \text{ mg/cm}^2.$$

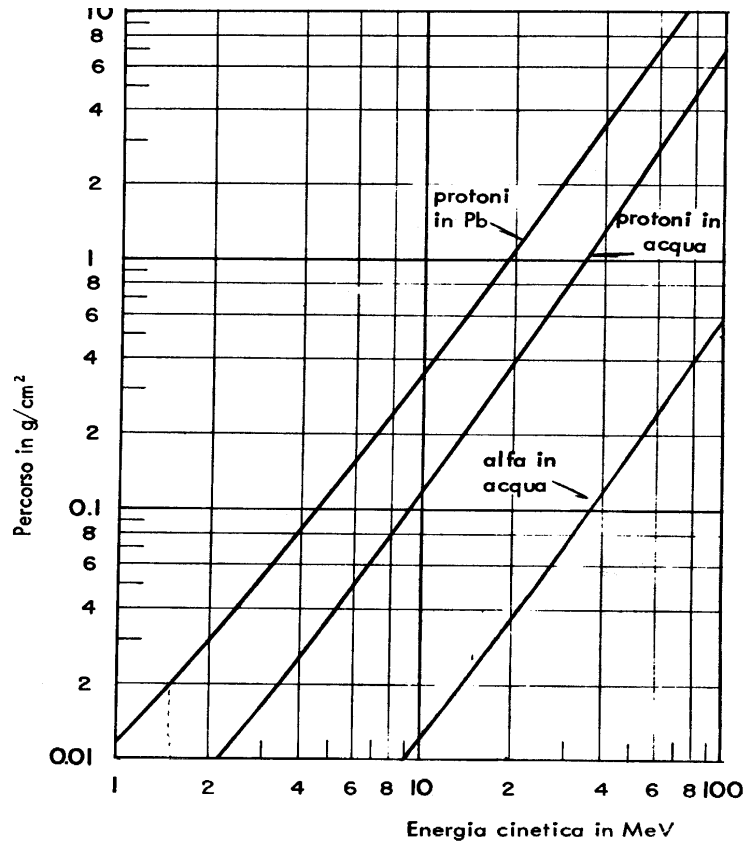


Fig. 12.8 percorso (range) di protoni ed α in piombo ed acqua

Se lo spessore di un materiale è inferiore al range della particella, questa riemerge con una energia residua. Spesso è utile calcolare l'energia residua o, equivalentemente, l'energia perduta in uno spessore finito s .

Dall'espressione del range:

$$R_m(E_0) = \int_{E_0}^0 \frac{1}{(dE/d\xi)} dE$$

si ha:

$$R_m(E_0) = \int_{E_0}^{E_1} \frac{1}{(dE/d\xi)} dE + \int_{E_1}^0 \frac{1}{(dE/d\xi)} dE$$

$$\text{dove: } \int_{E_1}^0 \frac{1}{(dE/d\xi)} dE = R_m(E_1)$$

Detto $s(E_0, E_1)$ lo spessore di materiale che riduce l'energia della particella da E_0 a E_1 , si può scrivere:

$$s(E_0, E_1) = \int_{E_0}^{E_1} \frac{1}{(dE/d\xi)} dE = R_m(E_0) - R_m(E_1)$$

Formule analoghe valgono ovviamente anche per il range lineare.

Queste formule sono molto utili per calcolare l'energia perduta da una particella carica di energia E_0 in uno spessore s noto.

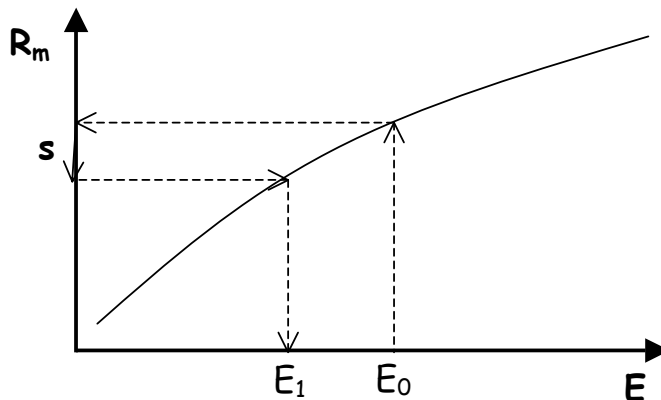


Fig 12.9 Il calcolo di ΔE dal range

Facendo uso delle tabelle ed applicando la tecnica schematizzata nel grafico di fig. 12.9, noti E_0 e lo spessore s , si ricava l'energia finale E_1 e quindi l'energia perduta $\Delta E = E_0 - E_1$.

Naturalmente, per spessori sottili si può considerare costante il valore di dE/dx nel materiale e scrivere semplicemente:

$$\Delta E = \int_s \frac{dE}{d\xi} \cdot d\xi \approx \frac{dE}{d\xi} \int_s d\xi = \frac{dE}{d\xi} \cdot s$$

12.5 Composti e miscele

Abbiamo visto che $dE/dx \propto NZ$, dove N rappresenta il numero di atomi per unità di volume. Analogamente $dE/d\xi \propto nZ$, dove n rappresenta il numero di atomi per unità di massa ($n = N_0/A$). Quindi, nel caso di un composto scriveremo:

$$\frac{dE}{d\xi} = \sum_i p_i \left(\frac{dE}{d\xi} \right)_i$$

dove p_i rappresenta la frazione in massa dello i -esimo elemento, e $(dE/d\xi)_i$ la perdita di energia massica nello elemento i -esimo.

Nel caso di una molecola i valori p_i si ricavano dai coefficienti stechiometrici: $p_i = n_i \cdot \frac{A_i}{A}$, dove n_i è il numero di atomi della specie " i " per molecola, A_i è il peso atomico dello elemento i -esimo, e A è il peso molecolare ($A = \sum_i A_i$)

Per esempio, nel caso del carbonato di calcio CaCO_3 :

il peso molecolare del CaCO_3 vale: $M = A_{\text{Ca}} + A_{\text{C}} + 3A_{\text{O}} = 40 + 12 + 3 \cdot 16 = 100$

$$\left(\frac{dE}{d\xi}\right)_{CaCO_3} = \frac{40}{100} \left(\frac{dE}{d\xi}\right)_{Ca} + \frac{12}{100} \left(\frac{dE}{d\xi}\right)_C + 3 \frac{16}{100} \left(\frac{dE}{d\xi}\right)_O$$

12.6 Il fenomeno dello Scattering multiplo

Oltre al processo di perdita di energia,, una particella che penetra in un mezzo subisce deflessioni ad opera della interazione colombiana con i nuclei. In questo caso si può trattare l'interazione come un urto elastico, a seguito del quale la particella subisce, a seconda del parametro d'urto, un cambiamento nella direzione di moto ed il nucleo rincula: nel processo si conservano energia cinetica e quantità di moto totale del sistema. Se consideriamo un urto singolo, l'espressione per l'angolo θ di deflessione del proiettile può essere valutata nel seguente modo (vedi figura 12.10):

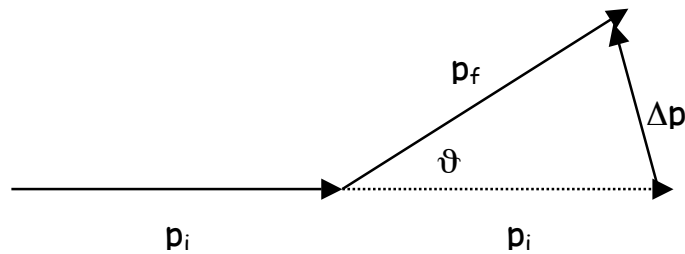


Fig 12.10 Il diagramma dei momenti nello scattering Rutherford

$$\tan(\theta) = \frac{\Delta p}{p} = \frac{F \Delta t}{p} = \frac{zZe^2 \Delta t}{b^2 p}$$

analogamente a quanto visto nel caso del calcolo del potere frenante, il tempo di interazione può essere preso come: $\Delta t = 2b/v$, e risulta allora:

$$\tan(\theta) = \frac{\Delta p}{p} = \frac{F \Delta t}{p} = \frac{zZe^2 2b}{b^2 pv} = \frac{2zZe^2}{mv^2 b}$$

Nella trattazione esatta della diffusione Rutherford si ottiene invece:

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{zZe^2}{mv^2 b}$$

Si vede che per angolo θ piccolo ($\tan(\theta) \approx \theta$), come del resto si verifica in pratica, le formule coincidono. Naturalmente, per sottile che sia un bersaglio, una particella che lo attraversa interagirà in successione con moltissimi nuclei e subirà quindi moltissime deflessioni indipendenti: l'angolo θ con il quale eventualmente emergerà dal bersaglio sarà quindi il risultato finale di tutte le deflessioni individuali. Se immaginiamo che tutti gli urti siano eventi statisticamente indipendenti, l'angolo finale quadratico medio $\langle \theta^2 \rangle$ potrà essere ottenuto come somma quadratica dei vari angoli θ_i : $\langle \theta^2 \rangle = \sum_i P_i \cdot \theta_i^2$

dove P_i è la probabilità che l'angolo di deflessione sia θ_i . Se le deflessioni sono piccole, si può approssimare $\tan(\theta)$ con θ e scrivere: $\theta = \frac{2zZe^2}{mv^2} \frac{1}{b}$

Supponiamo di far incidere n particelle su un bersaglio di spessore x contenente N nuclei per unità di volume. Ciascuna delle n particelle potrà avere, rispetto a ciascuno degli n nuclei un parametro d'urto compreso tra b e $b+db$, ed essere quindi deflessa di un angolo compreso tra θ e $\theta+d\theta$. Il numero di queste particelle sarà quindi: $dn = n \cdot N \cdot x \cdot 2\pi \cdot b \cdot db$. Pertanto, la probabilità dP che in un singolo urto il parametro d'urto sia compreso tra b e $b+db$ (e quindi l'angolo di deflessione sia compreso tra θ e $\theta+d\theta$) risulta essere: $dP = dn/n = N \cdot x \cdot 2\pi \cdot b \cdot db$

Sostituendo la somma con un integrale:

$$\langle \theta^2 \rangle = 2\pi \cdot N \cdot x \cdot \int_{b_{\min}}^{b_{\max}} \left(\frac{2zZe^2}{mv^2 b} \right)^2 b \cdot db$$

$$\langle \theta^2 \rangle = \frac{8\pi N x z^2 Z^2 e^4}{mv^2} \ln \left(\frac{b_{\max}}{b_{\min}} \right)$$

Vediamo di valutare b_{\max} e b_{\min} .

Il massimo parametro d'urto si ha quando il proiettile passa ad una distanza pari al raggio atomico: in questo caso infatti gli elettroni schermano completamente la carica del nucleo: $b_{\max} = \frac{a_0}{Z^{1/3}}$, dove a_0 è il raggio di Bohr ($0.5 \cdot 10^{-8} \text{cm}$) e Z è il numero atomico

del bersaglio. Quanto a b_{\min} , esso deve essere maggiore sia del raggio nucleare del bersaglio ($r_0 A^{1/3}$) che della lunghezza d'onda di de Broglie della particella incidente (h/p). Una formula che tiene conto di questi effetti è la seguente:

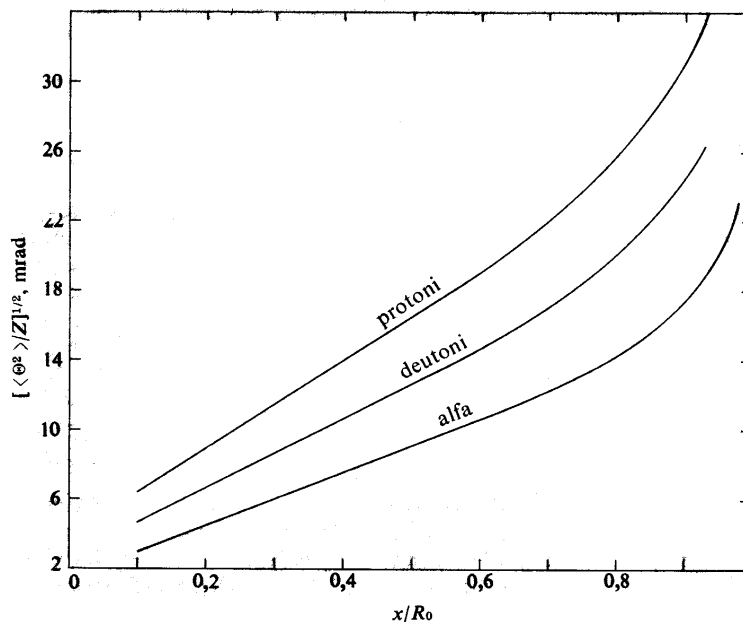


Fig 12.11 relazione tra $\langle \theta^2 \rangle$ e spessore attraversato

$$\langle \Theta^2 \rangle = 0.157 \frac{Z(Z+1)}{A} \frac{z^2 x}{p^2 \beta^2} \ln \left(1.13 \cdot 10^4 \frac{Z^{4/3}}{A} \frac{z^2 x}{\beta^2} \right)$$

dove A è il peso atomico del bersaglio in grammi, p è in MeV e x in g/cm².

12.7 Il fenomeno dello Straggling energetico

L'energia perduta da una particella carica nell'attraversare un mezzo è il risultato di moltissime interazioni singole. È quindi verosimile, per effetti statistici, che l'energia perduta da particelle cariche aventi uguale energia iniziale non sia esattamente la stessa per tutte: particelle monoenergetiche si ritrovano alla fine ad avere uno spettro di energia allargato di forma quasi gaussiana. Esso presenta tuttavia una coda verso le energie perdute più alte (curva di Landau). L'allargamento è tanto più consistente quanto maggiore è lo spessore attraversato.

Se chiamiamo ΔE l'energia perduta più probabile e δE la larghezza della distribuzione:

$$\Delta E = \frac{G \dagger}{\beta^2} \left(\ln \dagger + \ln \frac{G m_e}{F^2} + 0.96 \right) \quad \delta E = 3.98 \frac{G \dagger}{\beta^2}$$

$$G = \frac{2\pi e^4 N_0 Z}{m_e A} = 0.15 \frac{Z}{A} \text{ MeV} \cdot \text{cm}^2 / \text{g}$$

$$F = h \left(\frac{N_0 e^2 \rho Z}{\pi m_e A} \right)^{1/2} = 26.5 \left(\rho \frac{Z}{A} \right)^{1/2} \text{ eV}$$

$$\Delta E = 0.15 \frac{Z}{A} \frac{\dagger}{\beta^2} \left(\ln \frac{\dagger}{\rho} + 21.9 \right) \text{ MeV} \quad \delta E = 0.60 \frac{Z}{A} \frac{\dagger}{\beta^2} \text{ eV}$$

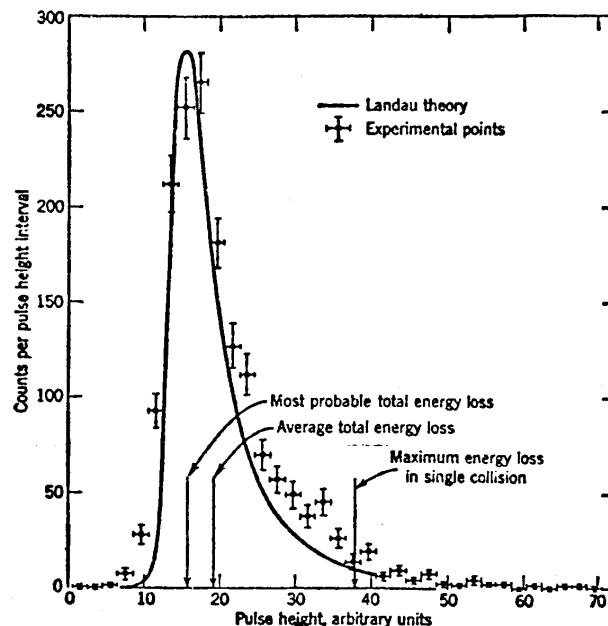


Fig 12.12 la dispersione energetica dovuta alle interazioni con la materia

Esercizio 1

Calcolare la perdita di energia di protoni da 20 MeV in 0.05 mm di Piombo e in 1 mm di Piombo ($\rho = 10.35 \text{ g/cm}^3$).

Dalle tabelle si ricava: $dE/d\xi = 11.16 \text{ MeV}\cdot\text{cm}^2/\text{g}$

0.05 mm di Pb corrispondono ad uno spessore massico pari a:

$$\xi = \rho x = 0.0567 \text{ g/cm}^2$$

Dalle tabelle che forniscono il range in funzione dell'energia si ricava che protoni da 20 MeV hanno in Piombo un range $R = 1.052 \text{ g/cm}^2$. Perciò, essendo $\xi \ll R$, si può assumere che la funzione $dE/d\xi$ non vari apprezzabilmente lungo il percorso del protone e si può portare fuori dal segno di integrale:

$$\Delta E = \int \frac{dE}{d\xi} d\xi \approx \frac{dE}{d\xi} \cdot \int d\xi = \frac{dE}{d\xi} \cdot \xi$$

Facendo i conti numerici: $\Delta E = (dE/d\xi) \cdot \xi = 0.633 \text{ MeV}$

Nel caso invece di un mm di piombo: $\xi = \rho x = 1.13 \text{ g/cm}^2$

$\Delta E = (dE/d\xi) \cdot \xi = 12.61 \text{ MeV}$, ed i protoni emergerebbero con una energia cinetica pari a 7.39 MeV

D'altra parte, poiché protoni da 20 MeV hanno in Piombo un range pari a 1.052 g/cm^2 , si fermano all'interno del materiale. Questa differenza è dovuta al fatto che nel caso di uno spessore 1 mm di Pb, questo non risulta trascurabile rispetto al range e quindi la funzione $dE/d\xi$ non può essere considerata costante. Al diminuire dell'energia infatti $dE/d\xi$ aumenta considerevolmente, tanto che la perdita totale è maggiore e le particelle si arrestano all'interno del materiale.

Esercizio 2

Calcolare la perdita di energia di elettroni da 100 MeV, 20 MeV e 2 MeV in un centimetro di acqua.

1 cm $\text{H}_2\text{O} \rightarrow 1 \text{ g/cm}^2 \text{ H}_2\text{O}$ e pertanto $\xi = 1 \text{ g/cm}^2$.

E	$dE/d\xi \text{ (MeV}\cdot\text{cm}^2/\text{g)}$	R (g/cm ²)
100	4.64	32.6
20	2.45	9.32
2	1.85	0.978

La condizione $\xi \ll R$ si applica per le energie di 100 e 20 MeV. In questi casi:

$$\Delta E = (dE/d\xi) \cdot s = 4.64 \text{ MeV (per } E = 100 \text{ MeV)}$$

$$\Delta E = (dE/d\xi) \cdot s = 2.45 \text{ MeV (per } E = 20 \text{ MeV)}$$

Per $E = 2 \text{ MeV}$ si ha invece che $\xi > R$ e quindi gli elettroni non emergono dal materiale.

Vediamo come avremmo dovuto fare il conto per elettroni da 3 MeV. Questi hanno un range pari a $R = 1.514 \text{ g/cm}^2$, per il quale non possiamo evidentemente applicare la condizione $\xi \ll R$. Si procede pertanto nel seguente modo: seguendo la tecnica riportata in fig 12.8, possiamo scrivere che: $s = 1.514 - 1.00 = 0.514 \text{ g/cm}^2$. Dalle

tabelle si ricava che ad un range $R = 0.514 \text{ g/cm}^2$ corrispondono elettroni con una energia iniziale compresa tra $E_1=1.00$ e $E_2=1.25 \text{ MeV}$, ai quali valori corrispondono range pari a $R_1=0.437$ e $R_2=0.572 \text{ g/cm}^2$ rispettivamente. Per trovare il valore esatto bisogna interpolare linearmente:

$$E = E_1 + \frac{(E_2 - E_1)}{(R_2 - R_1)}(R - R_1) = 1.0 + \frac{0.25}{(0.572 - 0.437)}(0.514 - 0.437) = 1.135 \text{ MeV}$$

Esercizio 3

Calcolare la perdita di energia di deutoni da 100 MeV e 20 MeV in 1 cm di acqua e in 0.05 mm di Pb. Partiamo dalle tabelle dei protoni e scaliamo secondo la relazione trovata:

$$\left[\frac{dE}{d\xi}(E_2) \right]_2 = \frac{z_2^2}{z_1^2} \cdot \left[\frac{dE}{d\xi} \left(E_1 = E_2 \frac{m_1}{m_2} \right) \right]_1$$

da cui:, nel caso di 100 MeV:

$$\left(\frac{dE}{d\xi} \right)_{d,E_d=100\text{MeV}} = \left(\frac{dE}{d\xi} \right)_{p,E_p=50\text{MeV}} = 12.44 \text{ MeV}\cdot\text{cm}^2/\text{g} \text{ (acqua)}$$

$$\left(\frac{dE}{d\xi} \right)_{d,E_d=100\text{MeV}} = \left(\frac{dE}{d\xi} \right)_{p,E_p=50\text{MeV}} = 5.81 \text{ MeV}\cdot\text{cm}^2/\text{g} \text{ (Pb)}$$

e nel caso di 20 MeV:

$$\left(\frac{dE}{d\xi} \right)_{d,E_d=20\text{MeV}} = \left(\frac{dE}{d\xi} \right)_{p,E_p=10\text{MeV}} = 45.67 \text{ MeV}\cdot\text{cm}^2/\text{g} \text{ (acqua)}$$

$$\left(\frac{dE}{d\xi} \right)_{d,E_d=20\text{MeV}} = \left(\frac{dE}{d\xi} \right)_{p,E_p=10\text{MeV}} = 17.79 \text{ MeV}\cdot\text{cm}^2/\text{g} \text{ (Pb)}$$

Valutiamo gli spessori massici dei materiali ed i rispettivi range per i deutoni da 20 e 100 MeV

$$1 \text{ cm acqua} \rightarrow \xi_{\text{acqua}} = 1 \text{ g/cm}^2$$

$$0.05 \text{ mm Pb} \rightarrow \xi_{\text{Pb}} = 0.0567 \text{ g/cm}^2$$

Ricordiamo che vale la relazione:

$$R_2(E_2) = \frac{m_2 z_1^2}{m_1 z_2^2} \cdot R_1 \left(E_1 = E_2 \frac{m_1}{m_2} \right), \text{ ossia, in questo caso: } R_d(E) = 2 \cdot R_p \left(\frac{1}{2} E \right)$$

Per $E_d=100 \text{ MeV}$ abbiamo:

$$R_{d, \text{acqua}}(100) = 2 \cdot R_{p, \text{acqua}}(50) = 2 \cdot 2.22 = 4.44 \text{ g/cm}^2 \gg \xi_{\text{acqua}}$$

$$R_{d, \text{Pb}}(100) = 2 \cdot R_{p, \text{Pb}}(50) = 2 \cdot 4.93 = 9.86 \text{ g/cm}^2 \gg \xi_{\text{Pb}}$$

Pertanto:

$$\text{in acqua: } \Delta E_{\text{acqua}} = (dE/d\xi)_{\text{acqua}} \cdot \xi_{\text{acqua}} = 12.44 \text{ MeV}$$

$$\text{in Piombo: } \Delta E_{\text{Pb}} = (dE/d\xi)_{\text{Pb}} \cdot \xi_{\text{Pb}} = 0.33 \text{ MeV}$$

Per $E_d=20 \text{ MeV}$ abbiamo invece:

$$R_{d, \text{acqua}}(20) = 2 \cdot R_{p, \text{acqua}}(10) = 2 \cdot 0.12 = 0.24 \text{ g/cm}^2 < 1 \text{ g/cm}^2$$

$$R_{d, \text{Pb}}(20) = 2 \cdot R_{p, \text{Pb}}(10) = 2 \cdot 0.34 = 0.68 \text{ g/cm}^2 \text{ di Pb} \gg 0.0567 \text{ g/cm}^2$$

Perciò deutoni da 20 MeV in 1 cm di acqua perdono tutta la loro energia. Per quanto riguarda il Piombo, possiamo fare il conto in due modi diversi:

$$\Delta E_{Pb} = (dE/d\xi)_{Pb} \cdot \xi_{Pb} = 17.79 \cdot 0.0565 = 1.01 \text{ MeV}$$

Oppure applichiamo la relazione generale:

Sottraiamo lo spessore effettivo al range:

$$(0.68 - 0.0567) = 0.623 \text{ g/cm}^2$$

Per poter usare le tabelle troviamo la relazione per i protoni sapendo che:

$$R_p\left(\frac{1}{2}E\right) = \frac{1}{2}R_d(E)$$

$$0.623/2 = 0.312 \text{ g/cm}^2$$

Dalle tabelle si ricava che $0.312 \text{ g/cm}^2 \Leftrightarrow R_p(9.5 \text{ MeV})$

Ossia: un range di 0.312 g/cm^2 corrisponde esattamente a protoni da 9.5 MeV

da cui: $0.624 \text{ g/cm}^2 = 2 \cdot R_p(9.5 \text{ MeV}) = R_d(19 \text{ MeV})$

$$\Delta E = (20 - 19) = 1 \text{ MeV}$$

Esercizio 4

Calcolare la perdita di energia di particelle α da 5.5 MeV in 3 mg/cm^2 di Al, in 3.5 mg/cm^2 di Cu, e in 6 mg/cm^2 di Au.

$$R_0(E_0 = 5.5 \text{ MeV}) = 6.60 \text{ mg/cm}^2 \text{ in Al}$$

$$(6.60 - 3) \text{ mg/cm}^2 = 3.60 \text{ mg/cm}^2$$

$$3.60 \text{ mg/cm}^2 \rightarrow R_1(E_1 = 3.55 \text{ MeV})$$

$$\Delta E = (5.50 - 3.55) \text{ MeV} = 1.95 \text{ MeV}$$

$$R_0(E_0 = 5.5 \text{ MeV}) = 10.2 \text{ mg/cm}^2 \text{ in Cu}$$

$$(10.2 - 3.5) \text{ mg/cm}^2 = 6.7 \text{ mg/cm}^2$$

$$6.7 \text{ mg/cm}^2 \rightarrow R_1(E_1 = 3.9 \text{ MeV})$$

$$\Delta E = (5.5 - 3.9) \text{ MeV} = 1.6 \text{ MeV}$$

$$R_0(E_0 = 5.5 \text{ MeV}) = 18.1 \text{ mg/cm}^2 \text{ in Au}$$

$$(18.1 - 6) \text{ mg/cm}^2 = 12.1 \text{ mg/cm}^2$$

$$12.1 \text{ mg/cm}^2 \rightarrow R_1(E_1 = 4.05 \text{ MeV})$$

$$\Delta E = (5.5 - 4.05) \text{ MeV} = 1.45 \text{ MeV}$$

Esercizio 5

Calcolare il percorso di particelle α da 10 MeV e da 4 MeV in Al, Cu e Au dalla formula approssimata e confrontando con i risultati forniti dalle tabelle.

$$R_\alpha(E) = R_p\left(\frac{1}{4}E\right) + 1.0 \text{ mg/cm}^2$$

$$R_\alpha(10 \text{ MeV}) = R_p(2.5 \text{ MeV}) + 1.0 \text{ mg/cm}^2$$

Elemento	$R_p(2.5 \text{ MeV})$ mg/cm^2	$R_p(2.5 \text{ MeV})+1.$ mg/cm^2	$R_\alpha(10 \text{ MeV})$ mg/cm^2

Al	16.1	17.1	16.6
Cu	22.7	23.7	23.6
Au	41.9	42.9	41.6

$$R_{\alpha}(4 \text{ MeV}) = R_p(1 \text{ MeV}) + 1.0 \text{ mg/cm}^2$$

Elemento	$R_p(1 \text{ MeV})$ mg/cm^2	$R_p(1 \text{ MeV})+1.$ mg/cm^2	$R_{\alpha}(4 \text{ MeV})$ mg/cm^2
Al	3.89	4.89	4.21
Cu	6.12	7.12	6.81
Au	10.9	12.9	12.0

Esercizio 6

Calcolare il potere frenante massico per protoni di energia 1 MeV, 10 MeV e 100 MeV in acqua ed in Pb tramite la formula e confrontare i risultati con quanto riportato nelle tabelle.

Dalla formula per protoni:

$$\left(\frac{dE}{d\xi}\right)_{\text{ion}} = 145 \frac{Z}{T \cdot A} \left[\ln\left(\frac{E}{Z}\right) + C \right]$$

Nel caso del Pb abbiamo:

$$Z = 82; \quad A = 208; \quad C = 5.28$$

Sostituendo si ottiene:

E	1 MeV	10 MeV	100 MeV
$(dE/d\xi)_{\text{ion}} \text{ calc}$	50 MeV·cm ² /g	18 MeV·cm ² /g	3.1 MeV·cm ² /g
$(dE/d\xi)_{\text{ion}} \text{ tab}$	62.9 MeV·cm ² /g	17.8 MeV·cm ² /g	3.55 MeV·cm ² /g

Per quanto riguarda l'acqua, essa è un composto; I pesi relativi, per idrogeno ed ossigeno, sono: $P_H = 1/9$, $p_O = 8/9$. Pertanto:

$$\left(\frac{dE}{d\xi}\right)_{\text{H}_2\text{O}} = \frac{1}{9} \left(\frac{dE}{d\xi}\right)_H + \frac{8}{9} \left(\frac{dE}{d\xi}\right)_O$$

Per $E = 1 \text{ MeV}$:

$$\left(\frac{dE}{d\xi}\right)_H = 667 \text{ MeV} \cdot \text{cm}^2/\text{g}$$

$$\left(\frac{dE}{d\xi}\right)_O = 220 \text{ MeV} \cdot \text{cm}^2/\text{g}$$

$$\left(\frac{dE}{d\xi}\right)_{\text{H}_2\text{O}} = \frac{1}{9} \left(\frac{dE}{d\xi}\right)_H + \frac{8}{9} \left(\frac{dE}{d\xi}\right)_O = \frac{667}{9} + \frac{8 \cdot 220}{9} = 269.7 \text{ MeV} \cdot \text{cm}^2/\text{g}$$

ripetendo il conto per $E = 10$ e $E = 100 \text{ MeV}$ e confrontando con i dati ricavati dalle tabelle si ottiene la tabella seguente:

E	1 MeV	10 MeV	100 MeV
$(dE/d\xi)_{ion} \text{ calc}$	$269.7 \text{ MeV}\cdot\text{cm}^2/\text{g}$	$45.8 \text{ MeV}\cdot\text{cm}^2/\text{g}$	$6.37 \text{ MeV}\cdot\text{cm}^2/\text{g}$
$(dE/d\xi)_{ion} \text{ tab}$	$260.8 \text{ MeV}\cdot\text{cm}^2/\text{g}$	$45.7 \text{ MeV}\cdot\text{cm}^2/\text{g}$	$7.28 \text{ MeV}\cdot\text{cm}^2/\text{g}$

Esercizio 7

Calcolare il range massimo degli elettroni emessi da ^{90}Sr , ^{14}C e ^3H in acqua, Al, e aria.

Innanzitutto scriviamo l'energia massima dei β :

$$E_{\max}(^{90}\text{Sr}) = 2.26 \text{ MeV}$$

$$E_{\max}(^{14}\text{C}) = 0.155 \text{ MeV}$$

$$E_{\max}(^3\text{H}) = 18 \text{ keV}$$

Le densità degli assorbitori sono invece:

$$\rho_{\text{acqua}} = 1.0 \text{ g/cm}^3$$

$$\rho_{\text{Al}} = 2.7 \text{ g/cm}^3$$

$$\rho_{\text{aria}} = 1.2 \cdot 10^{-3} \text{ g/cm}^3$$

Per gli elettroni dello ^{90}Sr abbiamo:

$$R_m(2.26 \text{ MeV}) = 1.1 \text{ g/cm}^2 \text{ da cui, tenendo presente le densità:}$$

$$R_{\text{acqua}} = 1.1 \text{ cm} \quad R_{\text{Al}} = 0.4 \text{ cm} \quad R_{\text{aria}} = 10^3 \text{ cm}$$

Per gli elettroni del ^{14}C :

$$R_m(0.155 \text{ MeV}) = 2.8 \cdot 10^{-2} \text{ g/cm}^2, \text{ e pertanto:}$$

$$R_{\text{acqua}} = 3 \cdot 10^{-2} \text{ cm} \quad R_{\text{Al}} = 10^{-2} \text{ cm} \quad R_{\text{aria}} = 22 \text{ cm}$$

e per il ^3H :

$$R_m(18 \text{ keV}) = 6 \cdot 10^{-4} \text{ g/cm}^2, \text{ e pertanto:}$$

$$R_{\text{acqua}} = 4 \cdot 10^{-4} \text{ cm} \quad R_{\text{Al}} = 2.6 \cdot 10^{-4} \text{ cm} \quad R_{\text{aria}} = 5 \cdot 10^{-1} \text{ cm}$$

Capitolo 13

Interazione radiazione-materia: i fotoni

13.1 Interazione dei fotoni con la materia

I fotoni interagiscono con la materia attraverso tre effetti : fotoelettrico (ph) compton (C) e produzione di coppie (pp). Per ognuno di questi effetti si definisce una sezione d'urto microscopica σ_{ph} , σ_C , σ_{pp} .

13.2 L'Effetto fotoelettrico

E' il processo di interazione di un quanto gamma con gli elettroni legati. In questo processo il fotone si annichila e la sua intera energia viene trasferita all'elettrone. L'elettrone viene allora espulso dall'atomo con una energia cinetica: $T_e = E_\gamma - B_n$, dove E_γ è l'energia del fotone e B_n rappresenta l'energia di legame dell'elettrone nella shell atomica n-esima. Ovviamente, per $E_\gamma < B_K$, l'effetto fotoelettrico è possibile solo su elettroni delle shell L, M, .. e non della shell K. Si ha così una serie di salti nella curva che rappresenta la probabilità di interazione, corrispondenti all'energia di legame delle differenti orbite (figura 13.1).

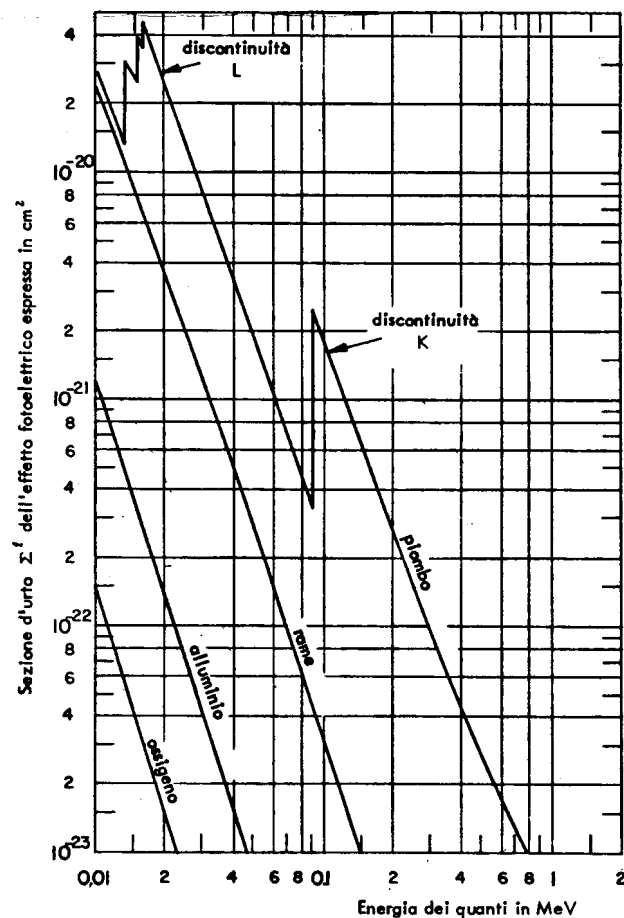


Fig 13.1 sezione d'urto fotoelettrica in vari materiali

Queste energie sono date approssimativamente dalla legge di Moseley:

$$E_n = Rhc \frac{(Z - \sigma_n)^2}{n^2}, \text{ dove } Rhc = 13.6 \text{ eV}, Z \text{ è il numero atomico, } n \text{ è il numero quantico}$$

principale e σ_n la costante di schermo (vale 3 per lo strato K, 5 per lo strato L). La vacanza creata nelle shell di partenza viene riempita da elettroni delle shell più esterne e quindi l'effetto fotoelettrico è sempre accompagnato dalla emissione di raggi X tipici dell'atomo bersaglio. La sezione d'urto fotoelettrica dipende fortemente da Z e dall'energia del fotone E_γ : il processo è tanto più probabile quanto maggiore è Z e quanto minore è E_γ . Si può scrivere: $\sigma \propto Z^n \cdot E^{-m}$, dove $n = 4 \div 4.5$ e $m = 3 \div 3.5$

13.3 Diffusione Thomson e Compton

Nell'effetto fotoelettrico è essenziale che l'elettrone sia legato. Tuttavia, anche un elettrone libero nel campo elettromagnetico variabile associato al fotone è posto in oscillazione e irradia come un oscillatore. La radiazione appare sotto forma di raggi gamma diffusi. Si deve a J.J.Thomson una teoria classica di questo effetto: consideriamo un'onda piana sinusoidale che si propaga in direzione z , con il vettore elettrico polarizzato lungo x e di intensità $I_0 = \frac{\langle E^2 \rangle}{4\pi} c$. Un elettrone nel campo di un'onda sinusoidale subisce una forza data da: $e\mathbf{E} = eE_0 \sin(\omega t)$, ω essendo la frequenza dell'onda, e acquisterà una accelerazione $\mathbf{a} = \frac{eE_0}{m} \sin(\omega t)$. Si sa dalla teoria elettromagnetica che una carica elettrica e soggetta ad una accelerazione irradia una potenza media data da: $\langle W \rangle = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \langle \mathbf{a}^2 \rangle$

Nel nostro caso quindi, sostituendo e sapendo che $\langle \sin^2(\omega t) \rangle = \frac{1}{2}$, la potenza media irraggiata risulta:

$$\langle W \rangle = \frac{2}{3} \frac{e^4}{m^2 c^3} \frac{E_0^2}{2} = \frac{2}{3} \frac{e^4}{m^2 c^3} \langle E^2 \rangle = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 I_0$$

questa potenza è sottratta al fascio primario e possiamo quindi dire:

$$\sigma_T = \frac{\langle W \rangle}{I_0} = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 = \frac{8\pi}{3} r_0^2 = 0.665 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$$

dove σ_T rappresenta la sezione d'urto Thomson. $r_0 = \frac{e^2}{mc^2} = 2.82 \cdot 10^{-13} \text{ cm}$ è chiamato raggio classico dell'elettrone. In questa approssimazione la sezione d'urto non dipende dalla energia del fotone incidente. La sezione d'urto differenziale (distribuzione angolare) dei fotoni diffusi risulta essere: $\frac{d\sigma_T(\vartheta)}{d\Omega} = \frac{r_0^2}{2} (1 + \cos^2 \vartheta)$

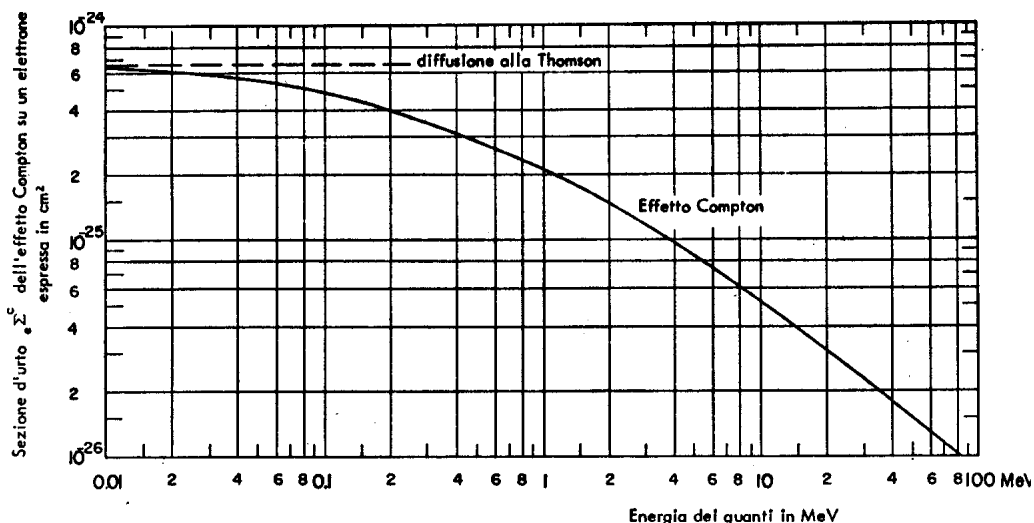


Fig 13.2 sezione d'urto Compton (e Thomson)

Una trattazione più completa fornisce una sezione d'urto che dipende dall'energia e tende alla sezione d'urto Thomson $E_\gamma \rightarrow 0$ (vedi figura 13.2). La distribuzione angolare, come calcolato da Klein-Nishina, è data dalla seguente espressione:

$$\frac{d\sigma_T(\vartheta)}{d\Omega} = \frac{r_0^2}{2} (1 + \cos^2 \vartheta) \cdot \left\{ \frac{1}{1 + \alpha(1 - \cos \vartheta)} \right\}^2 \cdot \left\{ 1 + \frac{\alpha^2 (1 - \cos \vartheta)^2}{(1 + \cos^2 \vartheta)(1 + \alpha(1 - \cos \vartheta))} \right\}$$

dove: $\alpha = \frac{E_\gamma}{m_e c^2}$

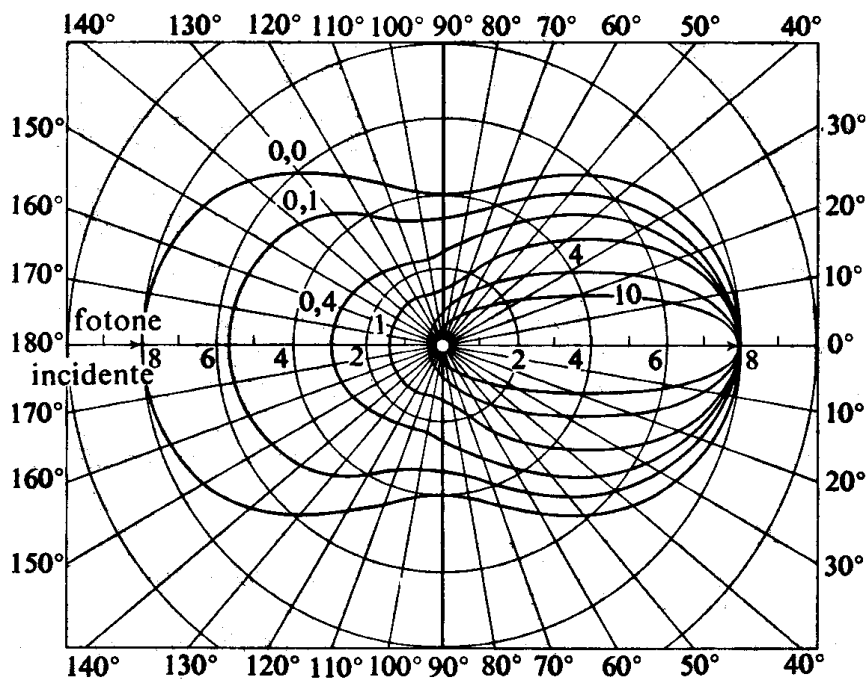


Fig 13.3 distribuzione angolare nell'effetto Compton

In figura 13.3 è rappresentata la distribuzione angolare del fotone diffuso in un diagramma polare: i numeri accanto alle curve rappresentano l'energia del fotone incidente, e si vede che il fotone è diffuso ad angoli tanto più in avanti quanto maggiore è l'energia del fotone incidente.

La dipendenza della sezione d'urto Compton da Z e da E_γ è del tipo: $\sigma_C \propto Z \cdot E_\gamma^{-1}$.

Quanto all'energia del fotone diffuso, questa dipende dall'angolo di diffusione e si calcola considerando l'urto tra fotone ed elettrone completamente elastico.

Utilizzando il formalismo dei 4-vettori diffusione elastica di fotoni da parte di elettroni liberi (si trascura cioè l'energia di legame elettrone-atomo), si ha:

$$1 + 2 \rightarrow 3 + 4$$

$$\gamma + e \rightarrow \gamma' + e'$$

$$p_\gamma + p_e = p_{\gamma'} + p_{e'}$$

$$(p_\gamma - p_{\gamma'})^2 = (p_{e'} - p_e)^2$$

$$(p_\gamma - p_{\gamma'})^2 = E_\gamma^2/c^2 - \mathbf{p}_\gamma^2 + E_{\gamma'}^2/c^2 - \mathbf{p}_{\gamma'}^2 - 2E_\gamma E_{\gamma'}/c^2 + 2 p_\gamma p_{\gamma'} \cos\theta = -2E_\gamma E_{\gamma'}/c^2(1 - \cos\theta)$$

in quanto per i fotoni $p = E/c$.

$$(p_{e'} - p_e)^2 = E_{e'}^2/c^2 - \mathbf{p}_{e'}^2 + E_e^2/c^2 - \mathbf{p}_e^2 - 2mc^2 E' = 2m^2 c^4 - 2mc^2 E'$$

(essendo l'elettrone in quiete: $\mathbf{p}_e = 0$ e $E = mc^2$)

Ed inoltre, dalla conservazione dell'energia: $E_\gamma + mc^2 = E_{\gamma'} + E'$, ossia: $E' = E_\gamma - E_{\gamma'} + mc^2$

Sostituendo: $-E_\gamma E_{\gamma'}/c^2(1 - \cos\theta) = m^2 c^4 - mc^2 E' = mc^2(E_\gamma - E_{\gamma'})$

$$\text{Da cui: } E_{\gamma'} = \frac{E_\gamma}{1 + \frac{E_\gamma}{mc^2}(1 - \cos\theta)}$$

che rappresenta l'energia del fotone diffuso in funzione dell'angolo di scattering ϑ .

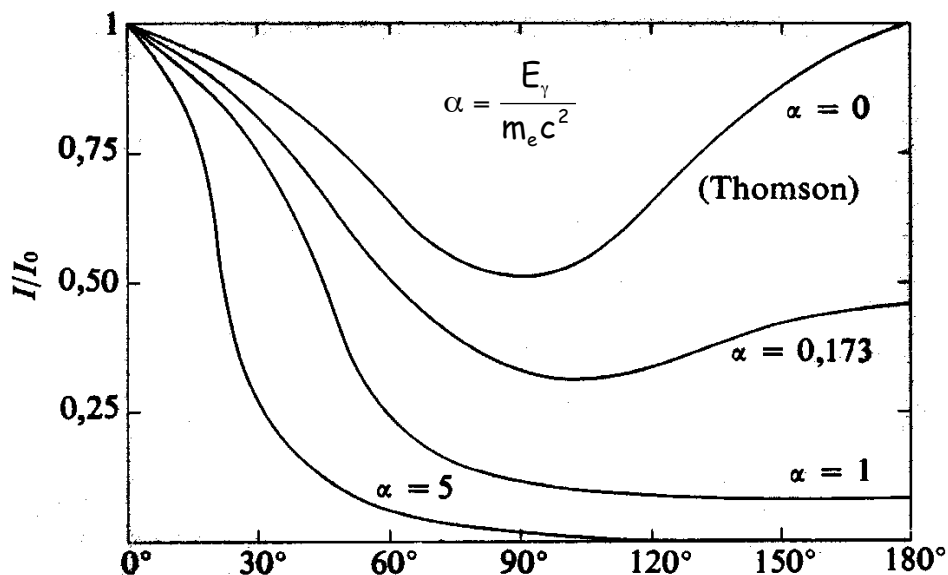


Fig 13.4 sezione d'urto Compton in funzione di energia ed angolo di diffusione

per $\vartheta = 0$: $E_\gamma'^{\max} = E_\gamma$ e $E_e^{\min} = 0$
per $\vartheta = \pi$: $E_\gamma'^{\min} = \frac{m_e c^2}{2 + \frac{m_e c^2}{E_\gamma}}$ e $E_e^{\max} = \frac{E_\gamma}{1 + \frac{m_e c^2}{2E_\gamma}}$

La probabilità di emissione ad un certo angolo ϑ rispetto alla direzione del fotone incidente è illustrata in figura 13.4, dove: $\alpha = \frac{E_\gamma}{m_e c^2}$

13.4 Produzione di coppie

Per fotoni di relativamente alta energia esiste un'altra forma di interazione con la materia: il processo di creazione di coppie. In questo processo il fotone si annichila e materializza una coppia elettrone-positrone: naturalmente questo è un processo a soglia, in quanto l'energia del fotone deve essere almeno pari alla somma delle masse delle particelle create: $E_\gamma > 2m_e = 1.02 \text{ MeV}$. Il processo di produzione di coppie non può avvenire nel vuoto, ma richiede la presenza di un nucleo o di un elettrone. Infatti, per la conservazione del 4-momento, un fotone non può cedere contemporaneamente energia ed impulso ad una coppia di particelle in quanto dovrebbe essere:

$$1 \rightarrow 2 + 3 \quad p_\gamma = p_1 + p_2 \quad (p_\gamma)^2 = (p_1 + p_2)^2$$

$$0 = m_1^2 c^4 + m_2^2 c^4 + 2E_1 E_2 / c^2 - 2\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 = m_1^2 c^4 + m_2^2 c^4 + 2E_1 E_2 / c^4 + 2|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_2| > 0$$

Infatti il 4-impulso di particelle dotate di massa è sempre una quantità positiva.

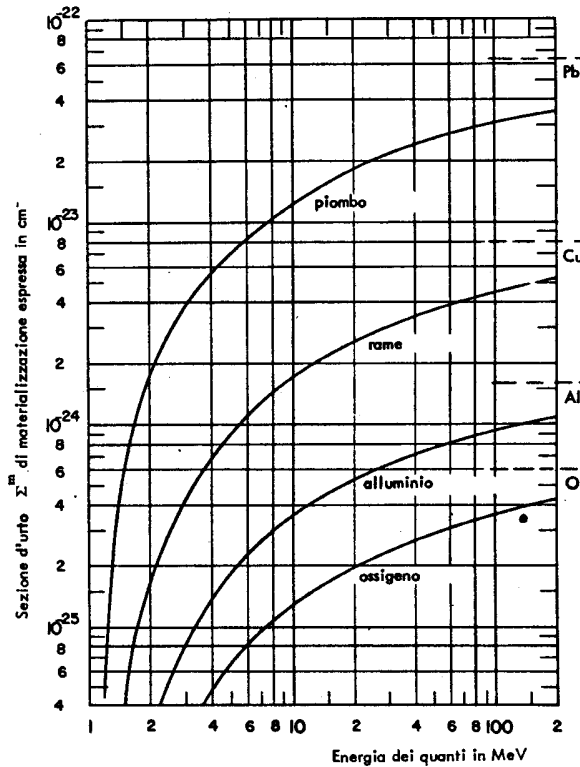


Fig 13.3 sezione d'urto di produzione di coppie in vari materiali

L'espressione della sezione d'urto di produzione di coppie è abbastanza complicata: qui diremo soltanto che essa ha un andamento del tipo: $\sigma_{pp} \propto Z^2 \cdot \ln(E_\gamma + \text{cost})$. La figura 13.3 ne illustra l'andamento in funzione dell'energia dei fotoni e del numero atomico del materiale.

13.5 Coefficiente di attenuazione lineare e massico

Oltre alla sezione d'urto microscopica σ_{ph} , σ_C , σ_{pp} , per scopi pratici si definisce una sezione d'urto macroscopica (coefficiente di attenuazione) μ_{ph} , μ_C , μ_{pp} .

σ e μ sono legati, per ognuno dei tre processi, dalla relazione: $\mu = N\sigma$, dove N rappresenta il numero di bersagli (atomi) per unità di volume. La sezione d'urto σ rappresenta un'area e si misura in cm^2 oppure in barn ($1 \text{ barn} = 10^{-24} \text{cm}^2$). Il coefficiente di attenuazione μ rappresenta la probabilità di interazione per unità di percorso, ha come dimensioni l'inverso di una lunghezza e si misura in cm^{-1} . Naturalmente la sezione d'urto totale è data dalla somma delle tre sezioni d'urto: $\sigma = \sigma_{ph} + \sigma_C + \sigma_{pp}$ e il coefficiente di attenuazione totale risulta essere: $\mu = \mu_{ph} + \mu_C + \mu_{pp}$.

Quando un fascio di fotoni penetra in un mezzo, a causa delle interazioni con il mezzo stesso l'intensità del fascio decresce esponenzialmente. Sia infatti dI il numero di fotoni che interagiscono nel tratto di materiale dx e che quindi vengono sottratti al fascio originario. Ovviamente: $dI = -I\mu dx$, da cui integrando: $I(x) = I_0 e^{-\mu x}$, dove $I(x)$ rappresenta il numero di fotoni ancora presenti alla profondità x , essendo I_0 il numero di fotoni iniziale. Accanto al coefficiente di attenuazione lineare, come nel caso del potere frenante, si preferisce misurare gli spessori di materiale in g/cm^2 , utilizzando lo spessore massico $\tau = \rho \cdot x$.

Per ognuno dei tre effetti (indicati genericamente con il pedice "i") possiamo scrivere:

$$\mu_i = N \cdot \sigma_i = \frac{N_0}{A} \rho \cdot \sigma_i$$

da cui ricaviamo

$$\frac{\mu_{ph}}{\rho} = \frac{N_0}{A} \cdot \sigma_{ph} \quad \frac{\mu_C}{\rho} = \frac{N_0}{A} \cdot \sigma_C \quad \frac{\mu_{pp}}{\rho} = \frac{N_0}{A} \cdot \sigma_{pp}$$

In particolare si può notare che il coefficiente di attenuazione massico per l'effetto Compton dipende molto poco dal materiale: infatti, poichè abbiamo visto che la sezione d'urto ha l'andamento del tipo: $\sigma_C \propto Z \cdot E_\gamma^{-1}$, avremo:

$$\frac{\mu_C}{\rho} = \frac{N_0}{A} \cdot \sigma_C \propto \frac{N_0 Z}{A E_\gamma} \approx \frac{N_0}{2E_\gamma} \text{ e scompare la dipendenza dal materiale.}$$

Nel caso di composti o miscele, analogamente a quanto già visto nel caso del potere frenante, avremo: $\frac{\mu}{\rho} = \sum_i \left(\frac{\mu}{\rho} \right)_i p_i$, dove rappresenta la frazione massa dell'elemento i -esimo.

Se il composto è una molecola, si ha ovviamente: $p_i = \frac{n_i A_i}{A}$ dove n_i rappresenta il numero di atomi della specie i -esima contenuti nella molecola, A_i il loro peso atomico e A il peso molecolare.

Materiale	Numero atomico efficace per effetto fotoelettrico relazione (IX-28) Z_f	Numero atomico efficace per la materializzazione relazione (IX-29) Z_m
Grasso	6,10	5,65
Muscolo	7,60	7,10
Osso	12,0	9,15
Acqua	7,67	7,20
Aria	7,68	7,36

tab 13.1 numero atomico Z efficace di alcuni composti organici

Materiale	H Idrogeno Z=1 $P_A = 1,008$	C Carbonio Z=6 $P_A = 12,00$	N Azoto Z=7 $P_A = 14,01$	O Ossigeno Z=8 $P_A = 15,98$	P Fosforo Z=15 $P_A = 30,97$	Ar Argon Z=18 $P_A = 39,95$	Ca Calcio Z=20 $P_A = 40,08$	Densità g/cm
Grasso	0,115	0,77		0,115				0,9
Tessuto molle	0,10	0,125	0,035	0,730	0,007		0,003	1,0
Osso duro	0,065	0,28	0,028	0,41	0,07		0,147	1,85
Acqua	0,112			0,888				1,00
Aria			0,755	0,232		0,013		$1,293 \cdot 10^{-3}$

tab 13.2 composizione di alcuni materiali organici

13.6 Cammino libero medio

Rappresenta il percorso effettuato in media da un fotone prima di interagire. La probabilità di interagire tra x e $x+dx$ è data da: $\mu dx \cdot e^{-\mu x}$

Infatti $e^{-\mu x}$ rappresenta la probabilità di non aver interagito fino alla profondità x , mentre μdx è la probabilità di interagire nel successivo tratto dx . Se chiamiamo λ il libero cammino medio, si ha quindi (per definizione di valor medio):

$$\lambda = \int_0^{\infty} x \cdot p(x) \cdot dx = \int_0^{\infty} x \cdot (\mu \cdot e^{-\mu x} dx) = \frac{1}{\mu}$$

13.7 Strato emivalente

Rappresenta lo spessore di materiale che dimezza l'intensità del fascio incidente. Se chiamiamo $S_{1/2}$ tale spessore, si ha: $N(S_{1/2}) = \frac{1}{2}N_0 = N_0 \exp(-\mu \cdot S_{1/2})$ e quindi:

$$S_{1/2} = \frac{\ln 2}{\mu} = \lambda \cdot \ln 2$$

Si definisce allo stesso modo lo strato decivalente: $S_{1/10} = \frac{\ln 10}{\mu} = \lambda \cdot \ln 10$

Nelle figure 13.4 e 13.5 è riportato il grafico del coefficiente di attenuazione massico in ossigeno e rame (fig. 13.4) e in piombo ed alluminio (fig. 13.5). Nelle stesse figure sono anche rappresentati i coefficienti massici parziali dei vari effetti fotoelettrico, Compton e produzione di coppie.

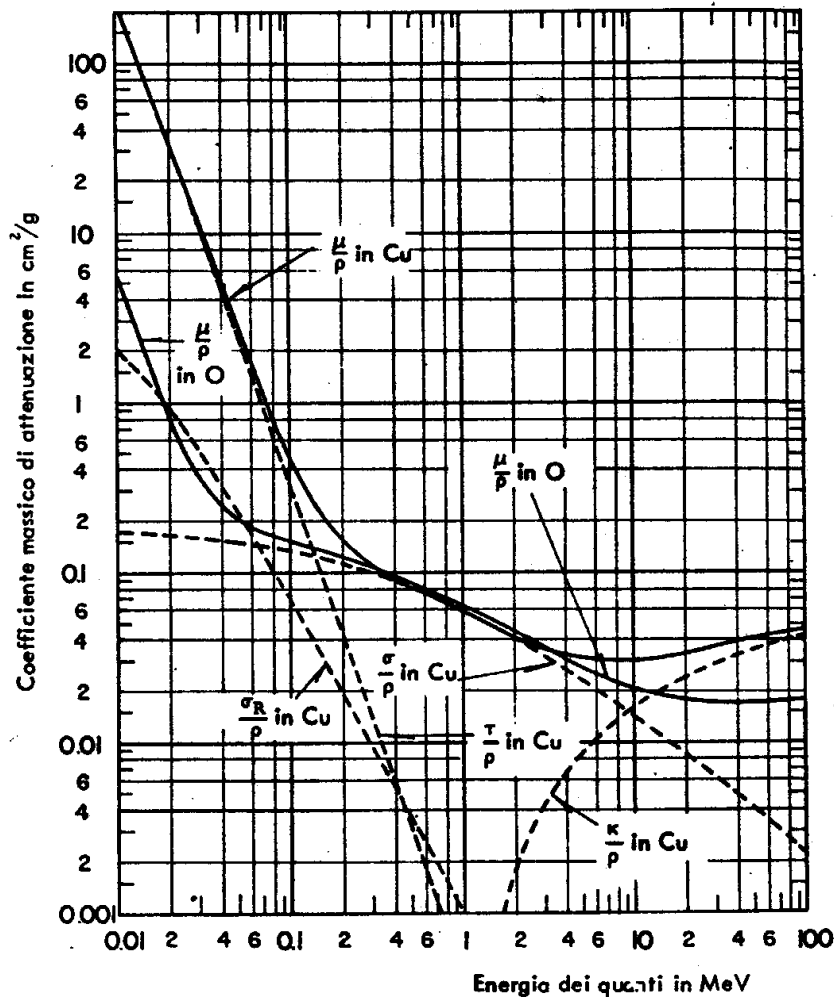


Fig. 13.4 coefficiente di attenuazione massico in ossigeno e rame

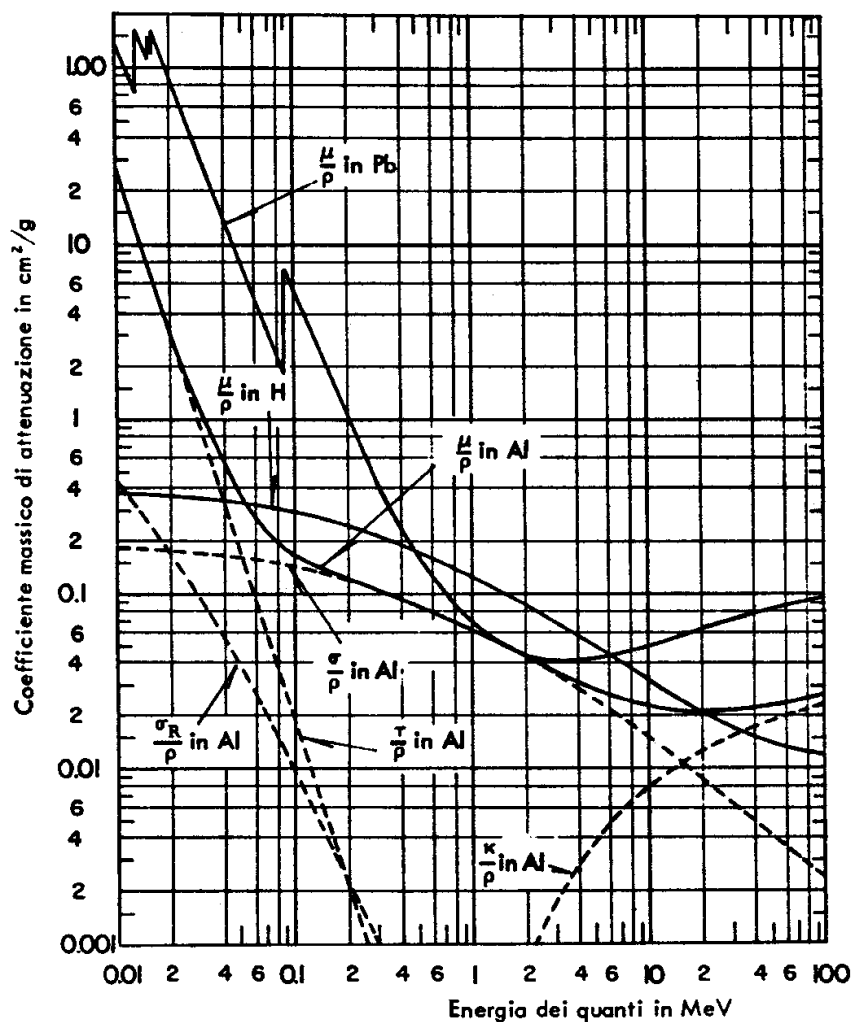


Fig. 13.5 coefficiente di attenuazione massico in alluminio e piombo

13.8 Coefficienti di assorbimento.

Spesso, specie in problemi di dosimetria e di radioprotezione, ha interesse valutare l'energia che i fotoni, nelle loro interazioni con il mezzo, depositano in esso. In tutti e tre i processi il fotone cede energia ad un elettrone, il quale a sua volta la depositerà nel mezzo attraverso i processi di ionizzazione e/o bremsstrahlung. Nell'effetto fotoelettrico e nella produzione di coppie il fotone si annichila, e sia l'elettrone che la coppia elettrone-positrone hanno un range limitato e cedono quindi localmente l'energia ricevuta dal fotone. Diverso è il caso in cui avvenga un effetto Compton, perché in questo caso parte dell'energia del fotone primario viene ceduta al fotone diffuso e quindi depositata non localmente. I coefficienti di assorbimento di energia, denominati μ_{en} , sono definiti attraverso i corrispondenti coefficienti di attenuazione

moltiplicati per la frazione di energia ceduta agli elettroni sotto forma di energia cinetica (e quindi dissipata localmente). Avremo quindi:

$$\mu_{en\ ph} = \mu_{ph} \frac{E_e}{E_\gamma} = \mu_{ph} \frac{E_\gamma - B_e}{E_\gamma} \approx \mu_{ph} \quad \text{in quanto } E_\gamma \gg B_e$$

$$\mu_{en\ pp} = \mu_{pp} \frac{E_e}{E_\gamma} = \mu_{ph} \frac{E_\gamma - 2m_e}{E_\gamma} \approx \mu_{pp} \quad \text{in quanto, nel range di energia in cui domina la produzione di coppie, } E_\gamma \gg 2m_e$$

$\mu_{en\ c} = \mu_c \frac{E_e}{E_\gamma} = \mu_{ph} \frac{E_\gamma - E_\gamma'}{E_\gamma}$. In questo caso invece $\mu_{en\ c}$ è sempre sensibilmente minore di μ_c . Naturalmente, anche nel caso dei coefficienti di assorbimento essi potranno essere sia lineari che massici.

In tabella 13.3 è riportato il coefficiente di attenuazione massico per fotoni di energia tra 100 keV e 10 MeV in vari elementi e composti.

The Mass Attenuation Coefficient (μ/ρ) for Several Materials, in cm^2/g *

Material	Gamma-Ray Energy, MeV																	
	0.1	0.15	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.8	1.0	1.25	1.5	2	3	4	5	6	8	10
H	.295	.265	.243	.212	.189	.173	.160	.140	.126	.113	.103	.0876	.0691	.0579	.0502	.0446	.0371	.0321
Be	.132	.119	.109	.0945	.0847	.0773	.0715	.0628	.0565	.0504	.0459	.0394	.0313	.0266	.0234	.0211	.0180	.0161
C	.149	.134	.122	.106	.0953	.0870	.0805	.0707	.0636	.0568	.0518	.0444	.0356	.0304	.0270	.0245	.0213	.0194
N	.150	.134	.123	.106	.0955	.0869	.0805	.0707	.0636	.0568	.0517	.0445	.0357	.0306	.0273	.0249	.0218	.0200
O	.151	.134	.123	.107	.0953	.0870	.0806	.0708	.0636	.0568	.0518	.0445	.0359	.0309	.0276	.0254	.0224	.0206
Na	.151	.130	.118	.102	.0912	.0833	.0770	.0676	.0608	.0546	.0496	.0427	.0348	.0303	.0274	.0254	.0229	.0215
Mg	.160	.135	.122	.106	.0944	.0860	.0795	.0699	.0627	.0560	.0512	.0442	.0360	.0315	.0286	.0266	.0242	.0228
Al	.161	.134	.120	.103	.0922	.0840	.0777	.0683	.0614	.0548	.0500	.0432	.0353	.0310	.0282	.0264	.0241	.0229
Si	.172	.139	.125	.107	.0954	.0869	.0802	.0706	.0635	.0567	.0517	.0447	.0367	.0323	.0296	.0277	.0254	.0243
P	.174	.137	.122	.104	.0928	.0846	.0780	.0685	.0617	.0551	.0502	.0436	.0358	.0316	.0290	.0273	.0252	.0242
S	.188	.144	.127	.108	.0958	.0874	.0806	.0707	.0635	.0568	.0519	.0448	.0371	.0328	.0302	.0284	.0266	.0255
Ar	.188	.135	.117	.0977	.0867	.0790	.0730	.0638	.0573	.0512	.0468	.0407	.0338	.0301	.0279	.0266	.0248	.0241
K	.215	.149	.127	.106	.0938	.0852	.0786	.0689	.0618	.0552	.0505	.0438	.0365	.0327	.0305	.0289	.0274	.0267
Ca	.238	.158	.132	.109	.0965	.0876	.0809	.0708	.0634	.0566	.0518	.0451	.0376	.0338	.0316	.0302	.0285	.0280
Fe	.344	.183	.138	.106	.0919	.0828	.0762	.0664	.0595	.0531	.0485	.0424	.0361	.0330	.0313	.0304	.0295	.0294
Cu	.427	.206	.147	.108	.0916	.0820	.0751	.0654	.0585	.0521	.0476	.0418	.0357	.0330	.0316	.0309	.0303	.0305
Mo	1.03	.389	.225	.130	.0998	.0851	.0761	.0648	.0575	.0510	.0467	.0414	.0365	.0349	.0344	.0344	.0349	.0359
Sn	1.58	.563	.303	.153	.109	.0886	.0776	.0647	.0568	.0501	.0459	.0408	.0367	.0355	.0355	.0358	.0368	.0383
I	1.83	.648	.339	.165	.114	.0913	.0792	.0653	.0571	.0502	.0460	.0409	.0370	.0360	.0361	.0365	.0377	.0394
W	4.21	1.44	.708	.293	.174	.125	.101	.0763	.0640	.0544	.0492	.0437	.0405	.0402	.0409	.0418	.0438	.0465
Pt	4.75	1.64	.795	.324	.191	.135	.107	.0800	.0659	.0554	.0501	.0445	.0414	.0411	.0418	.0427	.0448	.0477
Tl	5.16	1.80	.866	.346	.204	.143	.112	.0824	.0675	.0563	.0508	.0452	.0420	.0416	.0423	.0433	.0454	.0484
Pb	5.29	1.84	.896	.356	.208	.145	.114	.0836	.0684	.0569	.0512	.0457	.0421	.0420	.0426	.0436	.0459	.0489
U	10.60	2.42	1.17	.452	.259	.176	.136	.0952	.0757	.0615	.0548	.0484	.0445	.0440	.0446	.0455	.0479	.0511
Air	.151	.134	.123	.106	.0953	.0868	.0804	.0706	.0655	.0567	.0517	.0445	.0357	.0307	.0274	.0250	.0220	.0202
NaI	1.57	.568	.305	.155	.111	.0901	.0789	.0657	.0577	.0508	.0465	.0412	.0367	.0351	.0347	.0347	.0354	.0366
H ₂ O	.167	.149	.136	.118	.106	.0966	.0896	.0786	.0706	.0630	.0575	.0493	.0396	.0339	.0301	.0275	.0240	.0219
Concrete	.169	.139	.124	.107	.0954	.0870	.0804	.0706	.0635	.0567	.0517	.0445	.0363	.0317	.0287	.0268	.0243	.0229
Tissue	.163	.144	.132	.115	.100	.0936	.0867	.0761	.0683	.0600	.0556	.0478	.0384	.0329	.0292	.0267	.0233	.0212

In tabella 13.4 è riportato il coefficiente di assorbimento massico per fotoni di energia tra 100 keV e 10 MeV in vari elementi e composti.

The Mass Absorption Coefficient (μ_a/ρ) for Several Materials, in cm^2/g *

Material	Gamma-Ray Energy, MeV																	
	0.1	0.15	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.8	1.0	1.25	1.50	2	3	4	5	6	8	10
H	.0411	.0487	.0531	.0575	.0589	.0591	.0590	.0575	.0557	.0533	.0509	.0467	.0401	.0354	.0318	.0291	.0252	.0255
Be	.0183	.0217	.0237	.0256	.0263	.0264	.0263	.0256	.0248	.0237	.0227	.0210	.0183	.0164	.0151	.0141	.0127	.0118
C	.0215	.0246	.0267	.0288	.0296	.0297	.0296	.0289	.0280	.0268	.0256	.0237	.0209	.0190	.0177	.0166	.0153	.0145
N	.0224	.0249	.0267	.0288	.0296	.0297	.0296	.0289	.0280	.0268	.0256	.0236	.0211	.0193	.0180	.0171	.0158	.0151
O	.0233	.0252	.0271	.0289	.0296	.0297	.0296	.0289	.0280	.0268	.0257	.0238	.0212	.0195	.0183	.0175	.0163	.0157
Na	.0289	.0258	.0266	.0279	.0283	.0284	.0284	.0276	.0268	.0257	.0246	.0229	.0207	.0194	.0185	.0179	.0171	.0168
Mg	.0335	.0276	.0278	.0290	.0294	.0293	.0292	.0285	.0276	.0265	.0254	.0237	.0215	.0203	.0194	.0188	.0182	.0180
Al	.0373	.0283	.0275	.0283	.0287	.0286	.0286	.0278	.0270	.0259	.0248	.0232	.0212	.0200	.0192	.0188	.0183	.0182
Si	.0435	.0300	.0286	.0291	.0293	.0290	.0290	.0282	.0274	.0263	.0252	.0236	.0217	.0206	.0198	.0194	.0190	.0189
P	.0501	.0315	.0292	.0289	.0290	.0290	.0287	.0280	.0271	.0260	.0250	.0234	.0216	.0206	.0200	.0197	.0194	.0195
S	.0601	.0351	.0310	.0301	.0301	.0300	.0298	.0288	.0279	.0268	.0258	.0242	.0224	.0215	.0209	.0206	.0206	.0206
Ar	.0729	.0368	.0302	.0278	.0274	.0272	.0270	.0260	.0252	.0242	.0233	.0220	.0206	.0199	.0195	.0195	.0194	.0197
K	.0909	.0433	.0340	.0304	.0298	.0295	.0291	.0282	.0272	.0261	.0251	.0237	.0222	.0217	.0214	.0212	.0215	.0219
Ca	.111	.0489	.0367	.0318	.0309	.0304	.0300	.0290	.0279	.0268	.0258	.0244	.0230	.0225	.0222	.0223	.0225	.0231
Fe	.225	.0810	.0489	.0340	.0307	.0294	.0287	.0274	.0261	.0250	.0242	.0231	.0224	.0224	.0227	.0231	.0239	.0250
Cu	.310	.107	.0594	.0368	.0316	.0296	.0286	.0271	.0260	.0247	.0237	.0229	.0223	.0227	.0231	.0237	.0248	.0261
Mo	.922	.294	.141	.0617	.0422	.0348	.0315	.0281	.0263	.0248	.0239	.0233	.0237	.0250	.0262	.0274	.0296	.0316
Sn	1.469	.471	.222	.0873	.0534	.0403	.0346	.0294	.0268	.0248	.0239	.0233	.0243	.0259	.0276	.0291	.0316	.0339
I	1.726	.557	.260	.100	.0589	.0433	.0366	.0303	.0274	.0252	.0241	.0236	.0247	.0265	.0283	.0299	.0327	.0353
W	4.112	1.356	.631	.230	.121	.0786	.0599	.0426	.0353	.0302	.0281	.0271	.0287	.0311	.0335	.0355	.0390	.0426
Pt	4.645	1.556	.719	.262	.138	.0892	.0666	.0465	.0375	.0315	.0293	.0280	.0296	.0320	.0343	.0365	.0400	.0438
Tl	5.057	1.717	.791	.285	.152	.0972	.0718	.0491	.0393	.0326	.0301	.0288	.0304	.0326	.0349	.0354	.0406	.0446
Pb	5.193	1.753	.821	.294	.156	.0994	.0738	.0505	.0402	.0332	.0306	.0293	.0305	.0330	.0352	.0373	.0412	.0450
U	9.63	2.337	1.096	.392	.208	.132	.0968	.0628	.0482	.0383	.0346	.0324	.0332	.0352	.0374	.0394	.0443	.0474
Air	.0233	.0251	.0268	.0288	.0296	.0297	.0296	.0289	.0280	.0268	.0256	.0238	.0211	.0194	.0181	.0172	.0160	.0153
NaI	1.466	.476	.224	.0889	.0542	.0410	.0354	.0299	.0273	.0253	.0242	.0235	.0241	.0254	.0268	.0281	.0303	.0325
H ₂ O	.0253	.0278	.0300	.0321	.0328	.0330	.0329	.0321	.0311	.0298	.0285	.0264	.0233	.0213	.0198	.0188	.0173	.0165
Concrete	.0416	.0300	.0289	.0294	.0297	.0296	.0295	.0287	.0278	.0272	.0256	.0239	.0216	.0203	.0194	.0188	.0180	.0177
Tissue	.0271	.0282	.0293	.0312	.0317	.0320	.0319	.0311	.0300	.0288	.0276	.0256	.0220	.0206	.0192	.0182	.0168	.0160

Esercizio 1

Calcolare il coefficiente di attenuazione massico per l'ossido di Uranio (UO_2) per fotoni da 10 MeV. La densità dello UO_2 è 10 g/cm^3 .

$$\left(\frac{\mu}{\rho}\right)_U = 0.0519 \text{ cm}^2/\text{g} \quad \left(\frac{\mu}{\rho}\right)_O = 0.0209 \text{ cm}^2/\text{g}$$

$$p_U = \frac{238}{238 + 2 \cdot 16} = \frac{238}{270} = 0.88$$

$$p_O = \frac{2 \cdot 16}{238 + 2 \cdot 16} = \frac{32}{270} = 0.12$$

$$\left(\frac{\mu}{\rho}\right)_{\text{UO}_2} = p_U \cdot \left(\frac{\mu}{\rho}\right)_U + p_O \cdot \left(\frac{\mu}{\rho}\right)_O = 0.88 \cdot 0.0519 + 0.12 \cdot 0.0209 = 0.0482 \text{ cm}^2/\text{g}$$

$$\text{pertanto: } \mu_{\text{UO}_2} = \rho_{\text{UO}_2} \cdot \left(\frac{\mu}{\rho}\right)_{\text{UO}_2} = 0.482 \text{ cm}^{-1}$$

$$\lambda_{\text{UO}_2} = \frac{1}{\mu_{\text{UO}_2}} = 2.08 \text{ cm}$$

Esercizio 2

Un fascio parallelo di fotoni da 2 MeV di intensità di flusso (fluenza) $\Phi = 10^6 \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}$ incide su uno schermo di piombo di spessore 10 cm. Calcolare l'intensità di flusso di fotoni che hanno interagito.

Alla profondità x il numero di fotoni che non hanno ancora interagito è data dalla solita legge esponenziale: $N(x) = N_0 \cdot e^{-\mu x}$. Il numero ΔN di fotoni che hanno interagito sarà pertanto dato dalla differenza:

$$\Delta N = N_0 - N(x) = N_0(1 - e^{-\mu x})$$

in questo caso abbiamo: $\mu / \rho = 0.0461 \text{ cm}^2/\text{g}$ e $\rho = 11.3 \text{ g/cm}^3$

dai dati si ricava $\mu = 0.521 \text{ cm}^{-1}$ e quindi $\mu x = 5.21$

Sostituendo: $\Delta N = N_0(1 - e^{-\mu x}) = 10^6 \cdot (1 - e^{-5.21}) = 10^6 \cdot (1 - 0.0055) = 9.945 \cdot 10^5$.

Esercizio 3

Calcolare il libero cammino medio di fotoni di energia 0.01 MeV, 0.1 MeV, 1 MeV e 10 MeV in aria, acqua, muscolo, osso calcestrutto e piombo.

$$\lambda = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\frac{\mu}{\rho} \cdot \rho}$$

aria

E_γ	$\mu / \rho \text{ (cm}^2/\text{g)}$	$\rho \text{ (g/cm}^3)$	$\lambda \text{ (cm)}$
10 keV	4.98	$1.3 \cdot 10^{-3}$	154.5
100 keV	0.155	$1.3 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^3$
1 MeV	0.0635	$1.3 \cdot 10^{-3}$	$1.2 \cdot 10^4$
10 MeV	0.0203	$1.3 \cdot 10^{-3}$	$3.8 \cdot 10^4$

acqua

E_γ	$\mu / \rho \text{ (cm}^2/\text{g)}$	$\rho \text{ (g/cm}^3)$	$\lambda \text{ (cm)}$
10 keV	5.18	1	0.19
100 keV	0.176	1	5.85
1 MeV	0.0706	1	14.2
10 MeV	0.0220	1	45.5

muscolo

E_γ	$\mu / \rho \text{ (cm}^2/\text{g)}$	$\rho \text{ (g/cm}^3)$	$\lambda \text{ (cm)}$
10 keV	5.27	1	0.19
100 keV	0.17	1	5.9
1 MeV	0.07	1	14.3
10 MeV	0.0219	1	45.7

osso

E_γ	μ / ρ (cm ² /g)	ρ (g/cm ³)	λ (cm)
10 keV	20.3	1.85	0.027
100 keV	0.18	1.85	3.0
1 MeV	0.0676	1.85	8.0
10 MeV	0.0226	1.85	23.9

calcestruzzo

E_γ	μ / ρ (cm ² /g)	ρ (g/cm ³)	λ (cm)
10 keV	23.5	2.3	0.0185
100 keV	0.175	2.3	2.48
1 MeV	0.0640	2.3	6.79
10 MeV	0.0227	2.3	19.15

piombo

E_γ	μ / ρ (cm ² /g)	ρ (g/cm ³)	λ (cm)
10 keV	142	11.3	$6.0 \cdot 10^{-4}$
100 keV	5.73	11.3	$1.5 \cdot 10^{-2}$
1 MeV	0.0704	11.3	1.26
10 MeV	0.0487	11.3	1.83

Esercizio 4

Si supponga di avere due fasci di fotoni, entrambi di intensità $I = 10^7 \text{ s}^{-1}$, aventi energie di 0.5 MeV e di 10 MeV. Calcolare per i due fasci i rispettivi spessori di Al, Fe, Pb e calcestruzzo che riducono l'intensità del fascio primario di un fattore 100 (cioè $I' = 10^5 \text{ s}^{-1}$).

Si supponga di avere una sorgente di ^{60}Co , che emette per ogni decadimento due fotoni di rispettive energie $E_1 = 1.17 \text{ MeV}$ ed $E_2 = 1.33 \text{ MeV}$. Per gli stessi materiali calcolare lo spessore che riduce l'intensità dei fotoni di un fattore 1000. A questo proposito, essendo le energie dei due fotoni abbastanza simili, possiamo considerare il loro valor medio ($E = 1.25 \text{ MeV}$) ai fini dell'attenuazione nei materiali. L'attenuazione dei fotoni, qualsiasi sia la loro energia, è data dalla relazione: $N(x) = N_0 e^{-\mu x}$

Lo spessore x è allora dato da:

$$x = \frac{1}{\mu} \ln \frac{N_0}{N(x)} = \frac{2.31}{\mu} \log_{10} \frac{N_0}{N(x)} = \frac{2.31}{\frac{\mu}{\rho} \rho} \log_{10} \frac{N_0}{N(x)}$$

Al

E_γ	μ / ρ (cm ² /g)	ρ (g/cm ³)	$N_0/N(x)$	x (cm)
0.5 MeV	0.084	2.7	10^2	20.3
10 MeV	0.0229	2.7	10^2	74.4

1.25 MeV (^{60}Co)	0.0548	2.7	10^3	46.5
-------------------------------	--------	-----	--------	------

Fe

E_γ	μ / ρ (cm ² /g)	ρ (g/cm ³)	$N_0/N(x)$	x (cm)
0.5 MeV	0.0828	7.85	10^2	7.08
10 MeV	0.0284	7.85	10^2	19.93
1.25 MeV (^{60}Co)	0.0531	7.85	10^3	16.55

Pb

E_γ	μ / ρ (cm ² /g)	ρ (g/cm ³)	$N_0/N(x)$	x (cm)
0.5 MeV	0.145	11.3	10^2	2.81
10 MeV	0.0489	11.3	10^2	8.32
1.25 MeV (^{60}Co)	0.0569	11.3	10^3	10.73

calcestruzzo

E_γ	μ / ρ (cm ² /g)	ρ (g/cm ³)	$N_0/N(x)$	x (cm)
0.5 MeV	0.087	2.3	10^2	23.0
10 MeV	0.0229	2.3	10^2	87.34
1.25 MeV (^{60}Co)	0.0567	2.3	10^3	52.91

Esercizio 5

La sezione d'urto dell'effetto fotoelettrico nel piombo per fotoni da $E_\gamma = 0.6$ MeV vale circa 18 barn. Valutare il valore della sezione d'urto nell'Uranio alla stessa energia.

Sappiamo che la sezione d'urto fotoelettrica in funzione del numero atomico del materiale e dell'energia del fotone ha un andamento del tipo:

$$\sigma \propto Z^n \cdot E^{-m}, \text{ dove } n = 4 \div 4.5 \text{ e } m = 3 \div 3.5$$

pertanto sarà:

$$\sigma_U \approx \sigma_{\text{Pb}} \cdot \left(\frac{Z_U}{Z_{\text{Pb}}} \right)^{4+4.5} = 18 \cdot \left(\frac{92}{82} \right)^{4+4.5} = 18 \cdot (1.58 \div 1.68) = 28 \div 30 \text{ barn}$$

Esercizio 6

Un fotone di energia $E_\gamma = 2$ MeV è diffuso a $\vartheta = 30^\circ$ per effetto Compton. Calcolare:

- 1) l'energia del fotone diffuso;
- 2) l'energia di rinculo dell'elettrone;
- 3) l'angolo a cui rincula l'elettrone.

$$E'_\gamma = \frac{E_\gamma}{1 + \frac{E_\gamma}{m}(1 - \cos \vartheta)} = \frac{2}{1 + \frac{2}{0.511}(1 - \cos 30^\circ)} = 1.312 \text{ MeV}$$

Per la conservazione dell'energia: $T_e = E_\gamma - E'_\gamma = 0.688$ MeV

Si tratta di un elettrone relativistico: la sua quantità di moto risulta:

$$p_e = \sqrt{T_e \cdot (T_e + 2m_e)} = 1.085 \text{ MeV}$$

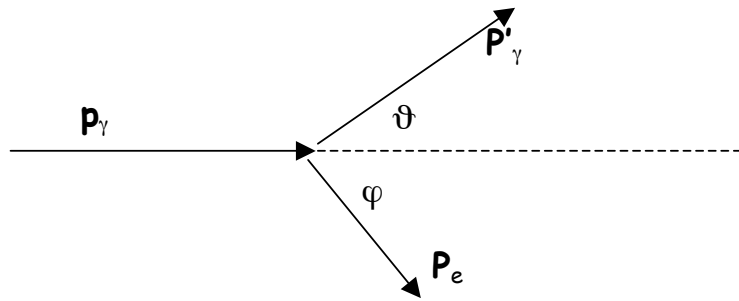


Fig 13.4 il diagramma dei momenti nell'effetto Compton

$\mathbf{p}_\gamma = \mathbf{p}'_\gamma + \mathbf{p}_e$ che proiettata dà le due relazioni:

$$p_\gamma = p'_\gamma \cos \vartheta + p_e \cos \varphi$$

$$p'_\gamma \sin \vartheta = p_e \sin \varphi$$

dalle quali si ricava: $\varphi = \arcsin\left(\frac{p'_\gamma}{p_e} \sin \vartheta\right) = \arcsin\left(\frac{1.312}{1.085} \sin 30^\circ\right) = 37.2^\circ$.

Esercizio 7

Calcolare il coefficiente di attenuazione massico nel vetro (SiO_2 , $\rho = 2.21 \text{ g/cm}^3$) per fotoni di $E_\gamma = 3 \text{ MeV}$ ed il relativo libero cammino medio.

$$\left(\frac{\mu}{\rho}\right)_{\text{Si}} = 0.0367 \text{ cm}^2/\text{g} \quad \left(\frac{\mu}{\rho}\right)_{\text{O}} = 0.0359 \text{ cm}^2/\text{g}$$

$$p_{\text{Si}} = \frac{28}{28 + 2 \cdot 16} = \frac{28}{60} = 0.467$$

$$p_{\text{O}} = \frac{2 \cdot 16}{28 + 2 \cdot 16} = \frac{32}{60} = 0.533$$

$$\left(\frac{\mu}{\rho}\right)_{\text{SiO}_2} = p_{\text{Si}} \cdot \left(\frac{\mu}{\rho}\right)_{\text{Si}} + p_{\text{O}} \cdot \left(\frac{\mu}{\rho}\right)_{\text{O}} = 0.467 \cdot 0.0367 + 0.533 \cdot 0.0359 = 0.0363 \text{ cm}^2/\text{g}$$

pertanto: $\mu_{\text{SiO}_2} = \rho_{\text{SiO}_2} \cdot \left(\frac{\mu}{\rho}\right)_{\text{SiO}_2} = 0.0802 \text{ cm}^{-1}$; $\lambda_{\text{SiO}_2} = \frac{1}{\mu_{\text{SiO}_2}} = 11.45 \text{ cm}$

Esercizio 8

Un fascio di fotoni di 1 cm di raggio di energia $E_\gamma = 0.8 \text{ MeV}$ e intensità di flusso $\Phi = 3 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$ incide su una lastra di ferro di spessore 2 cm ($\rho = 7.86 \text{ g/cm}^3$). Calcolare il numero di fotoni che interagiscono nel ferro per secondo e la potenza perduta dal fascio.

$$\mu / \rho = 0.0664 \text{ cm}^2/\text{g}; \quad \mu = 0.519 \text{ cm}^{-1}$$

L'intensità iniziale del fascio è: $N_0 = \Phi \cdot \pi r^2 = 9.4 \cdot 10^{11} \text{ s}^{-1}$.

Il numero di fotoni che interagiscono è:

$$N_{\text{int}} = N_0(1 - e^{-\mu x}) = 9.4 \cdot 10^{11} \cdot (1 - e^{-0.519 \cdot 2}) = 9.4 \cdot 10^{11} \cdot (1 - 0.354) = 6.07 \cdot 10^{11} \text{ s}^{-1}$$

Per calcolare invece l'energia depositata si usa il coefficiente di assorbimento μ_{en} , che per fotoni di 0.8 MeV nel ferro vale: $\mu_{\text{en}} / \rho = 0.0274 \text{ cm}^2/\text{g}$; $\mu_{\text{en}} = 0.2154 \text{ cm}^{-1}$.

Pertanto:

$$W_{\text{dep}} = E_\gamma \cdot N_{\text{int}} = E_\gamma N_0 (1 - e^{-\mu_{\text{en}} x}) = 0.8 \cdot 9.4 \cdot 10^{11} \cdot (1 - e^{-0.2154 \cdot 2}) = 1.46 \cdot 10^{11} \text{ MeV/s}$$

Convertendo l'energia in joule si ottiene: $W_{\text{dep}} = 0.023 \text{ Watt} = 23 \text{ mWatt}$.

Esercizio 9

Calcolare la minima energia di un fotone diffuso per effetto Compton se la sua energia iniziale vale 0.1, 1, 10 e 100 MeV.

Dalla formula:
$$E'_\gamma = \frac{E_\gamma}{1 + \frac{E_\gamma}{m_e c^2} (1 - \cos \vartheta)}$$

L'energia minima è in corrispondenza di una diffusione a $\vartheta = 180^\circ$:

$$E'_\gamma{}^{\text{min}} = \frac{E_\gamma}{1 + 2 \frac{E_\gamma}{m_e c^2}} = \frac{m_e c^2}{2 + \frac{m_e c^2}{E_\gamma}}$$

dalla formula si vede che per $E_\gamma \gg m_e$ si ha che $E'_\gamma{}^{\text{min}} \approx m_e c^2 / 2$.

In particolare, per i valori dell'esercizio:

E_γ (MeV)	$E'_\gamma{}^{\text{min}}$ (MeV)
0.1	0.0718
1	0.2035
10	0.2491
100	0.2548

Capitolo 14

Interazione radiazione-materia: i neutroni

14.1 Interazione dei neutroni con la materia

Poiché il neutrone ha carica nulla esso non interagisce elettricamente con gli elettroni dell'atomo, sa subisce solo interazioni nucleari con i nuclei della materia attraversata. I principali tipi di interazione neutrone-nucleo sono i seguenti:

14.2 Diffusione elastica

In questo processo il neutrone urta il nucleo e viene diffuso secondo le leggi della dinamica dell'urto. Nella trattazione non relativistica dell'urto tra neutrone e nucleo, considerati un sistema isolato, si conservano quantità di moto ed energia cinetica. Il neutrone non eccita il nucleo, che generalmente era e rimane nel suo stato fondamentale. Tali reazioni si indicano con $X(n,n)X$ o semplicemente con (n,n) . A bassa energia la sezione d'urto è costante. Essa vale:

$$\sigma_s = 4 \cdot \pi \cdot R^2$$

dove R è il raggio del nucleo. In prima approssimazione dipende quindi dall'elemento come $A^{2/3}$. Dopo questa zona costante la sezione d'urto comincia a decrescere, ma si incontra una regione di risonanze, dovute alla formazione del nucleo composto. In figura 14.1 è riportata la sezione d'urto nel caso del ^{12}C . Per nuclei più pesanti la regione delle risonanze si sposta ad energie più basse: per esempio nel caso dello ^{238}U la zona delle risonanze comincia a 6 eV e finisce intorno ad 1 keV.

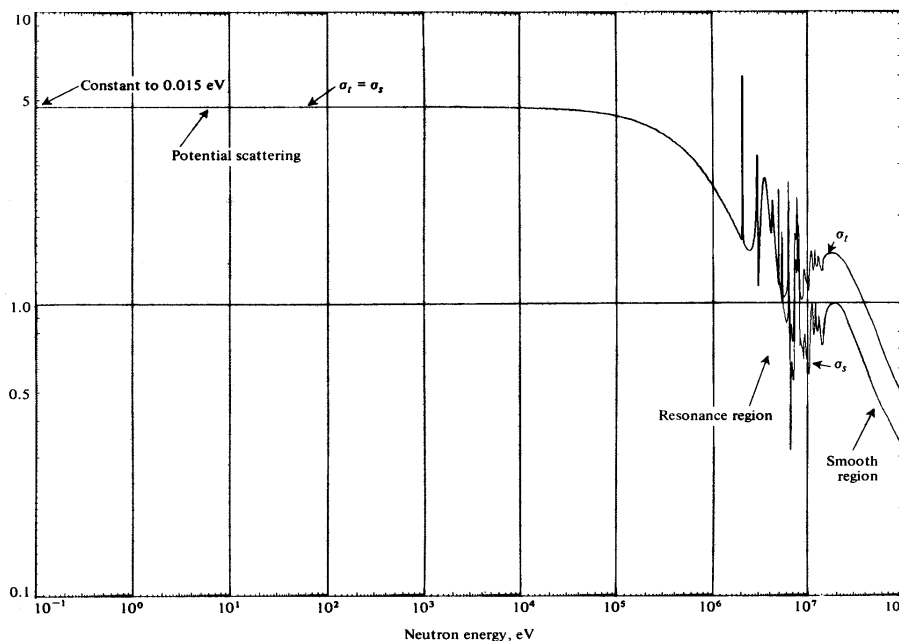


Fig 14.1 sezione d'urto di interazione neutroni - ^{12}C

14.3 Diffusione inelastica

Questo processo è identico al precedente eccetto che il nucleo è lasciato in uno stato eccitato e quindi decadrà successivamente emettendo in genere un fotone. Il processo si indica con $X(n,n')X^*$. Questo processo ha una soglia, che coincide con l'energia del primo stato eccitato del nucleo e che diminuisce all'aumentare di A . Per il ^{12}C questa soglia è pari a 4.43 MeV, mentre nello ^{238}U essa scende a soli 44 keV. Al di sopra della soglia, l'andamento della sezione d'urto è simile a quello della diffusione elastica.

14.4 Cattura radiativa

In questo processo il neutrone è catturato dal nucleo. Il nucleo si trova in uno stato eccitato e decadrà emettendo uno o più fotoni. Molto spesso il nucleo ottenuto, anche dopo essere decaduto al suo stato fondamentale, è instabile per decadimento beta. A bassa energia la sezione d'urto di questo processo ha il tipico andamento $1/v$ (ossia $1/\sqrt{E}$) e si presenta quindi come una retta di pendenza $-\frac{1}{2}$ in scala bi-logaritmica. Presenta risonanze nello stesso intervallo energetico delle risonanze della diffusione elastica (e anche ad energie maggiori) poi, al di sopra della zona delle risonanze decade velocemente e con continuità. Nella figura 14.2 è riportata la sezione d'urto per il ^{197}Au .

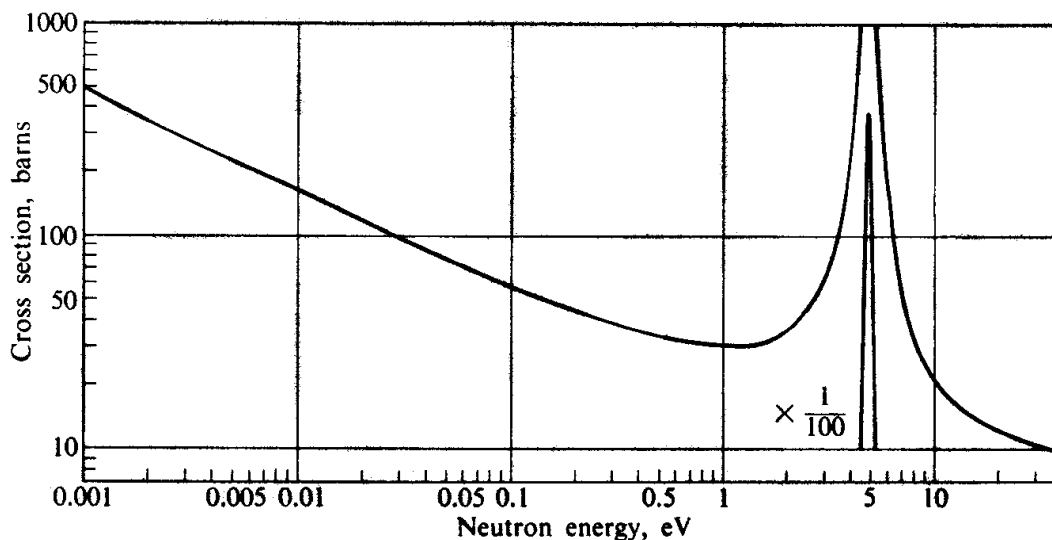


Fig 14.2 sezione d'urto di cattura (n,γ) su ^{197}Au

14.5 Reazioni con emissione di particelle cariche

In questo caso il neutrone viene assorbito e come risultato possono essere emessi protoni, particelle alfa, ecc.ecc. Tali processi si schematizzano con (n,p), (n, α), e così via. In questo caso la sezione d'urto dipende molto da reazione a reazione. L'andamento più tipico si ha per le reazioni (n, α), quale ad esempio la $^{10}\text{B} (n,\alpha) ^7\text{Li}$ e $^6\text{Li} (n,\alpha) ^3\text{H}$ dove si ha un vasto intervallo energetico di andamento $1/v$ (lineare in carta logaritmica). Nella figura 14.3 è riportata appunto la sezione d'urto della reazione $^{10}\text{B} (n,\alpha) ^7\text{Li}$.

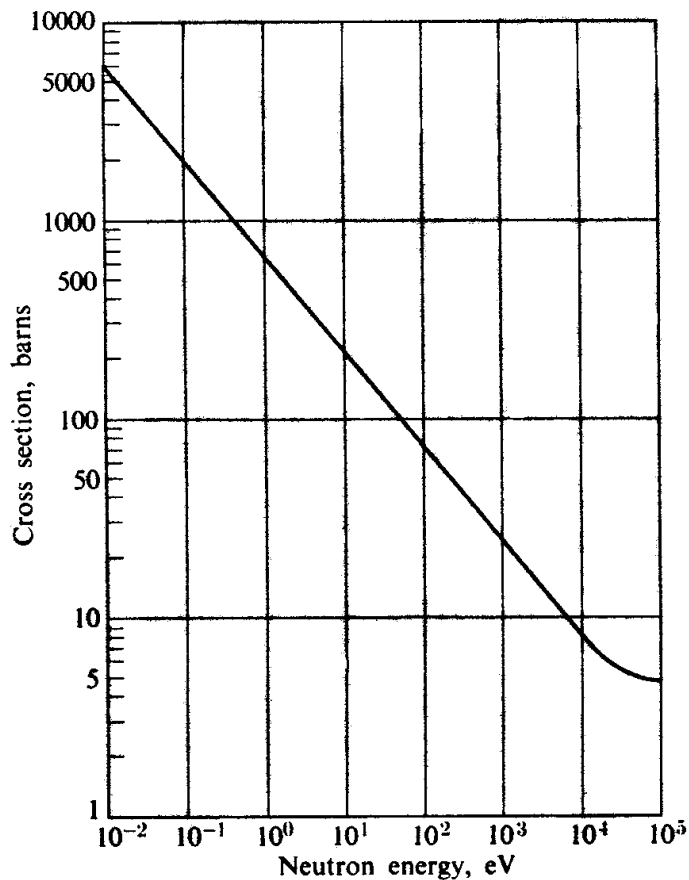


Fig 14.3 sezione d'urto della reazione $^{10}\text{B} (n,\alpha) ^7\text{Li}$

14.6 Reazioni con emissione di neutroni

In questo caso, a seguito dell'assorbimento del neutrone, il nucleo può emettere due o più neutroni. Si parla allora di reazioni (n,2n), (n,3n). Esempi tipici sono:



In entrambi i casi il neutrone appartenente al nucleo era già di per sé poco legato.

14.7 Fissione

Il neutrone urta contro un nucleo pesante e lo spezza in due frammenti, come abbiamo visto diffusamente nel capitolo 9.

14.8 Interazione dei neutroni con la materia

Da quanto visto precedentemente, la sezione d'urto totale (cioè la somma delle diverse sezioni d'urto elencate) per basse energie del neutrone si può esprimere con la formula approssimata:

$$\sigma_{\text{tot}} = 4\pi R^2 + \frac{C}{\sqrt{E}} \quad (1)$$

Ad energie superiori si incontra la zona delle risonanze dovute ai processi di scattering elastico e inelastico e alla cattura radiativa. Ad energie ancora più alte la sezione d'urto torna ad avere un andamento più regolare e velocemente decrescente con l'energia.

Attenuazione dei neutroni

Sia N_0 il numero di neutroni che incidono su un materiale e $n(x)$ il numero di neutroni che non hanno interagito dopo aver attraversato uno spessore x . La variazione infinitesima $dN(x)$ nel tratto compreso tra x e $x+dx$ risulta data dall'espressione:

$$dN = -\Sigma_{\text{t}} \cdot N(x) \cdot dx$$

dove il fattore di proporzionalità Σ_{t} (coefficiente di attenuazione) rappresenta come nel caso dei fotoni la probabilità di interazione per unità di percorso e si chiama sezione d'urto macroscopica. Anche in questo caso si definisce un libero cammino medio dato da: $\lambda = 1/\Sigma_{\text{t}}$.

L'integrazione fornisce la solita espressione:

$$N(x) = N_0 \cdot \exp(-\Sigma_{\text{t}} \cdot x).$$

La sezione d'urto macroscopica è legata alle sezioni d'urto microscopiche σ_j relative ai vari processi di interazione dalla seguente espressione:

$$\Sigma_{\text{t}} = N \cdot \sum_j \sigma_j$$

dove N rappresenta il numero di nuclei per unità di volume.

Se un mezzo omogeneo contiene N_1 nuclei per unità di volume di tipo 1, N_2 nuclei per unità di volume di tipo 2 e così via, si scriverà invece:

$$\Sigma_{\text{t}} = \sum_{i=1}^{n_{\text{elem}}} \left(N_i \sum_{j=1}^{n_{\text{int. enz}}} \sigma_{ij} \right)$$

dove σ_{ij} rappresenta la sezione d'urto relativa all'interazione di tipo "j" (scattering elastico, inelastico, cattura, fissione,....) con il nucleo di tipo "i".

Dopo quanto detto precedentemente, e dalla relazione approssimata (1) si deduce che la sezione d'urto (ossia la probabilità) di interazione dei neutroni con la materia aumenta al diminuire della loro energia. Una tecnica usata nella pratica per

assorbire i neutroni (per esempio nel progetto di una schermatura) è quella di rallentarli mediante scattering elastico con materiali leggeri e poi assorbirli (e quindi eliminarli) tramite qualche reazione di cattura (n,γ) o, meglio, (n,α): in quest'ultimo caso non vengono prodotti fotoni, difficili da schermare, ma particelle α facilmente arrestabili.

14.9 Energia perduta dai neutroni nell'urto elastico

Dalla conservazione della quantità di moto risulta: $\mathbf{p} = \mathbf{p}' + \mathbf{P}$

dove \mathbf{p} e \mathbf{p}' rappresentano la quantità di moto del neutrone prima e dopo l'urto e \mathbf{P} il rinculo del nucleo.

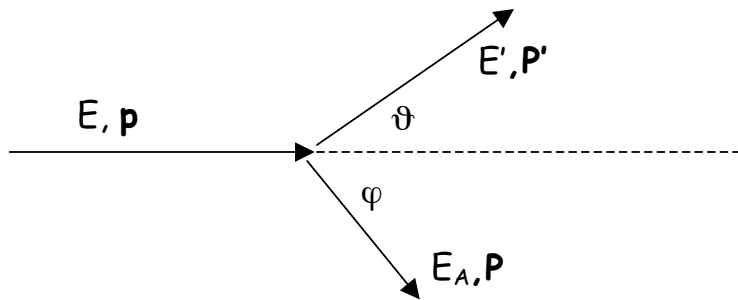


Fig. 14.4 il diagramma dei momenti nell'urto elastico

Analizzando la figura 14.4 si ricava:

$$p^2 = p'^2 + P^2 - 2 \cdot p \cdot p' \cdot \cos \vartheta \quad (2)$$

Dalla conservazione dell'energia cinetica: $\frac{p^2}{2m} = \frac{p'^2}{2m} + \frac{P^2}{2M}$, avendo indicato con m e M

rispettivamente la massa del neutrone e del nucleo bersaglio. Scrivendo, con una lieve approssimazione: $A = M/m$ si ha:

$$p^2 = A \cdot (p^2 - p'^2)$$

Che, sostituito nella (2) fornisce la relazione tra p e p' , che scriviamo nel seguente modo:

$$\frac{p'}{p} = \frac{\left(\cos \vartheta + \sqrt{A^2 - \sin^2 \vartheta} \right)}{A + 1} \quad (3)$$

dove abbiamo ovviamente considerato la sola soluzione positiva.

Se indichiamo con T e T' l'energia cinetica del neutrone prima e dopo l'urto, esse sono ovviamente legate dalla relazione: $T' = \frac{T}{(A + 1)^2} \left(\cos \vartheta + \sqrt{A^2 - \sin^2 \vartheta} \right)^2$

La figura 14.5 rappresenta l'andamento del rapporto p'/p in funzione dell'angolo ϑ per alcuni valori di A . Risulta evidente come solo nuclei leggeri (idrogeno e deuterio) sono in grado di degradare significativamente l'energia del neutrone incidente, e questo avviene per angoli di scattering all'indietro. Dalla figura si vede che nel solo

caso di un urto con l'idrogeno, per la meccanica classica (essendo le due masse uguali) $\vartheta_{\min} = \pi / 2$

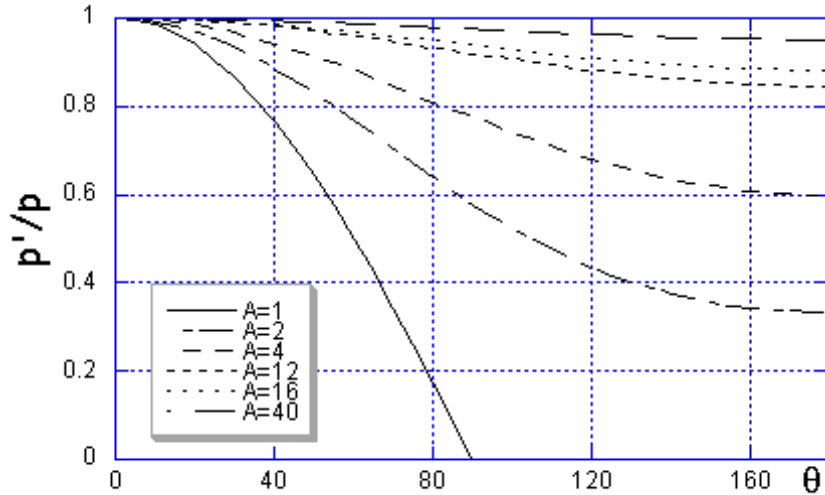


Fig. 14.4 andamento del rapporto p'/p in funzione dell'angolo di scattering per vari valori di A

In termini di energia cinetica, per $\vartheta = \pi$ abbiamo: $T'(\pi) = T'_{\min} = T \cdot \left(\frac{A-1}{A+1} \right)^2 = \alpha \cdot T$

dove α è detto parametro di collisione.

Dalla tabella 14.1 che segue appare come materiali leggeri siano estremamente più convenienti quando si vogliono rallentare i neutroni

nuclide	A	$\alpha = (A-1)^2 / (A+1)^2$
H	1	0
^2H	2	0.111
^9Be	9	0.640
^{12}C	12	0.716
^{16}O	16	0.779
^{23}Na	23	0.840
^{56}Fe	56	0.931
^{238}U	238	0.983

Tab. 14.1

Element or molecule	Symbol	Atomic number	Atomic or molecular weight*	Nominal density, g/cm ³	Atoms or molecules per cm ³ † (× 10 ²⁴)	σ _{at} ‡ barns	σ _m ‡ barns	Σ _{at} † cm ⁻¹	Σ _m † cm ⁻¹
Actinium	Ac	89	227			515			
Aluminum	Al	13	26.9815	2.699	0.06024	0.230	1.49	0.01386	0.08976
Antimony	Sb	51	121.75	6.62	0.03275	5.4	4.2	0.1769	0.1376
Argon	Ar	18	39.948	Gas		0.678	0.644		
Arsenic	As	33	74.9216	5.73	0.04606	4.3	7	0.1981	0.3224
Barium	Ba	56	137.34	3.5	0.01535	1.2		0.01842	
Beryllium	Be	4	9.0122	1.85	0.1236	0.0092	6.14	0.001137	0.7589
Bismuth	Bi	83	208.980	9.80	0.02824	0.033		0.0009319	
Boron	B	5	10.811	2.3	0.1281	759	3.6	97.23	0.4612
Bromine	Br	35	79.909	3.12	0.02351	6.8	6.1	0.1599	0.1434
Cadmium	Cd	48	112.40	8.65	0.04635	2450	5.6	113.56	0.2596
Calcium	Ca	20	40.08	1.55	0.02329	0.43		0.01001	
Carbon (graphite)§	C	6	12.01115	1.60	0.08023	0.0034	4.75	0.0002728	0.3811
Cerium	Ce	58	140.12	6.78	0.02914	0.63	4.7	0.01836	0.1370
Cesium	Cs	55	132.905	1.9	0.008610	29.0		0.2497	
Chlorine	Cl	17	35.453	Gas		33.2			
Chromium	Cr	24	51.996	7.19	0.08328	3.1	3.8	0.2582	0.3165
Cobalt	Co	27	58.9332	8.8	0.08993	37.2	6.7	3.345	0.6025
Copper	Cu	29	63.54	8.96	0.08493	3.79	7.9	0.3219	0.6709
Deuterium	D	1	2.01410	Gas		0.00053			
Dysprosium	Dy	66	162.50	8.56	0.03172	930	100	29.50	3.172
Erbium	Er	68	167.26	9.16	0.03203	162	11.0	5.189	0.3523
Europium	Eu	63	151.96	5.22	0.02069	4600	8.0	95.17	0.1655
Fluorine	F	9	18.9984	Gas		0.0095	4.0		

Tab. 14.2

Gadolinium	Gd	64	157.25	7.95	0.03045	49000		1492	
Gallium	Ga	31	69.72	5.91	0.05105	2.9	6.5	0.1480	0.3318
Germanium	Ge	32	72.59	5.36	0.04447	2.3	7.5	0.1023	0.3335
Gold	Au	79	196.967	19.32	0.05907	98.8		5.836	
Hafnium	Hf	72	178.49	13.36	0.04508	102	8	4.598	0.3606
Heavy water¶	D ₂ O		20.0276	1.105	0.03323	0.00133	13.6	4.420 × 10 ⁻⁵	0.4519
Helium	He	2	4.0026	Gas		<0.05			
Holmium	Ho	67	164.930	8.76	0.03199	66.5	9.4	2.127	0.3007
Hydrogen	H	1	1.00797	Gas		0.332			
Indium	In	49	114.82	7.31	0.03834	193.5		7.419	
Iodine	I	53	126.9044	4.93	0.02340	6.2		0.1451	
Iridium	Ir	77	192.2	22.5	0.07050	426	14	30.03	0.9870
Iron	Fe	26	55.847	7.87	0.08487	2.55	10.9	0.2164	0.9251
Krypton	Kr	36	83.80	Gas		25.0	7.50		
Lanthanum	La	57	138.91	6.19	0.02684	9.0	9.3	0.2416	0.2496
Lead	Pb	82	207.19	11.34	0.03296	0.170	11.4	0.005603	0.3757
Lithium	Li	3	6.942	0.53	0.04600	70.7		3.252	
Lutetium	Lu	71	174.97	9.74	0.03353	77	8	2.581	0.2682
Magnesium	Mg	12	24.312	1.74	0.04310	0.063	3.42	0.002715	0.1474
Manganese	Mn	25	54.9380	7.43	0.08145	13.3	2.1	1.083	0.1710
Mercury	Hg	80	200.59	13.55	0.04068	375		15.26	
Molybdenum	Mo	42	95.94	10.2	0.06403	2.65	5.8	0.1697	0.3714
Neodymium	Nd	60	144.24	6.98	0.02914	50.5	16	1.472	0.4662
Neon	Ne	10	20.183	Gas		0.038	2.42		
Nickel	Ni	28	58.71	8.90	0.09130	4.43	17.3	0.4045	1.579
Niobium	Nb	41	92.906	8.57	0.05555	1.15		0.06388	
Nitrogen	N	7	14.0067	Gas		1.85	10.6		
Osmium	Os	76	190.2	22.5	0.07124	15.3		1.090	
Oxygen	O	8	15.9994	Gas		0.00027	3.76		
Palladium	Pd	46	106.4	12.0	0.06792	6.9	0	0.4686	0.3396
Phosphorus (yellow)	P	15	30.9738	1.82	0.03539	0.180		0.006370	

Tab. 14.3

Element or molecule	Symbol	Atomic number	Atomic or molecular weight*	Nominal density, g/cm ³	Atoms or molecules per cm ³ † (× 10 ²⁴)	$\sigma_{a,\dagger}$ barns	σ_s † barns	$\Sigma_{a,\dagger}$ cm ⁻¹	$\Sigma_{s,\dagger}$ cm ⁻¹
Platinum	Pt	78	195.09	21.45	0.06622	10.0	11.2	0.6622	0.7167
Plutonium	Pu	94	239.0522	19.6	0.04938	$\sigma_a = 1011.3$ $\sigma_t = 742.5$	7.7	49.93	0.3802
Polonium	Po	84	210	9.51	0.02727		36.66		
Potassium	K	19	39.102	0.86	0.01325	2.10	1.5	0.02783	0.01988
Praseodymium	Pr	59	140.907	6.78	0.02898	11.5	3.3	0.3333	0.09563
Promethium	Pm	61							
Protactinium	Pa	91	231.0359			210			
Radium	Ra	88	226.0254	5.0	0.01332	11.5		0.1532	
Rhenium	Re	75	186.2	20	0.06596	88	11.3	5.804	0.7453
Rhodium	Rh	45	102.905	12.41	0.07263	150		10.89	
Rubidium	Rb	37	85.47	1.53	0.01078	0.37	6.2	0.003989	0.06684
Ruthenium	Ru	44	101.07	12.2	0.07270	2.56		0.1861	
Samarium	Sm	62	150.35	6.93	0.02776	5800		161.0	
Scandium	Sc	21	44.956	2.5	0.03349	26.5	24	0.8875	0.8038
Selenium	Se	34	78.96	4.81	0.03669	11.7	9.7	0.4293	0.3559
Silicon	Si	14	28.086	2.33	0.04996	0.16	2.2	0.007994	0.1099
Silver	Ag	47	107.870	10.49	0.05857	63.6		3.725	
Sodium	Na	11	22.9898	0.97	0.02541	0.530	3.2	0.01347	0.08131
Strontium	Sr	38	87.62	2.6	0.01787	1.21	10	0.02162	0.1787
Sulfur (yellow)	S	16	32.064	2.07	0.03888	0.520	0.975	0.02022	0.03791

Tab. 14.4

Tantalum	Ta	73	180.948	16.6	0.05525	21.0	6.2	1.160	0.3426
Technetium	Tc	43	99			19			
Tellurium	Te	52	127.60	6.24	0.02945	4.7		0.1384	
Terbium	Tb	65	158.925	8.33	0.03157	25.5	20	0.8050	0.6314
Thallium	Tl	81	204.37	11.85	0.03492	3.4	9.7	0.1187	0.3387
Thorium	Th	90	232.038	11.71	0.03039	7.40	12.67	0.2249	0.3850
Thulium	Tm	69	168.934	9.35	0.03314	103	12	3.413	0.3977
Tin	Sn	50	118.69	7.298	0.03703	0.63		0.02333	
Titanium	Ti	22	47.90	4.51	0.05670	6.1	4.0	0.3459	0.2268
Tungsten	W	74	183.85	19.2	0.06289	18.5		1.163	
Uranium	U	92	238.03	19.1	0.04833	$\sigma_a = 7.59$ $\sigma_t = 4.19$	8.90	0.3668	0.4301
Vanadium	V	23	50.942	6.1	0.07212		5.04	4.93	0.2025
Water	H ₂ O		18.0153	1.0	0.03343	0.664	103	0.3635	0.3556
Xenon	Xe	54	131.30	Gas		24.5	4.30	0.02220	3.443
Ytterbium	Yb	70	173.04	7.01	0.02440	36.6	25.0	0.8930	0.6100
Yttrium	Y	39	88.906	5.51	0.03733	1.28	7.60	0.04778	0.2837
Zinc	Zn	30	65.37	7.133	0.06572	1.10	4.2	0.07230	0.2760
Zirconium	Zr	40	91.22	6.5	0.04291	0.185	6.40	0.007938	0.2746

Tab. 14.5

Nelle tabelle 14.2-6 riportate sono raccolti molti dati utili per la soluzione dei problemi relativi all'interazione dei neutroni con la materia. Nelle tabelle σ_a rappresenta la sezione d'urto di assorbimento, cioè la somma delle sezioni d'urto dei canali (n, γ), (n,p), (n, α) fissione, ecc.; σ_s rappresenta invece la sezione d'urto di scattering (elastico ed inelastico). Le sezioni d'urto sono calcolate per neutroni termici ($E_n = \frac{1}{40} \text{ eV} = 0.026 \text{ eV}$)

Atomic number	Nuclide	Abundance, %	Half-life*	$\sigma_{\infty} \dagger$ barns	σ_f, \dagger barns
0	n		12 m		
1	^1H	99.985		332 mb	
	^2H	0.015		0.53 mb	
	^3H		12.33 y		
3	^6Li	7.42		940	
	^7Li	92.58		37 mb	
5	^{10}B	19.6		3837	
	^{11}B	80.4		5.5 mb	
6	^{12}C	98.89		3.4 mb	
	^{13}C	1.11		0.9 mb	
	^{14}C		5730 y		
7	^{14}N	99.63		1.88	
	^{15}N	0.37		24 μb	
8	^{16}O	99.759		0.178 mb	
	^{17}O	0.037		0.235	
	^{18}O	0.204		0.16 mb	
53	^{135}I		6.7 h		
54	^{135}Xe		9.17 h	$2.65 \times 10^6 \dagger$	
61	^{149}Pm		53.1 h		
62	^{149}Sm	13.83		41,000 \dagger	
90	^{232}Th	100	1.41×10^{10} y	7.40	
	^{233}Th		22.2 m	1515	15
92	^{233}U		1.55×10^5 y	578.8 \dagger	531.1 \dagger
	^{234}U	0.0057	2.47×10^5 y	100.2	
	^{235}U	0.72	7.13×10^8 y	680.8 \dagger	582.2 \dagger
	^{236}U		2.34×10^7 y	5.2	
	^{238}U	99.27	4.51×10^9 y	2.70 \dagger	
	^{239}U		23.5 m	36	14
94	^{239}Pu		24390 y	1011.3 \dagger	742.5 \dagger
	^{240}Pu		6540 y	289.5	0.030
	^{241}Pu		15 y	1377	1009
	^{242}Pu		3.87×10^5 y	18.5	<0.2

*m = minute, h = hour, y = year.

\dagger Cross sections at 0.0253 eV or 2200 m/sec. (From BNL-325, 3rd ed., 1973)

\ddagger Non-1/v absorber; see Table 3.2, p. 63, for non-1/v factor.

Tab. 14.6

Esercizio 1

Calcolare il cammino libero medio di neutroni termici in sodio.

Dalle tabelle risulta:

$$\sigma_{\text{tot}} = \sigma_a + \sigma_s = 3.73 \text{ barn} = 3.73 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$$

$$N = 0.02541 \cdot 10^{24} \text{ atomi/cm}^3$$

$$\Sigma_{\text{t}} = \Sigma_a + \Sigma_s = N \cdot (\sigma_a + \sigma_s) = N \cdot \sigma_{\text{tot}} = 0.0948 \text{ cm}^{-1}$$

$$\lambda = 1/\Sigma_{\text{t}} = 10.55 \text{ cm}$$

Esercizio 2

Le sezioni d'urto di assorbimento per neutroni termici ($E = 0.026 \text{ eV}$) in ^{235}U e ^{238}U valgono rispettivamente 680.8 barn e 2.70 barn.

Calcolare Σ_a per l'Uranio naturale per neutroni termici ed il cammino libero medio. Detta ϑ_i la frazione in massa dello i -esimo isotopo di peso atomico A_i risulta che:

$$A = \sum \vartheta_i A_i. \text{ Il numero di nuclei per unità di volume è al solito: } N = N_0 \frac{\rho}{A} = N_0 \frac{\rho}{\sum \vartheta_i A_i},$$

dove N_0 è il numero di Avogadro e ρ la densità dell'Uranio naturale ($\rho = 19.1 \text{ g/cm}^3$). Il numero di nuclei di tipo " i " per unità di volume allora risulta essere:

$$N_i = N \vartheta_i = N_0 \frac{\rho \vartheta_i}{\sum \vartheta_i A_i}$$

Sapendo che per l'Uranio si ha: $\vartheta_{235} = 0.72 \%$ e $\vartheta_{238} = 99.27 \%$, sostituendo i valori numerici si ottiene:

$$N_{235} = N_0 \frac{\rho \vartheta_{235}}{\sum \vartheta_i A_i} = 6 \cdot 10^{23} \frac{19.1 \cdot 7.210^{-3}}{7.210^{-3} \cdot 235 + 0.9927 \cdot 238} = 3.48 \cdot 10^{20} \text{ cm}^{-3}$$

$$N_{238} = N_0 \frac{\rho \vartheta_{238}}{\sum \vartheta_i A_i} = 6 \cdot 10^{23} \frac{19.1 \cdot 0.9927}{7.210^{-3} \cdot 235 + 0.9927 \cdot 238} = 4.78 \cdot 10^{22} \text{ cm}^{-3}$$

$$\Sigma_a = N_{235} \cdot \sigma_{235} + N_{238} \cdot \sigma_{238} = 0.367 \text{ cm}^{-1}$$

$$\lambda_a = 1/\Sigma_a = 2.72 \text{ cm}$$

Esercizio 3

Un neutrone di energia $T_n = 1 \text{ MeV}$ è diffuso elasticamente ad un angolo $\vartheta = 45^\circ$ nell'urto con un nucleo di deuterio. Calcolare l'energia del neutrone diffuso e l'energia del nucleo che rincula.

Dalla formula:

$$T'_n = \frac{T_n}{(A+1)^2} \left(\cos \vartheta + \sqrt{(A^2 - \sin^2 \vartheta)} \right)^2$$

con $T_n = 1 \text{ MeV}$, $A = 2$ e $\vartheta = 45^\circ$, si ricava:

$T'_n = 0.738 \text{ MeV}$. Poiché inoltre non vi è alcun cambio nelle masse a riposo:

$$T_A = T_n - T'_n = 0.262 \text{ MeV}$$

Esercizio 4

Il valore della sezione d'urto di cattura di neutroni termici da parte dell'idrogeno è pari a 0.332 barn . Quanto vale la sezione d'urto per neutroni di energia cinetica pari ad 1 eV ?

Poiché $\sigma \propto 1/v$ e quindi $\sigma \propto 1/\sqrt{E}$, essendo l'energia termica pari a 0.026 eV , avremo:

$$\sigma(1 \text{ eV}) = \sigma(0.026 \text{ eV}) \cdot \sqrt{\frac{0.026}{1}} = 0.053 \text{ barn}$$

Esercizio 5

Calcolare il libero cammino medio di neutroni in grafite alla energia di 1 eV, 1 keV ed 1 MeV. Le rispettive sezioni d'urto sono:

$$\sigma(1 \text{ eV}) = \sigma(1 \text{ keV}) = 4.8 \text{ barn} ; \quad \sigma(1 \text{ MeV}) = 2.6 \text{ barn}$$

$$\Sigma = N \cdot \sigma_{\text{tot}}. \quad \lambda = 1/\Sigma = 1/(N \cdot \sigma_{\text{tot}})$$

La densità della grafite è: $\rho = 1.6 \text{ g/cm}^3$.

$$N = N_0 \frac{\rho}{A} = 0.08 \cdot 10^{24} \text{ cm}^{-3}.$$

$$\lambda(1 \text{ eV}) = \lambda(1 \text{ keV}) = 2.6 \text{ cm}$$

$$\lambda(1 \text{ MeV}) = 4.8 \text{ cm}$$

Esercizio 6

Un neutrone di energia cinetica pari ad 1 MeV urta elasticamente un nucleo di ^{12}C inizialmente fermo e viene diffuso ad un angolo $\vartheta = 90^\circ$. Calcolare l'energia del neutrone dopo l'urto, l'energia del nucleo che rincula e l'angolo di rinculo.

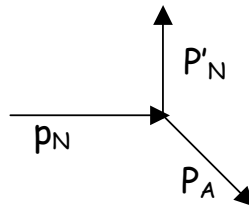


Fig. 14.6 diagramma dei momenti

$$T'_N = \frac{T_N}{(A+1)^2} \left(\cos \vartheta + \sqrt{A^2 - \sin^2 \vartheta} \right)^2$$

$$T'_N = T_N \frac{(A^2 - 1)}{(A+1)^2} = T_N \cdot \frac{12^2 - 1}{13^2} = 0.846 \text{ MeV}$$

$$T_A = T_N - T'_N = 0.154 \text{ MeV}$$

$$p_N = p_A \cdot \cos \varphi$$

$$\cos \varphi = \frac{p_N}{p_A} = \sqrt{\frac{2m_N T_N}{2m_A T_A}} = \sqrt{\frac{T_N}{12 \cdot T_A}} \quad \varphi = \arccos \left(\sqrt{\frac{T_N}{12 \cdot T_A}} \right) = \arccos \left(\sqrt{\frac{1}{12 \cdot 0.154}} \right) = 42.6^\circ$$

Esercizio 7

Un fascio monoenergetico di neutroni avente un flusso $\Phi = 4 \cdot 10^4$ neutroni/cm²/s urta un bersaglio di area $a = 1 \text{ cm}^2$ e spessore $x = 0.1 \text{ cm}$ che contiene $N = 0.048$ atomi/cm³. se la sezione d'urto totale di interazione vale $\sigma = 4.5 \text{ barn}$, calcolare il numero di neutroni che interagiscono al secondo con il bersaglio.

$$Y = \sigma \cdot \Phi \cdot a \cdot N \cdot x = 0.86 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}$$

Avremmo anche potuto calcolare l'intensità di neutroni $I(x)$ che non interagiscono attraversando il bersaglio di spessore x :

$I(x) = I_0 \cdot \exp(-\Sigma x)$, dove $I_0 = \Phi \cdot a$ è l'intensità totale di neutroni che incide sul bersaglio. Per differenza, l'intensità dei neutroni che interagiscono è data da:

$$Y = \Delta I = I_0 - I(x) = I_0 \cdot (1 - \exp(-\Sigma x)).$$

$$\Sigma x = N \cdot \sigma \cdot x = 2.16 \cdot 10^{-3} \ll 1.$$

$$\text{Allora: } Y = I_0 \cdot (1 - \exp(-\Sigma x)) \approx I_0 \cdot (1 - 1 + \Sigma x) = I_0 \Sigma x = \Phi \cdot a \cdot N \cdot \sigma \cdot x$$

Capitolo 15

La radioattività naturale e le radiazioni naturali

15.1 Sorgenti della radiazione ambientale

Nell'opinione comune le radiazioni sono associate a eventi catastrofici quali le esplosioni di bombe atomiche o gli incidenti ai reattori nucleari (p. Es. Chernobyl), o all'uso in diagnosi e terapie mediche, tutti eventi prodotti dall'attività umana. Ma gli esseri viventi sono "naturalmente" e continuamente esposti a radiazioni la cui origine non dipende dall'uomo; anzi, sorgenti radioattive, sia pure in piccola quantità, sono componenti naturali dei tessuti del nostro organismo. Gli effetti delle radiazioni naturali sulla formazione e lo sviluppo della vita sulla terra e sulla salute degli uomini non sono conosciuti in modo esauriente. È comunque opinione prevalente che alle radiazioni, per quanto piccola sia la loro intensità, sia sempre associata una probabilità di danno alla salute. Tuttavia, poichè la vita si è sviluppata in un ambiente investito da radiazioni, c'è chi ha avanzato l'ipotesi che piccole dosi di radiazione possano avere effetti benefici sugli esseri viventi. In questo capitolo verranno descritte le principali caratteristiche delle radiazioni naturali, mentre nel capitolo 18 verranno definite le grandezze proprie della dosimetria delle radiazioni e verrà quantificata la relazione dose-danno.

15.2 Radionuclidi naturali primordiali

I radionuclidi naturali primordiali sono caratterizzati o da una vita media dell'ordine dell'età della terra (o maggiore di essa) o dall'appartenenza a una famiglia radioattiva con capostipite avente la proprietà precedente. Alcuni esempi sono dati nella tabelle 15.1 e 15.2

Radio nuclide	Modo del decadimento	$T_{1/2}$ (anni)	Energia liberata E_{β} , E_{α} (MeV)
^{40}K	cattura K, β , γ	1.28×10^9	1.31
^{87}Rb	β	4.75×10^{10}	0.28
^{232}Th (+figli)	famiglia radioattiva	1.40×10^{10}	4.71
^{235}U (+figli)	famiglia radioattiva	7.04×10^8	5.31
^{238}U (+figli)	famiglia radioattiva	4.47×10^9	4.90

Tabella 15.1

Radio nuclide	Abbondanza relativa %	Prodotto del decadimento	Modo del decadimento	T _{1/2} (anni)
⁴⁰ ₁₉ K	0.0117	⁴⁰ Ar ⁴⁰ Ca	cattura K,β,γ	1.28 x 10 ⁹
⁸⁷ ₃₇ Rb	27.835	⁸⁷ Sr	β	4.75 x 10 ¹⁰
¹¹⁵ ₄₉ In	95.71	¹¹⁵ Sn	β	4.41 x 10 ¹⁴
¹³⁸ ₅₇ La	0.090	¹³⁸ Ba ¹³⁵ Ce	cattura K,β	1.05 x 10 ¹¹
¹⁴⁷ ₆₂ Sm	15.0	¹⁴³ Nd	α	1.06 x 10 ¹¹
¹⁷⁶ ₇₁ Lu	2.59	¹⁷⁶ Tb ¹⁷⁶ Hf	cattura K,β	2.37 x 10 ¹¹
¹⁸⁷ ₇₅ Re	62.93	¹⁸⁷ Os	β	4.35 x 10 ¹⁰
²³² ₉₀ Th	100.0	²⁰⁸ Pb ⁴ He	famiglia radioattiva	1.40 x 10 ¹⁰
²³⁵ ₉₂ U	0.72	²⁰⁷ Pb ⁴ He	famiglia radioattiva	7.03x 10 ⁸
²³⁸ ₉₂ U	99.27	²⁰⁶ Pb ⁴ He	famiglia radioattiva	4.47 x 10 ⁹

Tabella 15.2

I nuclei del primo gruppo sono una decina e fra di essi c'è il ⁴⁰K, che è il principale responsabile del fondo radioattivo interno del corpo umano. Attualmente il ⁴⁰K rappresenta la frazione $f_{\text{isotopic}} = 1.18 \cdot 10^{-4}$ del potassio naturale che è presente in quantità relativamente abbondante nei materiali organici (circa $f_{\text{mass}} = 3 \cdot 10^{-3}$ nel tessuto muscolare). Da quanto detto si vede per esempio come l'attività totale di

⁴⁰K all'interno del corpo umano vale: $a = n \cdot \lambda = \frac{N_{\text{Av}}}{A} m_{\text{uomo}} \cdot f_{\text{isotopic}} \cdot f_{\text{mass}} \cdot \lambda$.

$$\text{Ossia: } a = \frac{6 \cdot 10^{23}}{40} \cdot 7 \cdot 10^4 \cdot 1.18 \cdot 10^{-4} \cdot 3 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{\ln 2}{1.28 \cdot 10^9 \cdot 86400 \cdot 365} = 6.4 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}$$

La maggior parte dei radionuclidi naturali primordiali appartiene alle tre famiglie, dette famiglia dell'uranio, dell'attinio e del torio, aventi per capostipiti ²³⁸U, ²³⁵U, e ²³²Th rispettivamente, come indicato nelle figure 15.1, 15.2 e 15.3.

²³⁸U e ²³⁵U sono i due isotopi più abbondanti (99.2745% e 0.72% rispettivamente) a lunga vita media (quindi quasi stabili) dell'uranio naturale; il terzo isotopo quasi stabile è lo ²³⁴U (0.0055%). Il ²³²Th è l'unico nucleo quasi stabile tra gli isotopi del torio. I numeri di massa dei nuclei appartenenti alle tre famiglie sono esprimibili tramite le relazioni $A=4n$, $A=4n+2$ e $A=4n+3$ (con n intero). Manca la famiglia con $A=4n+1$: questa è stata scoperta nel campo dei radionuclidi artificiali (famiglia del nettunio, vedi figura 15.4) e la sua assenza in natura si spiega col fatto che tutti i suoi nuclei hanno vita media breve rispetto all'età della terra: il nettunio ha un tempo di dimezzamento dell'ordine di 10⁶ anni contro, per esempio, i 10⁹ anni dello ²³⁸U. Quello che resta oggi in natura di questa famiglia è l'elemento stabile ²⁰⁹Bi.

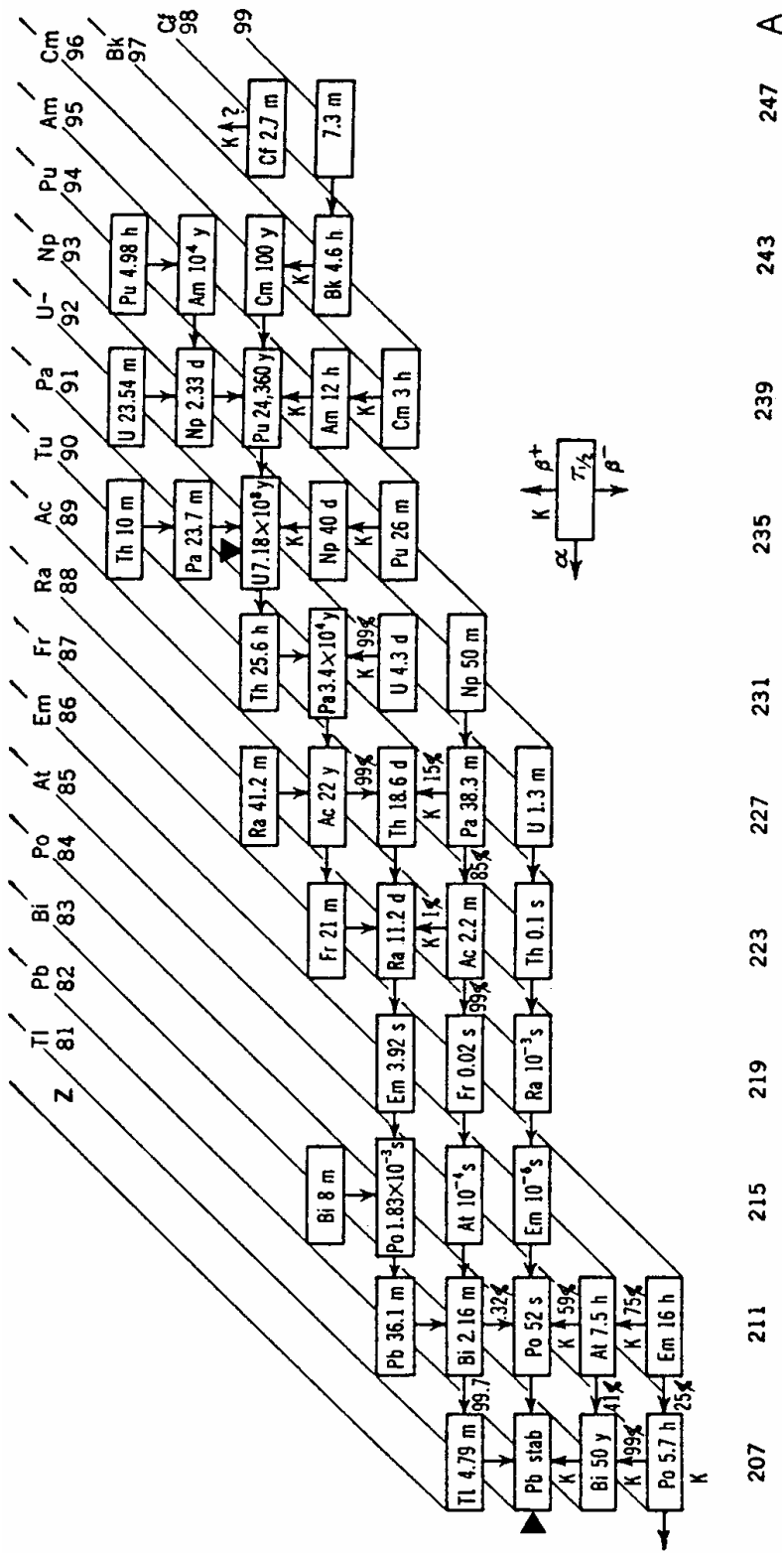


Fig. 15.2 famiglia dello ^{235}U

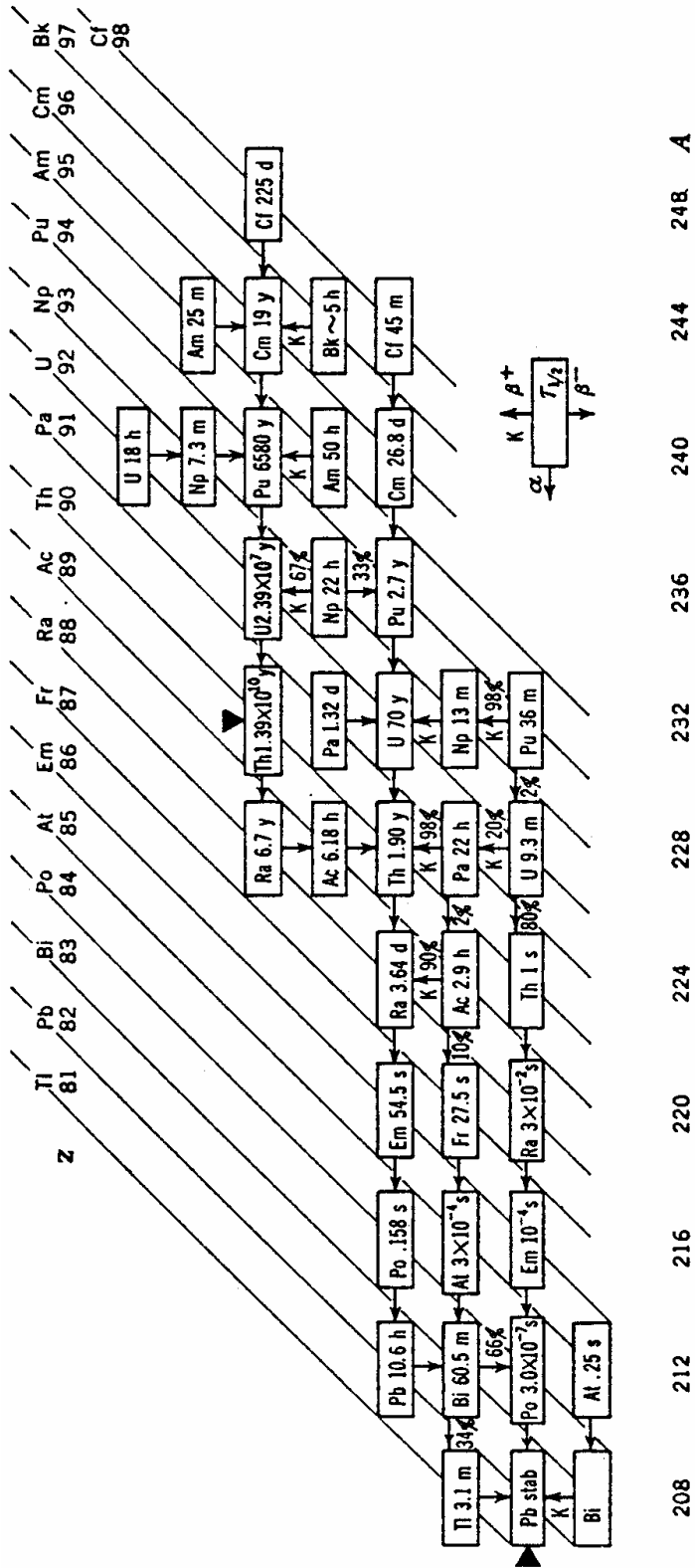


Fig. 15.3 famiglia del ^{232}Th

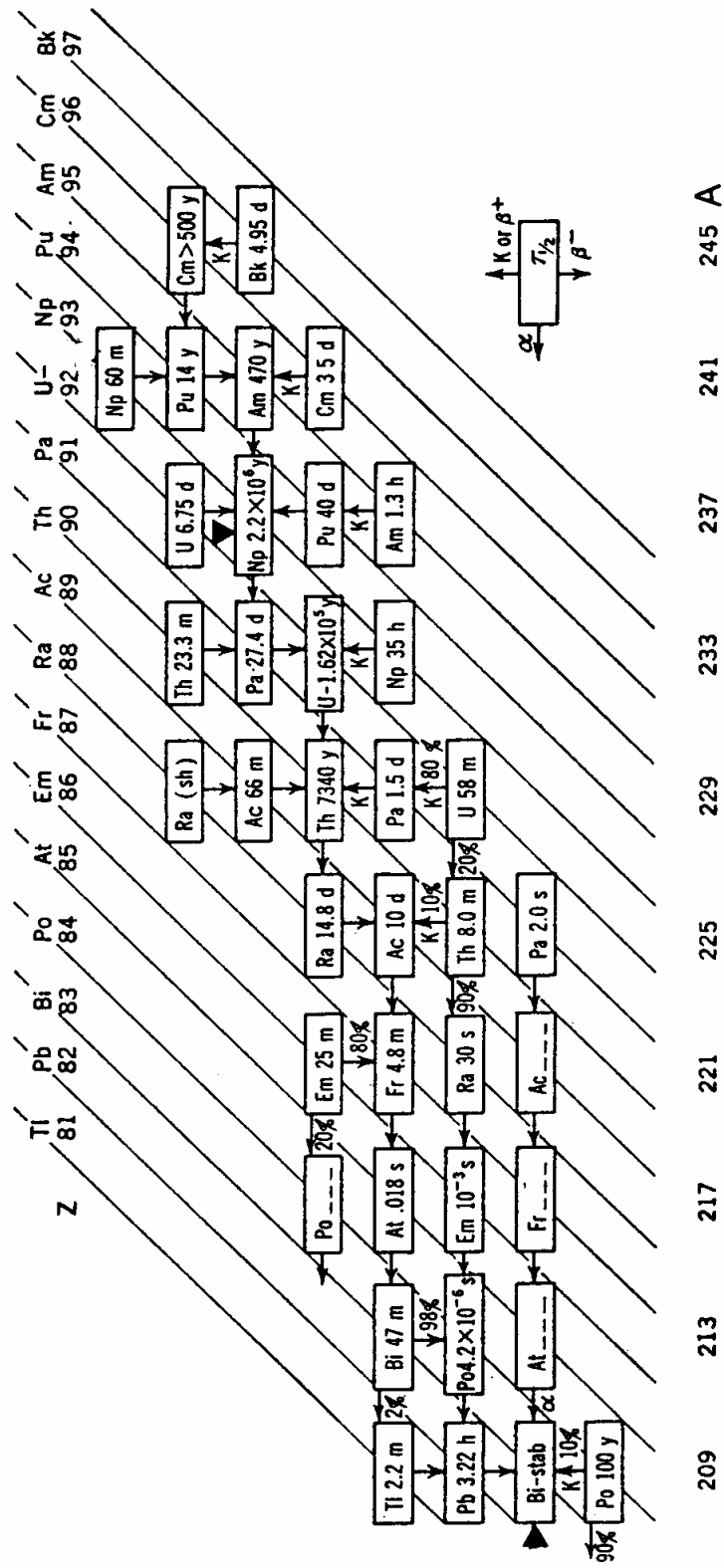


Fig. 15.4 famiglia del ^{237}Np

La radioattività dei minerali contenenti uranio (i principali sono la pechblenda, la carnotite e la autunite) è prodotta sia dall'attività dello ^{235}U e dello ^{238}U , che da quella dei loro discendenti. Dato il lungo periodo dei capostipiti, i discendenti sono in equilibrio secolare fra loro e con i rispettivi capostipiti. Ciò significa che tutti i nuclei di una famiglia hanno la stessa attività uguale a quella del capostipite; vale a dire che se X rappresenta un nucleo generico ed A il capostipite, vale la relazione:

$$n_X \lambda_X = n_A \lambda_A, \text{ che si può riscrivere: } \frac{n_X}{T_{1/2}^X} = \frac{n_A}{T_{1/2}^A}; \text{ Da ciò segue che il rapporto:}$$

$$\frac{n_X}{n_A} = \frac{T_{1/2}^X}{T_{1/2}^A} \text{ è costante in tutti i minerali contenenti il capostipite A. Per esempio, se}$$

$$A = ^{238}\text{U} \text{ e } X = ^{226}\text{Ra}, \text{ risulta: } \frac{n(^{226}\text{Ra})}{n(^{238}\text{U})} = \frac{1600 \text{ y}}{4.47 \cdot 10^9 \text{ y}} = 0.358 \cdot 10^{-6}$$

vale a dire, ad 1 kg di ^{238}U si accompagnano 0.358 mg di ^{226}Ra , come del resto si constata sperimentalmente. In generale l'attività è piccola perché la concentrazione dei radioisotopi dell'uranio è piccola ed i loro periodi sono lunghi. Da un minerale di uranio o di torio sono emesse non solo particelle alfa e beta, ma anche raggi gamma e raggi X. Ciò è dovuto al fatto che i nuclei figli e gli atomi di cui fanno parte possono essere formati in stati eccitati, dai quali decadono ad altri stati eccitati o allo stato fondamentale con transizioni elettromagnetiche.

THE URANIUM SERIES

Radioactive species	Nuclide	Type of disintegration	Half-life	Disintegration constant, sec ⁻¹	Particle energy, Mev
Uranium I (UI)	^{238}U	α	$4.50 \times 10^9 \text{ y}$	4.88×10^{-18}	4.20
Uranium X ₁ (UX ₁)	^{234}Th	β	24.1 d	3.33×10^{-7}	0.19
Uranium X ₂ (UX ₂)	^{234}Pa	β	1.18 m	9.77×10^{-3}	2.32
Uranium Z (UZ)	^{234}Pa	β	6.7 h	2.88×10^{-5}	1.13
Uranium II (UII)	^{234}U	α	$2.50 \times 10^5 \text{ y}$	8.80×10^{-14}	4.768
Ionium (Io)	^{230}Th	α	$8.0 \times 10^4 \text{ y}$	2.75×10^{-13}	4.68 m
Radium (Ra)	^{226}Ra	α	1620 y	1.36×10^{-11}	4.777 m
Ra Emanation (Rn)	^{222}Rn	α	3.82 d	2.10×10^{-6}	5.486
Radium A (RaA)	^{218}Po	α, β	3.05 m	3.78×10^{-3}	$\alpha: 5.998$ $\beta: ?$
Radium B (RaB)	^{214}Pb	β	26.8 m	4.31×10^{-4}	0.7
Astatine-218 (At ²¹⁸)	^{218}At	α	1.5-2.0 s	0.4	6.63
Radium C (RaC)	^{214}Bi	α, β	19.7 m	5.86×10^{-4}	$\alpha: 5.51 \text{ m}$ $\beta: 3.17$
Radium C' (RaC')	^{214}Po	α	$1.64 \times 10^{-4} \text{ s}$	4.23×10^3	7.683
Radium C'' (RaC'')	^{210}Tl	β	1.32 m	8.75×10^{-4}	1.9
Radium D (RaD)	^{210}Pb	β	19.4 y	1.13×10^{-9}	0.017
Radium E (RaE)	^{210}Bi	β	5.0 d	1.60×10^{-6}	1.155
Radium F (RaF)	^{210}Po	α	138.3 d	5.80×10^{-8}	5.300
Thallium-206 (Tl ²⁰⁶)	^{206}Tl	β	4.2 m	2.75×10^{-3}	1.51
Radium G (RaG)	^{206}Pb	Stable			

Tab. 15.3 La serie dell'Uranio

THE ACTINIUM SERIES

Radioactive species	Nuclide	Type of disintegration	Half-life	Disintegration constant, sec ⁻¹	Particle energy, Mev
Actinouranium (AcU)	⁹² U ²³⁵	α	7.10 × 10 ⁸ y	3.09 × 10 ⁻¹⁷	4.559 m
Uranium Y (UY)	⁹⁰ Th ²³¹	β	25.6 h	7.51 × 10 ⁻⁶	0.30
Protoactinium (Pa)	⁹¹ Pa ²³¹	α	3.43 × 10 ⁴ y	6.40 × 10 ⁻¹³	5.046 m
Actinium (Ac)	⁸⁹ Ac ²²⁷	α, β	21.6 y	1.02 × 10 ⁻⁹	α:4.94 β:0.046
Radioactinium (RdAc)	⁹⁰ Th ²²⁷	α	18.17 d	4.41 × 10 ⁻⁷	6.03 m
Actinium K (AcK)	⁸⁷ Fr ²²³	α, β	22 m	5.25 × 10 ⁻⁴	β:1.2 α:5.34
Actinium X (AcX)	⁸⁸ Ra ²²³	α	11.68 d	6.87 × 10 ⁻⁷	5.864
Astatine-219	⁸⁵ At ²¹⁹	α, β	0.9 m	1.26 × 10 ⁻²	α:6.27
Ac Emanation (An)	⁸⁶ Em ²¹⁹	α	3.92 s	0.177	6.810 m
Bismuth-215	⁸³ Bi ²¹⁵	α, β ⁻	8 m	1.44 × 10 ⁻³	?
Actinium A (AcA)	⁸⁴ Po ²¹⁵	α, β ⁻	1.83 × 10 ⁻³ s	3.79 × 10 ²	α:7.37
Actinium B (AcB)	⁸² Pb ²¹¹	β	36.1 m	3.20 × 10 ⁻⁴	1.39
Astatine-215	⁸⁵ At ²¹⁵	α	10 ⁻⁴ s	7 × 10 ⁸	8.00
Actinium C (AcC)	⁸³ Bi ²¹¹	α, β ⁻	2.15 m	5.28 × 10 ⁻³	α:6.617 m
Actinium C' (AcC')	⁸⁴ Po ²¹¹	α	0.52 s	1.33	7.442 m
Actinium C'' (AcC'')	⁸¹ Tl ²⁰⁷	β	4.79 m	2.41 × 10 ⁻³	1.44
Actinium D (AcD)	⁸² Pb ²⁰⁷	Stable			

Tab. 15.4 la serie dell'attinio

THE THORIUM SERIES

Radioactive species	Nuclide	Type of disintegration	Half-life	Disintegration constant, sec ⁻¹	Particle energy, Mev
Thorium (Th)	⁹⁰ Th ²³²	α	1.39 × 10 ¹⁰ y	1.58 × 10 ⁻¹⁸	4.007
Mesothorium1 (MsTh1)	⁸⁸ Ra ²²⁸	β	6.7 y	3.28 × 10 ⁻⁹	0.04
Mesothorium2 (MsTh2)	⁸⁹ Ac ²²⁸	β	6.13 h	3.14 × 10 ⁻⁵	2.18
Radiothorium (RdTh)	⁹⁰ Th ²²⁸	α	1.910 y	1.15 × 10 ⁻⁸	5.423 m
Thorium X (ThX)	⁸⁸ Ra ²²⁴	α	3.64 d	2.20 × 10 ⁻⁶	5.681 m
Th Emanation (Tn)	⁸⁶ Em ²²⁰	α	51.5 s	1.34 × 10 ⁻²	6.280
Thorium A (ThA)	⁸⁴ Po ²¹⁶	α, β	0.16 s	4.33	6.774
Thorium B (ThB)	⁸² Pb ²¹²	β	10.6 h	1.82 × 10 ⁻⁵	0.58
Astatine-216 (At ²¹⁶)	⁸⁵ At ²¹⁶	α	3 × 10 ⁻⁴ s	2.3 × 10 ³	7.79
Thorium C (ThC)	⁸³ Bi ²¹²	α, β	60.5 m	1.91 × 10 ⁻⁴	α:6.086 m β:2.25
Thorium C' (ThC')	⁸⁴ Po ²¹²	α	3.0 × 10 ⁻⁷ s	2.31 × 10 ⁶	8.780
Thorium C'' (ThC'')	⁸¹ Tl ²⁰⁸	β	3.10 m	3.73 × 10 ⁻³	1.79
Thorium D (ThD)	⁸² Pb ²⁰⁸	Stable			

Tab. 15.5 La serie del Torio

THE NEPTUNIUM SERIES

Nuclide	Type of disintegration	Half-life	disintegration constant, sec ⁻¹	particle energy, Mev
⁹⁴ Pu ²⁴¹	β, α	13.0 y	1.69×10^{-9}	α : 4.893 m β : 0.021
⁹⁵ Am ²⁴¹	α	458 y	4.80×10^{-11}	5.535 m
⁹² U ²³⁷	β	6.75 d	1.19×10^{-6}	0.248
⁹³ Np ²³⁷	α	2.20×10^6 y	9.99×10^{-15}	4.870
⁹¹ Pa ²³³	β	27.0 d	2.97×10^{-7}	0.568 m
⁹² U ²³³	α	1.62×10^5 y	1.36×10^{-13}	4.816
⁹⁰ Th ²²⁹	α	7340 y	3.0×10^{-12}	5.02 m
⁸⁸ Ra ²²⁵	β	14.8 d	5.42×10^{-7}	0.32
⁸⁹ Ac ²²⁵	α	10.0 d	8.02×10^{-7}	5.818 m
⁸⁷ Fr ²²¹	α	4.8 m	2.41×10^{-3}	6.33 m
⁸⁵ At ²¹⁷	α	0.018 s	3.85×10^1	7.05
⁸³ Bi ²¹³	β, α	47 m	2.46×10^{-4}	α : 5.86 β : 1.39
⁸⁴ Po ²¹³	α	4.2×10^{-6} s	1.65×10^5	8.35
⁸¹ Th ²⁰⁹	β	2.2 m	5.25×10^{-3}	1.99
⁸² Pb ²⁰⁹	β	3.30 h	5.84×10^{-5}	0.635
⁸³ Bi ²⁰⁹	Stable			

Tab. 15.6 La serie del Nettunio

15.3 Età della terra

Nella mistura di isotopi dell'Uranio normalmente trovati sulla terra oggi giorno si ha:

²³⁸U 99.3 %

²³⁵U 0.7 %

Sappiamo inoltre che: $T_{1/2}({}^{238}\text{U})=4.5 \cdot 10^9$ y, e $T_{1/2}({}^{235}\text{U})=7.1 \cdot 10^8$ y. Assumendo che essi fossero ugualmente abbondanti quando si formò originariamente l'uranio sulla terra:

$$N_1 = N_0 e^{-\lambda_1 t} \quad \lambda_1 = 0.15410^{-9} \text{ y}^{-1}$$

$$N_2 = N_0 e^{-\lambda_2 t} \quad \lambda_2 = 0.97610^{-9} \text{ y}^{-1}$$

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{e^{-\lambda_1 t}}{e^{-\lambda_2 t}} = e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}$$

$$(\lambda_2 - \lambda_1)t = \ln \frac{N_1}{N_2}$$

$$t = \frac{1}{(\lambda_2 - \lambda_1)} \ln \frac{N_1}{N_2} = \frac{10^9}{0.976 - 0.154} \ln \frac{99.3}{0.7} \approx 610^9 \text{ y}$$

Di quanto si è ridotta la quantità di ^{237}Np ($T_{1/2}=2.2 \cdot 10^6 \text{y}$), supponendo che sia stato originato assieme alla terra e assumendo che la terra abbia $5 \cdot 10^9$ anni ?

$$\frac{N(t)}{N_0} = \exp(-\lambda t) = \exp\left(-\frac{0.693}{2.2 \cdot 10^6} 5 \cdot 10^9\right) = \exp(-1575) = (e^{2.3})^{-685} = 10^{-685}$$

Il piombo contenuto in un minerale contenente Uranio può essere usato per determinare l'età del materiale. Se si trascura:

- la presenza dello ^{235}U rispetto allo ^{238}U ;
- la diminuzione di ^{238}U nel tempo,

l'età può essere approssimativamente rappresentata dalla formula:

$$\text{età}(y) = \frac{^{206}\text{Pb}(g)}{\text{U}(g)} 7.5 \cdot 10^9$$

Quale è l'età di due sbarre contenenti Uranio, nelle quali vi siano rispettivamente:

- a) $1.33 \cdot 10^{-2}$ g di ^{206}Pb per grammo di U;
- b) 0.1 g di ^{206}Pb per grammo di U.

L'età è data da:

- a) età = $1.33 \cdot 10^{-2} \cdot 7.5 \cdot 10^9 \approx 10^8 \text{y}$;
- b) età = $0.1 \cdot 7.5 \text{y} \approx 7.5 \cdot 10^8 \text{y}$.

Tenuto conto che nella trasmutazione dallo ^{238}U al ^{206}Pb vengono emesse 8 particelle α , ogni anno un grammo di Uranio emette $2.07 \cdot 10^{-11}$ g di He ($1.16 \cdot 10^{-7} \text{cm}^3$ STP).

Questo Elio viene generalmente intrappolato nel materiale. Quando l'Uranio è fuso, l'Elio può essere raccolto ed il suo volume misurato. Allora l'età del materiale può essere approssimativamente dedotta dalla formula:

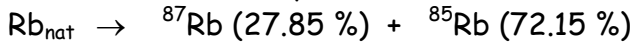
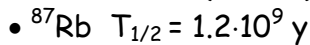
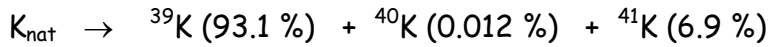
$$\text{età}(y) = \frac{\text{He}(\text{cm}^3 \text{STP})}{\text{U}(g)} 8.6 \cdot 10^6$$

Da una sbarra metallica contenente Uranio in tracce sono stati estratti con procedimenti chimici $5.11 \cdot 10^{-5} \text{cm}^3$ di He per ogni grammo di Uranio. Determinarne l'età. Si ottiene: età(y) = $5.11 \cdot 10^{-5} \cdot 8.6 \cdot 10^6 = 440 \text{y}$

15.4 Altre sorgenti naturali

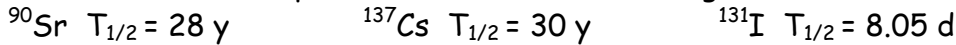
Le sorgenti di radiazione naturali sono essenzialmente quelle che provengono dai raggi cosmici e quelle che provengono da radionuclidi naturali ad elevata vita media, che generatisi all'origine della terra sono ancora presenti assieme ai loro discendenti. Vi sono inoltre sorgenti dovute alla fissione spontanea di elementi (isotopi di Uranio e Thorio) anche se molto rara (Tab. 15.7). E' ormai da considerarsi sorgente naturale di radiazione quella dovuta ad esperimenti nucleari ed al fallout derivante da questi. Così come i residui dei processi di fissione nei reattori nucleari.

- ^{40}K . Esso costituisce circa un terzo della quantità di radiazione terrestre $T_{1/2} = 1.28 \cdot 10^9 \text{y}$



- Fallout

Elementi radioattivi prodotti nelle fissioni e a lunga vita media



Elementi radioattivi prodotti dall'alto numero di neutroni liberati a seguito della fissione $n + {}^{14}\text{N} \rightarrow p + {}^{14}\text{C}$ ($T_{1/2} = 5600 \text{ y}$) $n + {}^6\text{Li} \rightarrow {}^4\text{He} + {}^3\text{H}$ ($T_{1/2} = 12.3 \text{ y}$)

TABLE 13—Nuclides undergoing spontaneous fission as an alternative to decay α

Radionuclide	Half-Life for Decay	Half-Life for Spontaneous Fission
	(years)	(years)
Th-230	8.0×10^4	$\geq 1.5 \times 10^{17}$
Th-232	1.41×10^{10}	$> 1 \times 10^{21}$
Pa-231	3.25×10^4	1.1×10^{18}
U-234	2.47×10^5	2×10^{16}
U-235	7.1×10^8	1.9×10^{17}
U-238	4.51×10^9	6.5×10^{16}

Tab. 15.7 nuclidi che decadono per fissione spontanea

15.5 I raggi cosmici

La terra è costantemente bombardata da radiazioni di elevatissima energia provenienti dallo spazio esterno: circa una particella al minuto passa attraverso ogni cm^2 della superficie terrestre. (Per inciso i neutrini sono molti di più: dal Sole, sulla superficie terrestre ne arrivano $10^{12}/\text{cm}^2/\text{s}$). I raggi cosmici furono scoperti nel 1912 da Victor Hess, che osservò la ionizzazione di un elettrometro portato in un pallone aerostatico. Da allora sono stati estensivamente studiati.

I corpuscoli primari generati ben al di là dell'atmosfera, avvicinandosi alla terra subiscono l'azione del campo magnetico terrestre, che li deflette a seconda della loro energia e massa. Giunti negli strati alti dell'atmosfera, urtando le molecole dell'aria, danno inizio a tutta una serie di complessi fenomeni per i quali nuovi corpuscoli vengono generati in una specie di produzione a catena. La natura della radiazione cosmica va mutando a mano a mano che questa penetra nell'atmosfera e, giunta al livello del mare, penetra entro la crosta terrestre.

Molte teorie sono state proposte. Non è ancora certo se la maggior parte delle particelle che compongono i raggi cosmici abbia origine galattica o extra-galattica. In figura 15.5-6 è riportato lo spettro della componente primaria di raggi cosmici misurato. L'energia più alta riportata in figura è pari a 10^{11} GeV (cioè 10^{20} eV , ossia 10 Joule !), ma sono stati osservati raggi cosmici con energia di 10^{12} e 10^{13} GeV . La

potenza totale posseduta dai raggi cosmici nella nostra galassia è stata valutata essere dell'ordine di 10^{49} erg/anno = 10^{52} GeV/anno (dell'ordine di 10^{35} Watt !!).

TABLE 12—Non-series primordial radionuclides

Radionuclide	Half-Life	Isotopic Abundance	Elemental Abundance in Crustal Rock	Concentration in Crustal Rock
	(years)	(percent)	(ppm)	(pCi/g)
Potassium-40	1.26×10^9	0.0118	2.09×10^4	17
Vanadium-50	6×10^{16}	0.25	135	4×10^{-7}
Rubidium-87	4.8×10^{10}	27.85	90	2
Cadmium-113	$>1.3 \times 10^{15}$	12.26	0.2	$<6 \times 10^{-8}$
Indium-115	6×10^{14}	95.77	0.1	5×10^{-7}
Tellurium-123	1.2×10^{12}	0.87	0.002*	4×10^{-9}
Lanthanum-138	1.12×10^{11}	0.089	30	6×10^{-4}
Cerium-142	$>5 \times 10^{16}$	11.07	60	$<3 \times 10^{-7}$
Neodymium-144	1.4×10^{15}	23.87	28	7×10^{-8}
Samarium-147	1.05×10^{11}	15.07	6.0	0.02
Gadolinium-152	1.1×10^{14}	0.20	5.4	2×10^{-7}
Hafnium-174	2.0×10^{16}	0.163	3	5×10^{-9}
Lutecium-176	2.2×10^{10}	2.60	0.50	0.001
Rhenium-187	4.3×10^{10}	62.93	0.001*	3×10^{-8}
Platinum-190	6.9×10^{11}	0.0127	0.005*	2×10^{-9}
Platinum-192	1×10^{16}	0.78	0.005*	7×10^{-9}
Bismuth-209	$>2 \times 10^{18}$	100	0.17	$<1 \times 10^{-10}$

* Not given by Taylor (1964); value from Mason (1958).

Tab. 15.8 Altri nuclidi radioattivi naturali

Una caratteristica dei raggi cosmici è la loro isotropia e la loro costanza durante almeno 10^9 anni.

La teoria più conservativa riguardo l'origine dei raggi cosmici è quella che assume che essi siano originati all'interno della nostra Galassia e siano in essa confinati da campi magnetici. All'interno della Galassia possono esserci sorgenti energetiche capaci di emettere tanta energia: si tratta delle supernovae e delle stelle di neutroni. Nella nostra Galassia appare in media una supernova ogni circa 30 anni ed una supernova può produrre 10^{51} - 10^{53} erg di energia: di conseguenza le supernovae sarebbero da sole in grado di produrre 10^{49} erg/anno di raggi cosmici.

15.6 Origine dei raggi cosmici: Supernovae e stelle di neutroni

Vediamo brevemente cosa è una supernova. Abbiamo detto parlando dell'origine degli elementi attraverso la fusione che in una stella si ha un bilancio energetico tra energia gravitazionale e termica (nucleare) dovuto ai processi di fusione. Quando tutto l'idrogeno è stato bruciato e trasformato in Elio questo equilibrio viene meno, la stella si contrae sotto la spinta della forza gravitazionale e la pressione interna aumenta enormemente e con essa la temperatura.

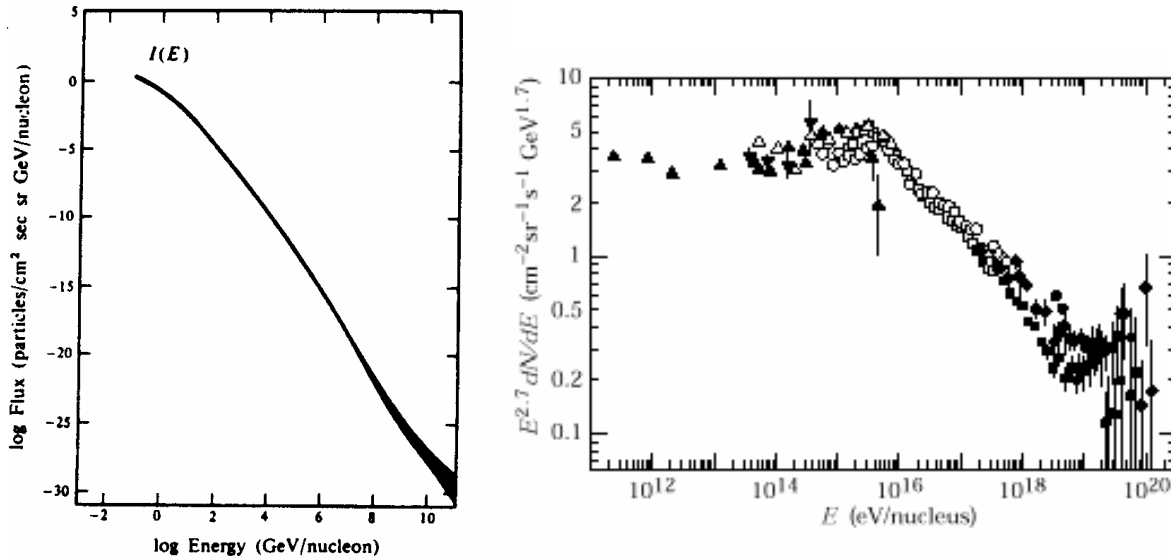


Fig. 15.5-6 flusso dei raggi cosmici in funzione della loro energia

Si innesca allora il meccanismo di combustione dell'Elio, che origina Carbonio ed Ossigeno, che trasforma la stella in una Gigante Rossa: Carbonio ed Ossigeno continuano a formarsi a spese dell'Elio fino a che questo non è esaurito. A questo punto il destino della stella dipende dalla sua massa: se è dell'ordine della massa del nostro Sole, il processo di combustione nucleare si arresta, la stella diventa una nana bianca e piano piano si raffredda fino a diventare una nana nera e si spegne. Se viceversa la stella è più massiva, allora iniziano nuovi cicli di combustione e si forma Silicio, Alluminio, Magnesio in fasi successive (cioè dopo contrazioni e riscaldamenti progressivi). Il processo di fusione continua fino a quando si forma il Ferro, che ha la massima energia di legame per nucleone. A questo punto la stella non può più liberare energia nucleare per contrastare la pressione gravitazionale e quindi non può trovare uno stato di equilibrio: collassa su se stessa, finché implode sotto il suo stesso peso e l'onda d'urto che si genera proietta la materia che compone la stella a velocità elevatissima nello spazio circostante a formare una nebulosa che nel giro di qualche anno scompare. Resta solo il cuore della stella originaria, una nova. Ogni anno nella nostra Galassia si osservano una ventina di novae. Nel caso della supernova l'esplosione è estremamente più rapida, dura solo qualche settimana e l'emissione di energia supera spesso di 1000 volte quella delle novae.

Questi fenomeni non sono così frequenti e, data l'elevata luminosità che li contraddistingue, possono osservarsi anche nello spazio extragalattico (10^8 - 10^{10} energie solari). Generati da queste violente esplosioni i raggi cosmici di elevatissima energia possono attraversare l'Universo in tutte le direzioni, ritrovandosi infine sotto forma di radiazione isotropa.

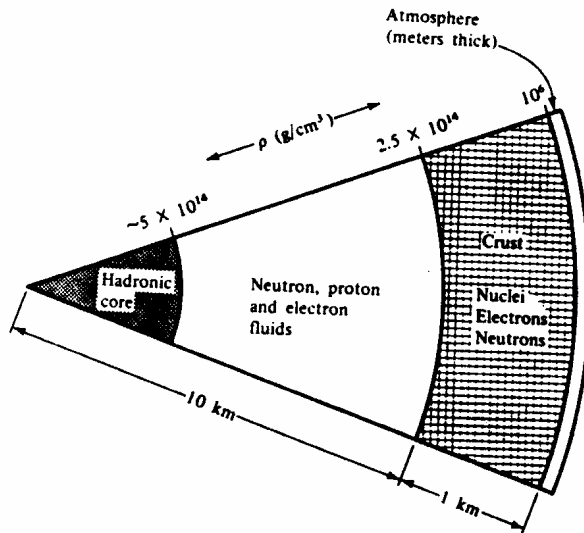


Fig. 18.6. Cross section of a typical neutron star.

Fig. 15.7 Spaccato di una stella di neutroni

Un'altra fonte di raggi cosmici di alta energia (soprattutto elettroni e neutroni) possono essere le stelle a neutroni, schematizzate in figura 15.7. Esse hanno la caratteristica di presentare una densità interna di 10^{14} g/cm³, cioè maggiore della densità di materia nucleare. Quando la densità diventa abbastanza alta i nuclei atomici vanno a contatto, gli atomi sono completamente ionizzati e gli elettroni formano un gas di fermioni relativistici, confinati in un volume V . Questo gas presenta quindi tutta una serie di livelli energetici fino al livello di Fermi. Le dimensioni dell'atomo sono circa 10^{-8} cm. Supponiamo di riempire un volume pari a 1 cm^3 in modo tale che la distanza tra le particelle sia dell'ordine di qualche fermi, pari a 10^{-12} cm: vi saranno all'interno $N=(10^{12})^3=10^{36}$ atomi e la densità sarà dell'ordine di 10^{12} g/cm³. Infatti:

$$N = N_0 \frac{\rho}{A} \quad \rho = \frac{NA}{N_0} = 10^{12} \text{ g/cm}^3$$

Il livello di Fermi del gas dipende dalla densità come riportato in figura 15.8: in questo esempio esso vale una trentina di MeV. Questo significa che in quel mezzo tutti gli stati energetici per gli elettroni fino all'energia di Fermi sono occupati, e pertanto i neutroni che si trovano in quel mezzo non possono decadere β^- perché l'energia della particella beta sarebbe inferiore al livello di Fermi.

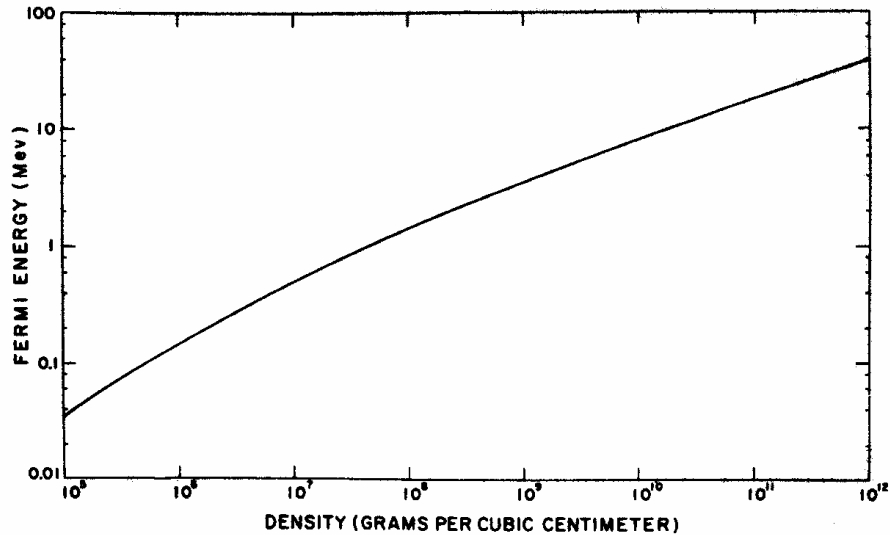
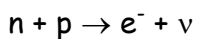
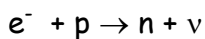


Fig. 15.8 Livello di Fermi del gas di elettroni in una stella di neutroni

Pertanto la trasformazione:

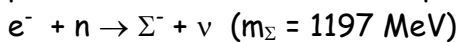


non è possibile, mentre è possibile il processo inverso di cattura:



Si comprende allora come in tale mezzo si avrà un fluido continuo di neutroni, elettroni e protoni.. I neutrini che fuoriescono contribuiscono al bilancio energetico della stella, abbassandone l'energia totale.

A densità ancora più elevate diventa energeticamente possibile creare nuove particelle che hanno masse superiori a quella del neutrone:



Pertanto nel nocciolo delle stelle di neutroni sono presenti, se pur in abbondanza minore, anche particelle a massa più grande.

Le stelle di neutroni si identificano con le pulsar, che a dispetto del nome non sono pulsanti ma rotanti, con periodi che vanno dal millisecondo al secondo. Tale caratteristica è data dal fatto che la densità di questi oggetti (a differenza delle stelle normali nelle quali è elevata al centro e diminuisce velocemente verso la periferia esterna) è praticamente uniforme su tutto il volume e questo fa ovviamente aumentare il loro momento di inerzia: si comportano in pratica come sfere di fluido incompressibile. Buona parte dell'energia intrinseca della stella di neutroni è di tipo magnetico: ci si aspettano campi magnetici dell'ordine di 10^{12} - 10^{13} Gauss dovuti al moto delle cariche elettriche della materia che la costituisce.

La composizione dei raggi cosmici per quanto riguarda la componente nucleare è riportata in figura 15.9, dove è confrontata con l'abbondanza degli elementi nell'Universo: si può dire che il 79% è costituito da H, il 20% da He, ed il resto da nuclei a più alto Z.

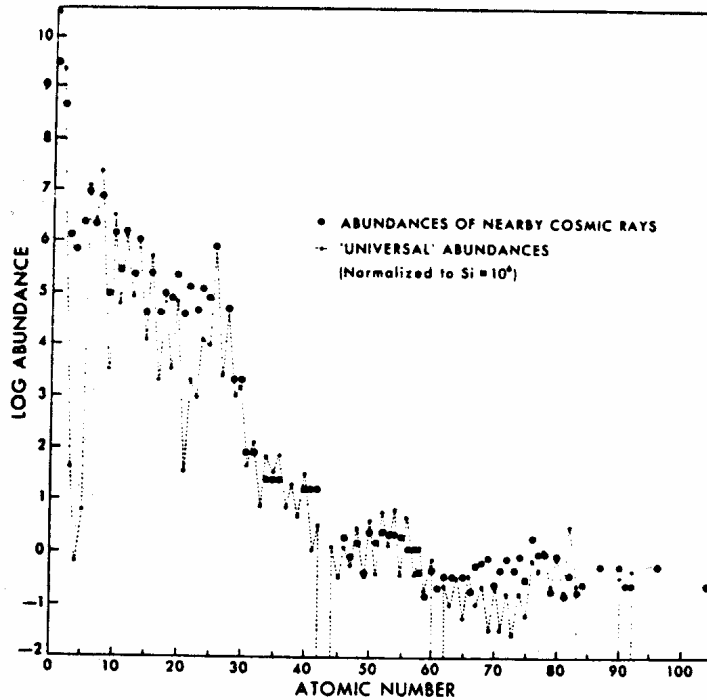


Fig. 15.9 Abbondanza relativa degli elementi nei raggi cosmici

Anche le tempeste magnetiche che hanno luogo sul Sole possono generare una grande quantità di particelle di energia sopra parecchi GeV, ma normalmente la loro energia è compresa tra 1 e 100 MeV. Si hanno soprattutto H ed He come componente nucleare. Il flusso annuale con energie maggiori di 20 MeV varia con il ciclo solare di 11 anni, tra 10^5 e 10^{10} part/cm²/anno. Il flusso solare di particelle è maggiore di quello galattico, ma a causa della bassa energia delle particelle prodotte, queste sono meno penetranti e producono pochi effetti secondari.

15.7 I Raggi cosmici secondari

Consideriamo un protone altamente energetico che dall'esterno penetra nell'atmosfera terrestre (fig. 15.11). Esso interagisce con i nuclei di Ossigeno e Azoto e genera particelle secondarie che a loro volta, essendo molto energetiche, interagiscono e generano altre particelle: si ha un processo a cascata. Data l'elevata energia delle particelle primarie, possono essere create anche particelle con massa a riposo maggiore di quella del protone: questo è il motivo per cui i raggi cosmici, fino alla costruzione delle grandi macchine acceleratrici, furono l'unica fonte di informazione per lo studio sperimentale delle particelle elementari. La reazione più interessante per noi è quella che produce pioni, o mesoni π . Essi costituiscono la "colla nucleare", "nuclear glue", cioè i responsabili delle forze tra nucleoni: hanno una massa pari a 139.6 MeV (π^+ e π^-) e di 135 MeV (π^0). I pioni carichi ($\tau = 2.6 \cdot 10^{-8}$ s, $c\tau = 7.8$ m) hanno una elevata probabilità di colpire un nucleo e di generare altri

pioni secondari prima di decadere. I pioni neutri, che hanno una vita media più corta ($\tau = 10^{-16}$ s, $c\tau = 3 \cdot 10^{-6}$ cm), generalmente decadono (prima di avere il tempo di interagire con qualche nucleo) in due gamma: i raggi gamma producono cascate elettromagnetiche di elettroni e fotoni (attraverso processi di produzione di coppie e di bremsstrahlung): da un unico π^0 possono discendere fino a 10^4 particelle. I pioni carichi che non interagiscono con la materia decadono trasformandosi in altre particelle, "mesoni μ " e neutrini/antineutrini:

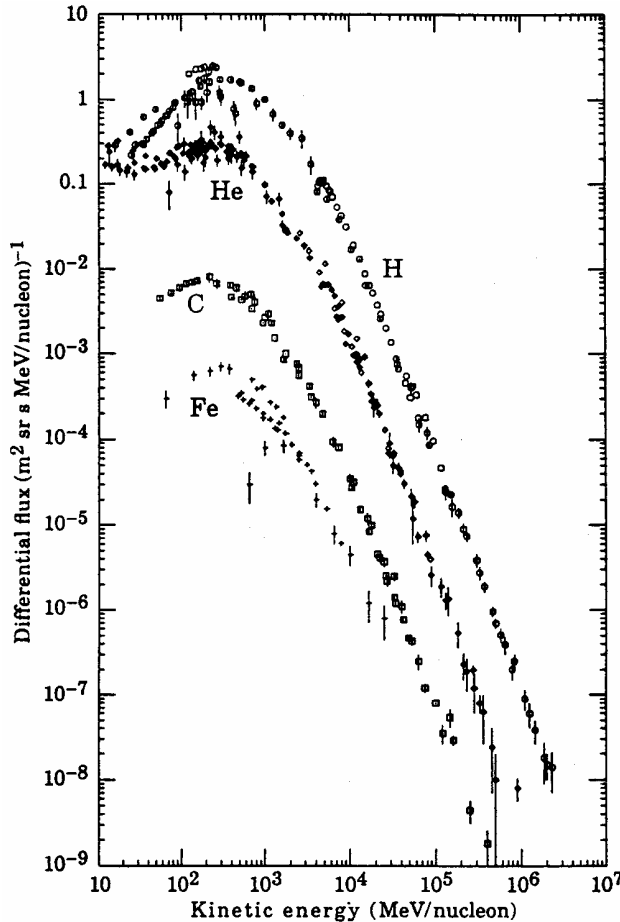
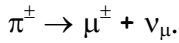


Fig. 15.10 Spettro energetico dei vari elementi contenuti nei raggi cosmici

I muoni non interagiscono con la materia nucleare, hanno una massa di 105.7 MeV ed un tempo di dimezzamento di 10^{-6} sec (con un libero cammino medio pari a: $c\tau \approx 700$ m): questo fa sì che possano con buona probabilità attraversare l'atmosfera senza decadere, e se la loro energia è abbastanza grande non solo giungono sulla superficie terrestre, ma penetrano considerevolmente sotto la crosta terrestre. Il muone decadendo si trasforma in elettrone:

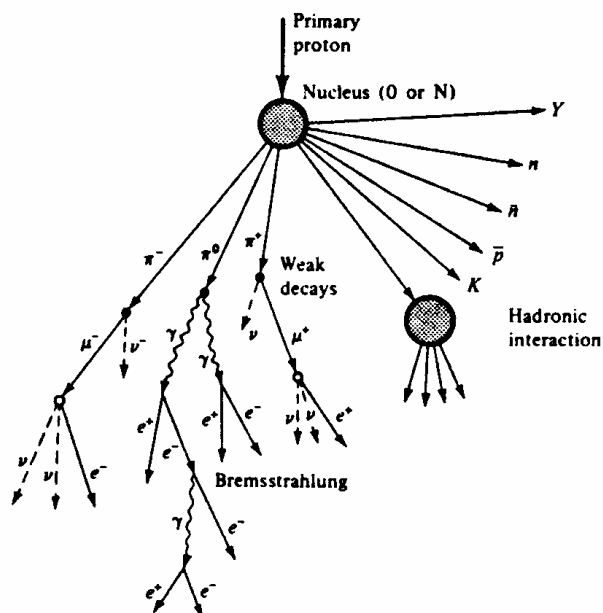


Fig. 15.11 La formazione degli sciami elettromagnetici per interazione dei cosmici primari

$$\mu^{\pm} \rightarrow e^{\pm} + \nu_e + \nu_{\mu}$$

μ^{\pm} , e^{\pm} , $\nu_e + \nu_{\mu}$ sono leptoni e vale la conservazione del numero leptonico: per questo occorre distinguere tra neutrini ed antineutrini nel decadimento del π^{\pm} e del μ^{\pm} .

il decadimento avviene con più alta probabilità (anzi quasi esclusivamente) quando la particella ha perso tutta la sua energia cinetica e si è arrestato.

Da quanto detto appare chiaro come la composizione dello spettro dei raggi cosmici (sia per massa che per energia delle particelle) dipende dall'altezza nell'atmosfera. Nello spettro di raggi cosmici si suole distinguere una componente "dura" ("hard") costituita essenzialmente dai muoni e da una percentuale molto bassa di altre particelle cariche, e una componente "molle" ("soft") che è costituita di elettroni e gamma. Per quanto riguarda la componente "soft", il numero di fotoni ed elettroni penetrando nell'atmosfera dapprima aumenta esponenzialmente a causa del processo di cascata elettromagnetica (si definisce "lunghezza di radiazione" la distanza entro la quale un elettrone ha una probabilità $1/e$ di creare un fotone di bremsstrahlung, e un fotone ha una probabilità $1/e$ di creare una coppia e^+e^-). Dopo una certa distanza il numero di fotoni ed elettroni diminuirà perché le particelle individuali non hanno più energia sufficiente per mantenere il processo di cascata. (le sezioni d'urto di bremsstrahlung e produzione di coppie diminuiscono al diminuire dell'energia). Lo spessore totale dell'atmosfera è equivalente a 26 lunghezze di radiazione e il processo di cascata elettromagnetica ha il suo massimo di intensità tra i 15 ed i 10 km di altezza dalla superficie terrestre.

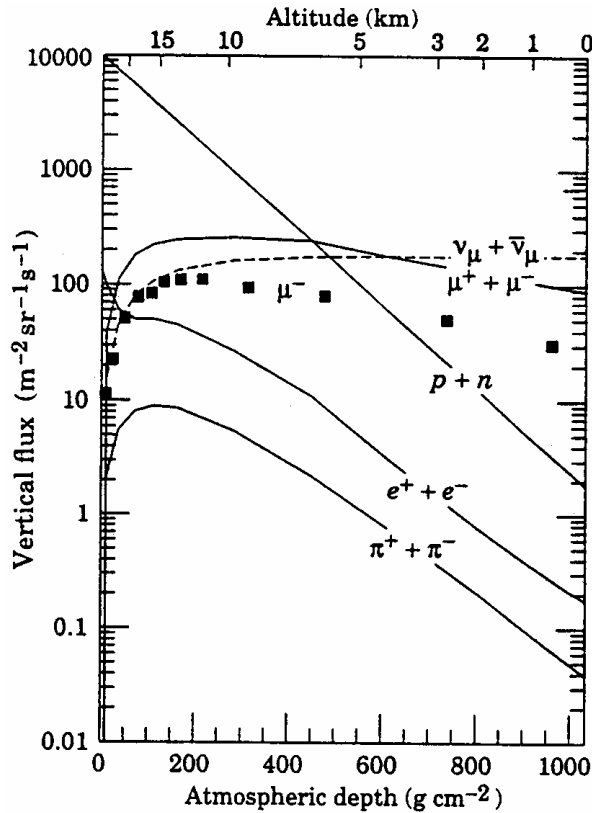


Fig. 15.12 Flusso di varie componenti dei raggi cosmici in funzione della quota

L'intensità e la composizione della radiazione cosmica secondaria è una funzione dell'altitudine:

Nella tabella 15.6 è riportato un esempio di composizione di raggi cosmici a diverse altezze: si vede che a livello del mare essi sono composti essenzialmente da muoni, poi da elettroni e neutroni.

L'intensità della radiazione cosmica dipende anche dalla latitudine, fatto questo legato al campo magnetico terrestre (figura 15.13). Un particella carica che si muove in un campo magnetico ha una traiettoria circolare, con raggio ρ che dipende dal suo momento e dall'intensità del campo magnetico. Infatti:

$$\mathbf{F} = e\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}; \quad \mathbf{F} = m\mathbf{a}; \quad m\mathbf{v}^2/R = e\mathbf{v}B; \quad m\mathbf{v} = eB\rho; \quad \rho = m\mathbf{v}/eB = p/eB$$

$$\text{Se si esprime } p \text{ in MeV, } B \text{ in kgauss e } \rho \text{ in metri, si ha: } \rho(\text{m}) = \frac{p(\text{MeV})}{30 e B(\text{kgauss})}$$

Le particelle che si approssimano ai poli si muovono lungo le linee di forza magnetiche e vengono quindi scarsamente deviate, anche se hanno energia abbastanza bassa. Invece le particelle che si approssimano all'equatore si muovono perpendicolarmente alle linee di forza del campo magnetico e sono soggette alla massima deflessione. Pertanto all'equatore riusciranno a raggiungere la terra solo le particelle che hanno una energia superiore ad un certo valore. Una situazione intermedia si verifica a latitudini intermedie tra l'equatore ed i poli. L'energia limite

al di sotto della quale le particelle non raggiungono il suolo diminuisce spostandosi dall'equatore ai poli.

TABLE 1—The composition of cosmic rays $(\text{cm}^2 \cdot \text{s})^{-1}$ near solar maximum at 54° North geomagnetic latitude in terms of flux density versus atmospheric depth

Atm. Depth (g/cm^2)	Altitude ^a (km)	Muons	Electrons	Protons	Charged Pions	Neutrons
20	26.7	2.11×10^{-3}	4.33	7.12×10^{-1}	1.74×10^{-3}	8.02
50	20.8	6.64×10^{-3}	5.07	6.30×10^{-1}	4.78×10^{-3}	1.09×10
100	16.3	1.01×10^{-1}	3.94	4.56×10^{-1}	6.88×10^{-3}	1.06×10
150	13.7	1.13×10^{-1}	2.74	3.21×10^{-1}	6.92×10^{-3}	7.91
200	11.9	1.11×10^{-1}	1.82	2.21×10^{-1}	5.93×10^{-3}	5.86
250	10.5	1.03×10^{-1}	1.19	1.49×10^{-1}	4.70×10^{-3}	4.19
300	9.31	9.34×10^{-2}	7.71×10^{-1}	1.00×10^{-1}	3.60×10^{-3}	2.94
350	8.26	8.33×10^{-2}	4.00×10^{-1}	6.67×10^{-2}	2.68×10^{-3}	2.04
400	7.33	7.16×10^{-2}	3.19×10^{-1}	4.40×10^{-2}	1.89×10^{-3}	1.38
450	6.50	6.31×10^{-2}	2.08×10^{-1}	2.90×10^{-2}	1.34×10^{-3}	9.33×10^{-1}
500	5.73	5.56×10^{-2}	1.36×10^{-1}	1.90×10^{-2}	9.46×10^{-4}	6.27×10^{-1}
550	5.02	4.92×10^{-2}	9.04×10^{-2}	1.24×10^{-2}	6.57×10^{-4}	4.18×10^{-1}
600	4.35	4.31×10^{-2}	5.89×10^{-2}	8.10×10^{-3}	4.46×10^{-4}	2.75×10^{-1}
650	3.75	3.84×10^{-2}	4.00×10^{-2}	6.23×10^{-3}	3.04×10^{-4}	1.81×10^{-1}
700	3.17	3.44×10^{-2}	2.77×10^{-2}	3.35×10^{-3}	2.05×10^{-4}	1.19×10^{-1}
750	2.62	3.10×10^{-2}	1.95×10^{-2}	2.13×10^{-3}	1.38×10^{-4}	7.72×10^{-2}
800	2.10	2.81×10^{-2}	1.41×10^{-2}	1.36×10^{-3}	9.22×10^{-5}	5.02×10^{-2}
850	1.62	2.56×10^{-2}	1.05×10^{-2}	8.67×10^{-4}	6.14×10^{-5}	3.25×10^{-2}
900	1.15	2.34×10^{-2}	8.07×10^{-3}	5.55×10^{-4}	4.07×10^{-5}	2.10×10^{-2}
950	0.71	2.15×10^{-2}	6.36×10^{-3}	3.56×10^{-4}	2.69×10^{-5}	1.35×10^{-2}
1033	0.00	1.90×10^{-2}	4.55×10^{-3}	1.71×10^{-4}	1.34×10^{-5}	6.46×10^{-3}

^a Mean altitude of given pressure level according to U. S. Standard Atmosphere

Tab. 15.9 Composizione dei raggi cosmici in funzione della quota

Lo spettro energetico dei raggi cosmici varia quindi in funzione della latitudine. Vi è anche un effetto asimmetrico Est-Ovest (figura 15.14), sempre dovuto al campo magnetico terrestre, legato alla carica delle particelle: in questo caso vi sono due energie limite, una minima ma anche una massima. Prendiamo come esempio un elettrone che incide sul piano equatoriale. Dalla figura si vede che nel punto P arriveranno da Ovest solo positroni con energia maggiori di 10 GeV: gli altri saranno deviati. Da Est invece arriveranno solo positroni con energie minori di 60 GeV: pertanto l'intervallo di energia dei positroni sul piano equatoriale va da 10 a 60 GeV (lo stesso vale per gli elettroni).

A latitudini diverse l'effetto del campo magnetico sarà diverso, ma varierà anche la penetrazione nell'atmosfera a causa della inclinazione delle traiettorie. Si vede

dalla figura 15.15 che le "isocosme" sono molto simili all'andamento dei paralleli geomagnetici e non a quelli geografici.

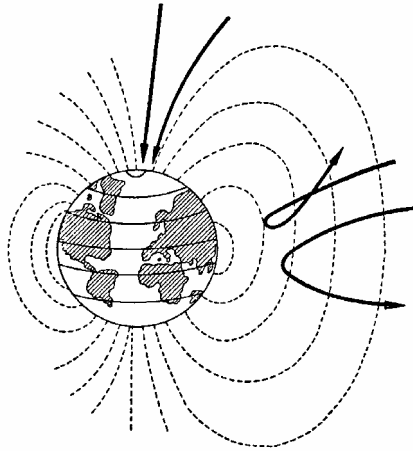


Fig. 15.13 L'effetto del campo magnetico terrestre sullo spettro dei raggi cosmici

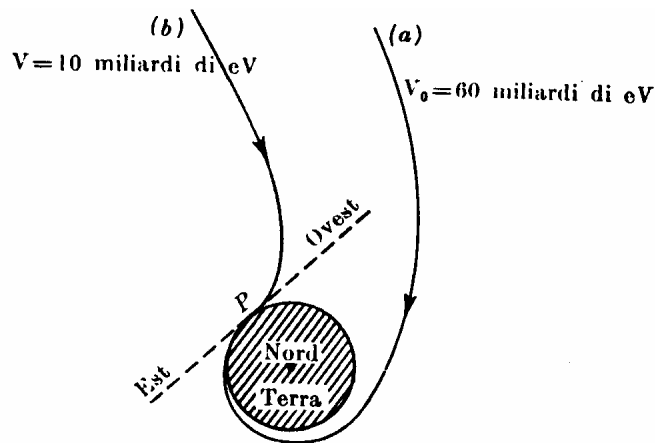


Fig. 15.14 L'effetto del campo magnetico terrestre sull'energia massima dei raggi

Le distribuzioni angolari (figura 15.16) delle varie componenti della radiazione hanno un massimo a 90° , cioè sono diretti lungo la verticale con un andamento del tipo $\cos^n \vartheta$, dove ϑ è l'angolo rispetto alla verticale; $n \approx 2.1$ per i muoni e $n \approx 3-5$ per elettroni e nucleoni.

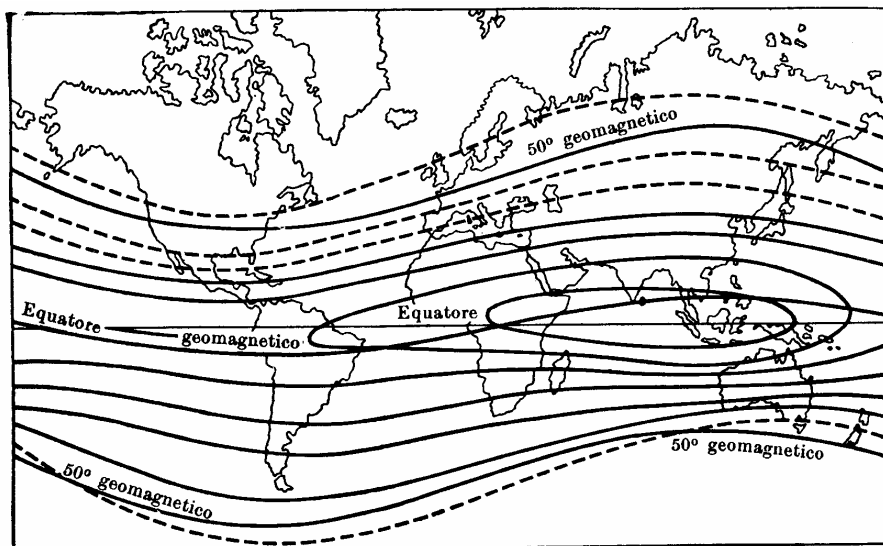


Fig. 15.15 L'effetto del campo magnetico terrestre sull'intensità del flusso dei raggi cosmici

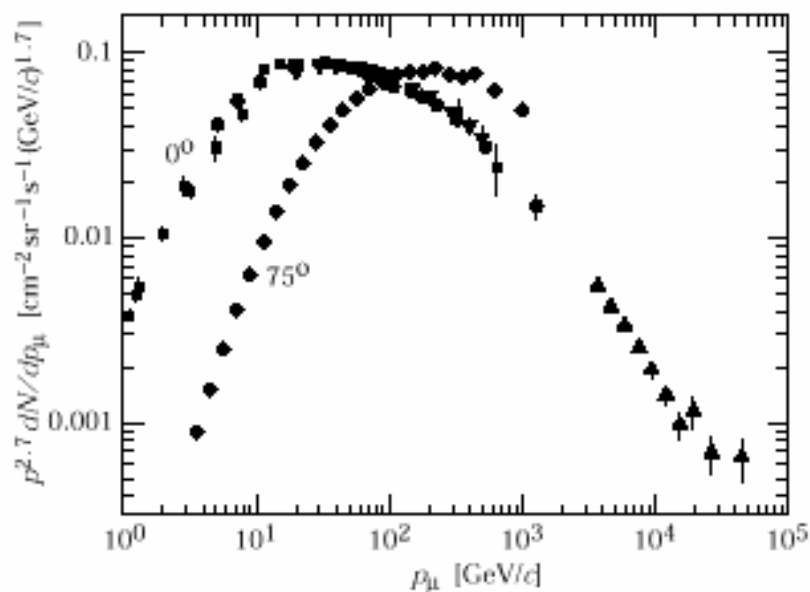


Fig. 15.16 Lo spettro dei raggi cosmici in funzione dell'angolo azimutale

L'intensità della radiazione cosmica è funzione del tempo. Ricordiamo che non vi è solo la radiazione secondaria, ma anche la radiazione primaria, composta da protoni (80%), particelle alfa (20%), nuclei più pesanti (1%) ed elettroni (1%) ad energia tipiche tra 10^8 e 10^{11} eV, ma che arriva fino a 10^{20} eV. Questa radiazione è approssimativamente costante nel tempo, ma nell'ambiente vicino alla terra risente dell'influsso dei campi magnetici dovuti all'attività solare che hanno una periodicità

di circa 200 anni. Inoltre il momento magnetico terrestre (e quindi il campo magnetico) varia nel tempo con una periodicità di 8000 anni a causa del fenomeno della precessione degli equinozi.

Nelle figure 15.17 e 15.18 è riportato rispettivamente lo spettro di energia integrale dei muoni e dei neutroni a livello del mare. Spettro integrale significa che il valore in ordinata fornisce il numero di muoni o neutroni aventi energia maggiore del corrispondente valore in ascissa. Si vede quindi che circa il 90% dei muoni hanno una energia tra 0.2 e 20 GeV.

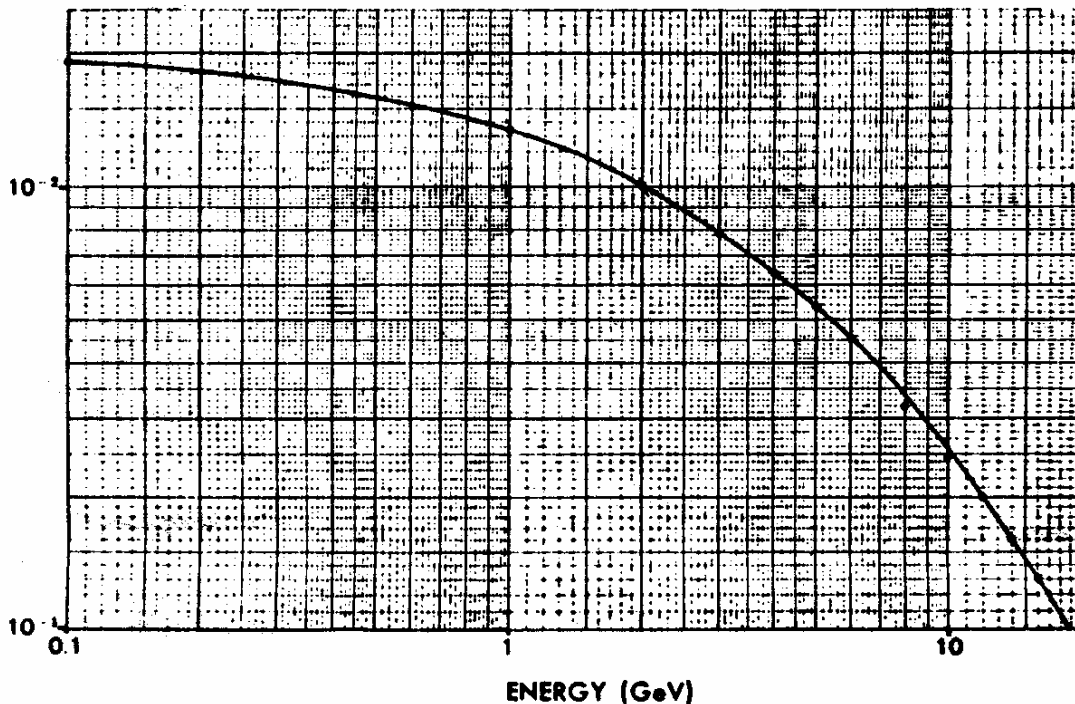
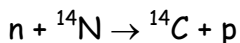


Fig. 15.17 Spettro integrale dei muoni cosmici a livello del mare

15.7 Il ^{14}C

Il nucleo ^{14}C , pur avendo un $T_{1/2}=5600$ y, quindi molto più breve dell'età della terra, è presente in una quantità costante, rappresentando la frazione $f=1.2\cdot 10^{-12}$ del Carbonio naturale. Esso viene continuamente prodotto in una serie di reazioni indotte dai neutroni dei raggi cosmici e si trova in una condizione di equilibrio tra produzione e decadimento. Vedremo in dettaglio la dinamica di produzione quando parleremo delle tecniche di datazione con elementi radioattivi. Per ora elenchiamo solo le reazioni responsabili della produzione di ^{14}C .



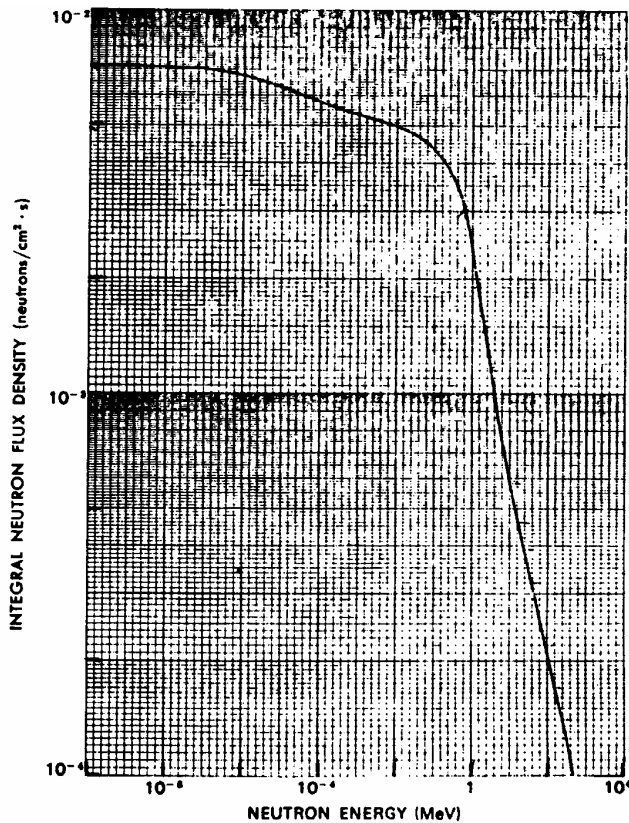
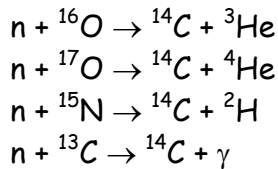


Fig. 15.18 Spettro integrale dei neutroni cosmici a livello del mare

15.8 Il Radon ${}^{222}\text{Rn}$

Il ${}^{222}\text{Rn}$ discende per decadimento alfa dal ${}^{226}\text{Ra}$ contenuto nelle rocce terrestri ed essendo allo stato gassoso, in presenza di falde o spaccature, può diffondere ed arrivare in superficie. La concentrazione di Radon nell'aria dipende da molti fattori e può variare fortemente a seconda del tipo di area geografica e delle condizioni atmosferiche (umidità, pioggia, neve, giorno-notte, ecc.ecc.) essendo il Radon essenzialmente emanato dal suolo. L'umidità, come anche la minore temperatura notturna, tendono a far diminuire la concentrazione di Radon in superficie in quanto rallentano l'evaporazione. La pioggia invece provoca un aumento della concentrazione di Radon vicino alla superficie terrestre in quanto questo esso può legarsi elettrostaticamente alle gocce d'acqua e quindi precipitare al suolo anche da quote più alte. La neve invece crea una copertura in grado di rallentare la diffusione del

Radon dal sottosuolo. Per avere una idea della quantità di Radon presente nell'aria possiamo prendere il valor medio, che vale $150 \text{ pCi/m}^3 = 5.5 \text{ Bq/m}^3$ vicino alla superficie terrestre. Le piante assorbono i radionuclidi disciolti in acqua selezionandoli. Ad esempio le foglie del grano esalano ^{222}Rn in quantità superiore a quella esalata dal suolo nel quale è coltivato. Il Radon è anche emanato da materiali da costruzione, in quanto questi contengono ^{226}Ra . Esempi significativi sono costituiti da materiali di origine vulcanica (tufo) utilizzati in Italia soprattutto Lazio ed in Campania. L'esistenza di Radio nel calcestruzzo e nel gesso, materiali tra l'altro molto porosi, contribuisce alla presenza di Radon all'interno degli edifici. Il Radon costituisce un elemento di rischio per la popolazione in quanto staziona in ambienti chiusi: la sua concentrazione è spesso maggiore all'interno degli edifici piuttosto che all'aria aperta. Specie negli Stati Uniti, dove le case sono raramente in muratura, il Radon penetra dal sottosuolo nei locali abitati e, a causa dello scarso ricambio d'aria, la sua concentrazione può aumentare fino a livelli pericolosi. Il Radon, come tutti i gas, è solubile in acqua, ove può trovarsi (specie nelle acque minerali) anche in quantità molto elevate. Le acque scorrono, assorbono dalla roccia il Radon (prodotto di decadimento del Radio) e lo trascinano con se. Fortunatamente la vita media del Radon è bassa ($T_{1/2} = 3.82 \text{ d}$), tanto che ogni decina di giorni l'attività decresce di un ordine di grandezza. Naturalmente le acque dolci mostrano una concentrazione di Radon molto maggiore che l'acqua di mare: nelle prime può raggiungere i 2 Bq/l (nel suolo essa vale 33 Bq/kg), nella seconda essa è dell'ordine di $2 \cdot 10^{-3} \text{ Bq/l}$.

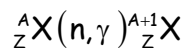
15.9 Radioattività interna nell'uomo

- L'uomo medio contiene circa 140 grammi di Potassio, ingerito attraverso i cibi al ritmo di circa 2.5 grammi al giorno. Il ^{40}K costituisce lo 0,012% del Potassio naturale, e la quantità presente all'interno del corpo umano vale pertanto 1,7 mg, per una attività totale $a = N \cdot \lambda = \frac{N_0}{A} m \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \approx 5 \cdot 10^3 \text{ Bq}$ ($0.13 \text{ } \mu\text{Ci}$)
- L'uomo medio ha un volume equivalente di 60 litri d'acqua e contiene circa 0.33 Bq (9 pCi) di ^{222}Rn .
- Il ^{226}Ra , così come il ^{228}Ra , l'Uranio ed il ^{210}Pb . I primi due vengono ingeriti principalmente attraverso il cibo, mentre il ^{210}Pb anche attraverso il fumo delle sigarette e l'esalazione di gas di scarico di motori a combustione. Il Radio e l'Uranio si distribuiscono in tutto il corpo, specie nelle ossa mentre il Piombo si accumula principalmente nell'intestino e nella pelle.
- A causa delle esplosioni nucleari e degli incidenti occorsi in passato a centrali nucleari, oggi esistono nell'ambiente anche prodotti di fissione. I più importanti e diffusi sono ^{137}Cs , ^{90}Sr e ^{131}I . Essi vengono ingeriti attraverso cibi e bevande. Il Cesio si deposita uniformemente in tutto il corpo, lo Stronzio si accumula prevalentemente nelle ossa, lo Iodio quasi esclusivamente nella tiroide.

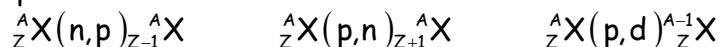
- ^{14}C e ^3H , essendo composti delle molecole organiche vengono uniformemente distribuiti in tutti i tessuti esattamente come il Carbonio e l'Idrogeno stabili.

15.10 Sorgenti radioattive artificiali

Nonostante siano già presenti in natura, data l'enorme applicabilità delle tecniche nucleari, l'uomo produce anche artificialmente sorgenti radioattive e fasci di radiazione. Esse vengono create attraverso reazioni nucleari opportune. La reazione più importante è la cattura neutronica



Altre reazioni importanti sono:



Le reazioni indotte da neutroni sono in genere esoenergetiche e possono quindi avvenire anche con neutroni termici, quelle indotte da protoni avvengono con energie di protone fino a 10 MeV. Per energie maggiori di 10÷20 MeV diventano predominanti le reazioni nel cui stato finale sono presenti più di due particelle, come le reazioni (p,2p), (p,2n), (p,3n).

Altre reazioni utilizzate per la produzione di radioisotopi (in genere però hanno sezioni d'urto molto più basse) sono quelle indotte da fotoni, come le (γ, p) e le (γ, n) . Gli isotopi prodotti a seguito di reazioni (γ, n) , a seguito della emissione di un neutrone sono stabili oppure sono emettitori β^+ . Gli isotopi prodotti a seguito di reazioni (γ, p) sono stabili o sono emettitori β^- . Ad esempio:

$^{12}\text{C}(\gamma, n) ^{11}\text{C}$, dove il ^{11}C decade β^+

$^{12}\text{C}(\gamma, p) ^{11}\text{B}$, dove il ^{11}B è stabile.

La sezione d'urto delle fotoreazioni con emissione di un solo nucleone ha un massimo in corrispondenza della cosiddetto Risonanza Gigante attorno a 20 MeV per nuclei leggeri e attorno ai 10 MeV per i nuclei pesanti. Ad energie maggiori della R.G. sono possibili reazioni $(\gamma, 2n)$, (γ, pn) , (γ, α) che però hanno sezioni d'urto molto basse. Alcuni esempi di produzione di isotopi sono riportati qui sotto:

Isotopo radioattivo	Principale metodo produzione
^3H	$^6\text{Li}(n, \alpha)$
^{14}C	$^{14}\text{N}(n, p)$
^{24}Na	$^{23}\text{Na}(n, \gamma)$
^{32}P	$^{31}\text{P}(p, n)$
^{59}Fe	$^{59}\text{Fe}(n, \gamma)$ $^{59}\text{Co}(n, p)$
^{60}Co	$^{59}\text{Co}(n, \gamma)$
^{90}Sr	fissione di ^{235}U
^{131}I	$^{130}\text{Te}(n, \gamma)$ fissione di ^{235}U
^{137}Cs	fissione di ^{235}U $^{137}\text{Ba}(n, p)$
^{198}Au	$^{197}\text{Au}(n, \gamma)$

I fasci di particelle (γ , n, p, d, α) possono essere realizzati per lo studio delle reazioni nucleari o per la produzione di radioisotopi. Distingueremo nel seguito tra:

- produzione di elettroni e fotoni;
- produzione di particelle cariche (p, d, α e ioni più pesanti)
- produzione di neutroni.

Parleremo nel seguito della produzione di fasci di elettroni, fotoni, e particelle cariche. In questo capitolo accenneremo invece alla produzione di sorgenti o fasci di neutroni.

I principali metodi per produrre fasci di neutroni sono:

- i) le reazioni nucleari iniziate da particelle emesse da sostanze radioattive;
- ii) le reazioni nucleari iniziate da particelle prodotte con macchine acceleratrici;
- iii) la reazione a catena nella fissione controllata.

Il primo metodo non fornisce sorgenti molto intense. Esempio di questa reazione è: ${}^9_4\text{Be}(\alpha, n){}^{12}_6\text{C}$. Le particelle α sono emesse da una sorgente radioattiva, come per esempio ${}^{226}_{88}\text{Ra}$, ${}^{241}_{95}\text{Am}$ oppure ${}^{208}_{84}\text{Po}$. La sorgente in pratica si ottiene miscelando la sorgente radioattiva (che funge da macchina acceleratrice) con il ${}^9\text{Be}$ (che funge da bersaglio). La reazione (α , n) su ${}^9\text{Be}$ è esotermica, e si ottengono neutroni di energia di 5÷6 MeV.

Un primo esempio del secondo metodo sono tutte le fotoreazioni (γ , n) iniziate da fotoni di qualche decina di MeV;

un secondo esempio è la reazione: ${}^3\text{He} + {}^3\text{H} \rightarrow {}^4\text{He} + \text{n}$, reazione esotermica con sviluppo di 17.6 MeV di energia. Trattandosi di reazione a due corpi, anche questi neutroni hanno energia definita dipendente dall'angolo di emissione.

Infine, per la produzione di neutroni attraverso il meccanismo della fissione controllata, si utilizzano reattori nucleari. Abbiamo già discusso i meccanismi della fissione, qui accenneremo brevemente ai componenti essenziali di un reattore nucleare a neutroni lenti. Essi sono:

- il combustibile nucleare, che può essere ${}^{235}\text{U}$ nella percentuale in cui si trova in natura (0.7%) oppure in percentuale maggiore (Uranio arricchito), oppure ${}^{239}\text{Pu}$.
- il moderatore, materiale che serve a rallentare i neutroni fino a renderli termici: esso è indispensabile perché la sezione d'urto di fissione per lo ${}^{235}\text{U}$ aumenta al diminuire dell'energia ed è sensibilmente diversa da zero solo per neutroni termici. Il moderatore è generalmente acqua pesante (D_2O) o grafite in quanto, come vedremo in seguito, il neutrone termalizza tanto più rapidamente quanto più leggero è il nucleo contro il quale urta in quanto maggiore è l'energia persa per ogni urto. Non si usa l'Idrogeno perché con questo la reazione più probabile è la formazione di deuterio e la scomparsa del neutrone: ${}^1\text{H}(n, \gamma){}^2\text{H}$
- le barre di controllo costituite da materiale che assorbe facilmente neutroni (per esempio il Cadmio): esse servono per controllare la reazione a catena e rallentarla o, al limite, arrestarla.

Capitolo 16

Gli acceleratori di particelle

16.1 Generalità

Quando nel 1919 Rutherford dimostrò che l'atomo di Azoto può essere disintegrato dalle particelle alfa provenienti dal Radio e dal Torio ($\alpha + {}^{14}\text{N} \rightarrow {}^{17}\text{O} + \text{p}$) rivelando protoni ed ossigeno tra i prodotti di reazione, si aprì l'era della disintegrazione artificiale dei nuclei. Iniziò lo studio sistematico dei metodi possibili per creare proiettili accelerati artificialmente. Per la prima volta nel 1932 Cockroft e Walton ottengono protoni accelerati da un campo elettrostatico a 400 keV con i quali disintegrano il Litio mediante la reazione: $\text{p} + {}^7\text{Li} \rightarrow 2\alpha$.

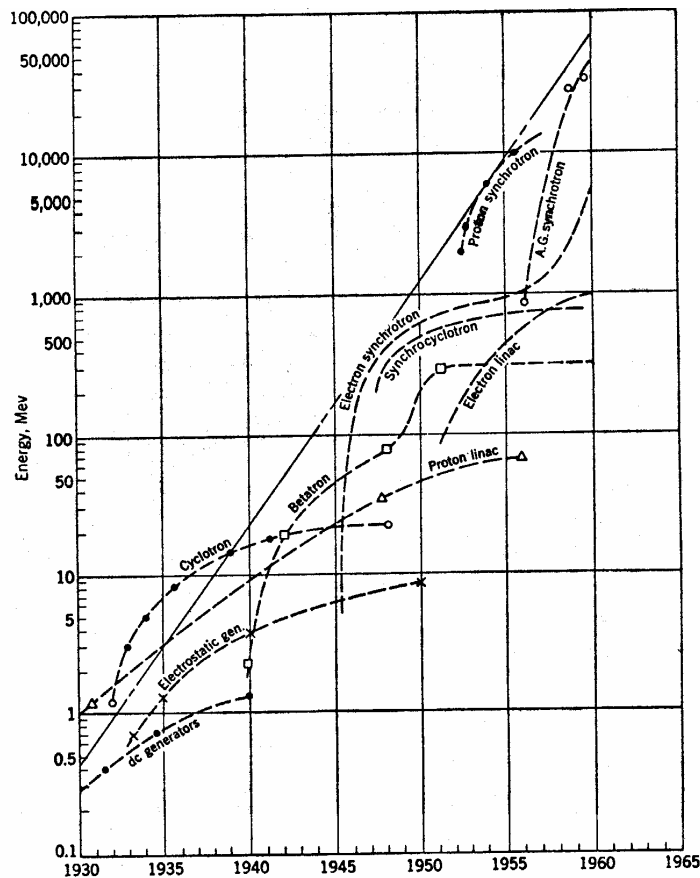


Fig. 16.1 Evoluzione delle macchine acceleratrici

L'aumento dell'energia degli acceleratori è stato ovviamente (per ragioni tecnologiche e di costo) graduale nel tempo: lo sviluppo degli acceleratori si può considerare parallelo

al progresso industriale tecnologico elettronico e meccanico. Dal grafico di figura 16.1 si nota che, almeno per i primi trenta anni, si è avuto un aumento di energia di un ordine di grandezza ogni sei anni.

Oggi esistono macchine che accelerano protoni fino ad energie di 450 GeV (SPS, Super Proto Sincrotrone del CERN) ed è in costruzione, sempre al CERN in un tunnel sotterraneo a 100 metri di profondità (figura 16.2), un enorme anello di ben 27 chilometri di circonferenza, che accelererà due fasci incrociati di protoni fino ad una energia di 7 TeV (7000 GeV !) ciascuno, e potrà far collidere fasci di ioni pesanti (fino al piombo) con una energia totale di collisione di 1250 TeV, circa trenta volte più alta di quella ottenibile al RHIC (Relativistic Heavy Ion Collider) attualmente in costruzione presso il laboratorio di Brookhaven in USA.



Fig 16.2 l'acceleratore LHC del CERN

Un primo tipo di acceleratori sfrutta l'applicazione di una alta differenza di potenziale usando un grosso elettrodo terminale e distribuendo il potenziale lungo la colonna di accelerazione (Cockroft Walton, Van de Graaf). Un secondo tipo sfrutta invece una differenza di potenziale relativamente bassa ma costringe le particelle ad essere soggette più volte ad essa (ciclotrone, microtrone, Linac, sincrotrone). Nel terzo tipo (betatrone) l'accelerazione è ottenuta sfruttando la variazione di flusso del campo magnetico nella zona dell'orbita delle particelle. Nella tabella che segue sono elencati i vari tipi di acceleratore.

Tabella 4.1. Classificazione degli acceleratori.

<i>Acceleratore</i>	<i>Particella accelerata</i>	E	H	<i>Orbita</i>	<i>Energia max in MeV</i>
Elettrostatico o Van De Graaff	<i>e, p, d, α</i> o altre	Costante	Nulla	Rettilinea	12
Tandem Van De Graaff	<i>p, α</i> o altre	Costante	Nulla	Rettilinea	21
Circuito moltiplicatore, o Cockroft-Walton	<i>e, p, d, α</i>	Costante	Nulla	Rettilinea	4
Betrone	<i>e</i>	Nulla	Variabile	Circolare	300
Ciclotrone	<i>p, d, α</i>	ω fisso	Costante	Spirale	25 per <i>p</i>
Ciclotroni focalizzati a settori	<i>p, d, α</i> o altre	ω fisso	Variabile con θ	Spirale a settori	75 per <i>p</i>
Sincrociclotrone	<i>p</i>	ω variabile	Costante	Spirale	700
Sincrotrone	<i>e</i>	ω fisso	Variabile	Circolare	10^4
Protosincrotrone	<i>p</i>	ω variabile	Variabile	Circolare	10^4
Protosincrotrone a focalizzazione forte	<i>p</i>	ω variabile	Variabile	Circolare	3×10^4
Acceleratore lineare (rf)	<i>p, d</i>	$\omega \sim 200-800$ Mc sec^{-1}	Nulla	Rettilinea	800
Acceleratore lineare convenzionale	<i>e</i>	$\omega \sim 3000 \text{ Mc sec}^{-1}$	Nulla	Rettilinea	2×10^4
Ioni pesanti (Linac)	$^{12}\text{C}, ^{16}\text{O},$ ecc.	$\omega \sim 70 \text{ Mc sec}^{-1}$	Nulla	Rettilinea	$10 \times A$ dello ione

Tab. 16.1 I vari tipi di acceleratori

16.2 La Sorgente

Negli acceleratori di elettroni la sorgente è essenzialmente un filamento che, opportunamente riscaldato, emette elettroni per effetto termoionico.

Negli acceleratori di protoni o in generale di ioni la sorgente è costituita da una cella contenente l'elemento che si vuole accelerare in forma gassosa. Esso viene colpito da

un fascio di elettroni di energia cinetica almeno uguale all'energia di ionizzazione del gas. L'intensità I di ioni prodotti è funzione della intensità di elettroni I_0 , della densità del gas e del percorso che gli elettroni fanno nel gas.

$$I = I_0 \frac{e^{\alpha x}}{1 - \gamma(e^{\alpha x} - 1)}$$

γ è il numero medio di elettroni secondari prodotti per atomo di gas: dipende dall'energia degli elettroni primari e dalla pressione del gas. Per $\gamma = 0$ (ossia se non vengono prodotti secondari): $I = I_0 e^{\alpha x}$

α è il coefficiente di proporzionalità nella relazione: $dN = \alpha \cdot N \cdot dx \rightarrow N = N_0 e^{\alpha x}$

Per $\gamma(e^{\alpha x} - 1) = 1$, ossia per $\gamma = (e^{\alpha x} - 1)^{-1}$ si ha la cosiddetta cascata, ossia un effetto di automantenimento della scarica nel gas.

Gli ioni prodotti devono infine essere estratti per essere poi accelerati. Nella figura 16.3 è mostrata schematicamente una sorgente di ioni.

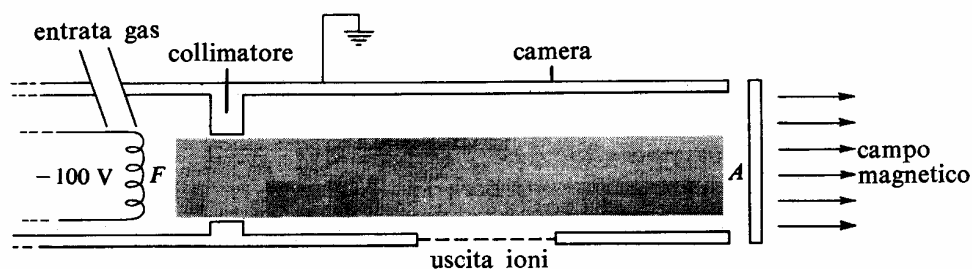


Fig. 16.3 La sorgente di ioni

Gli elettroni, emessi dal filamento F a $V = -100V$ accelerano verso l'anodo A spiralizzando attorno alle linee di forza del campo magnetico. Gli elettroni formano ioni positivi per urti nel gas presente nella camera. Il miscuglio di ioni positivi ed elettroni, chiamato plasma, riempie la regione ombreggiata. Gli ioni positivi sono estratti dal plasma attraverso l'apertura.

16.3 Amplificatore di tensione Cockroft-Walton

Il dispositivo è mostrato in figura 16.4. Un trasformatore invia corrente alternata di una certa tensione in un apparato rettificatore e moltiplicatore. Con questo sistema si raggiungono tensioni anche di 10^6 Volt. Esso è spesso usato come alimentatore di iniettori (pre-acceleratori) per macchine acceleratrici di alta energia.

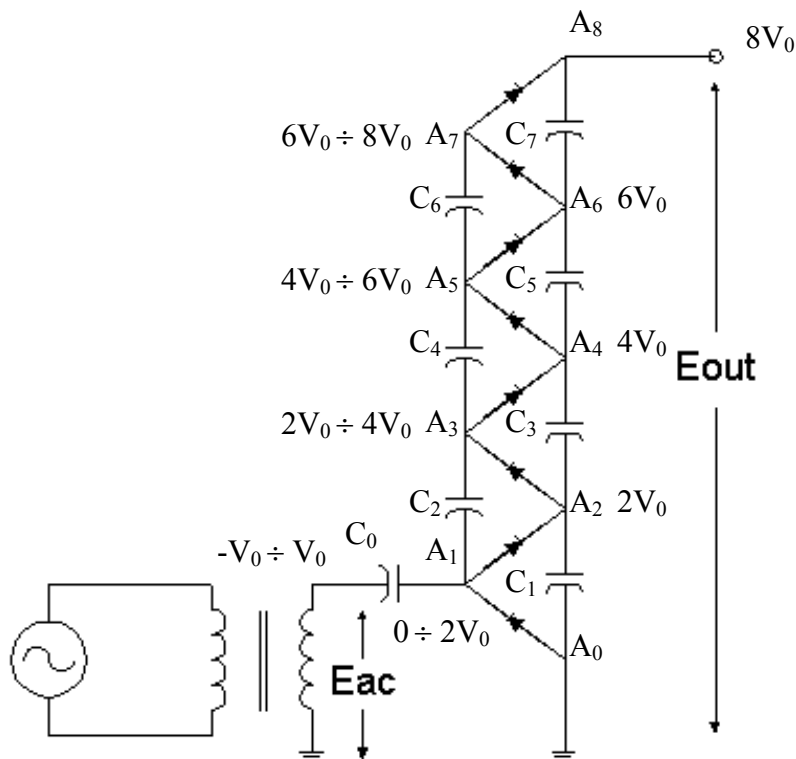


Fig. 16.4 L'amplificatore di tensione Cockcroft-Walton

La capacità C_1 si carica attraverso il raddrizzatore fino al momento in cui il potenziale A_1 non scende sotto lo 0. Poiché $2V_0$ è la variazione ai capi del trasformatore di alimentazione, il potenziale in A_1 varia dunque da 0 a $2V_0$. Allo stesso modo C_2 si caricherà attraverso il secondo raddrizzatore finché il potenziale in A_2 resta superiore a $2V_0$. Poiché il potenziale in A_0 è costante (ed uguale a 0), quello in A_2 sarà anch'esso costante ed uguale a $2V_0$. Il ragionamento si ripete passo passo e la tensione di un generatore di N fasi composto di $2N$ condensatori e di $2N$ raddrizzatori ideali sarà dunque uguale a $2N V_0$.

16.4 Acceleratore Van de Graaf

Il primo modello fu presentato nel 1931: esso poteva arrivare ad una differenza di potenziale di 1.5 MV. Nel 1940 fu presentata una versione che raggiungeva i 2.75 MV; attualmente si hanno acceleratori Van de Graaf con differenza di potenziale $10 \div 20$ MV. Il principio di funzionamento è descritto nel seguito (figure 16.5 e 16.6). Un motore fa girare una cinghia che si trova inizialmente a potenziale zero ed isolata da terra. Una corona di punte (a potenziale positivo o negativo a seconda del segno del potenziale di alta tensione che si vuole ottenere) è posta di fronte alla cinghia e

produce una scarica a corona ionizzando il gas circostante, cosicché gli ioni prodotti di segno opposto al potenziale della punta vengono respinti da questa, si depositano sulla cinghia dove sono raccolti e trasportati verso il terminale: un apposito sistema mette in contatto per strofinio la calotta metallica con la cinghia e raccoglie le cariche, che compariranno sulla superficie metallica esterna del terminale. Questo si carica elettrostaticamente ad un potenziale $V=Q/C$, C essendo la sua capacità elettrica. La differenza di potenziale del terminale viene poi distribuita lungo il tubo accelerante tramite un partitore resistivo. La cinghia deve continuare a portare carica per compensare la corrente che fluisce attraverso il partitore.

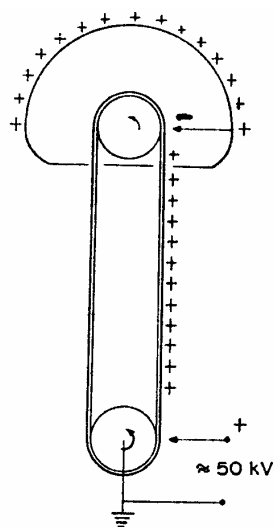


Fig. 16.5 Particolare della cinghia del Van de Graaf

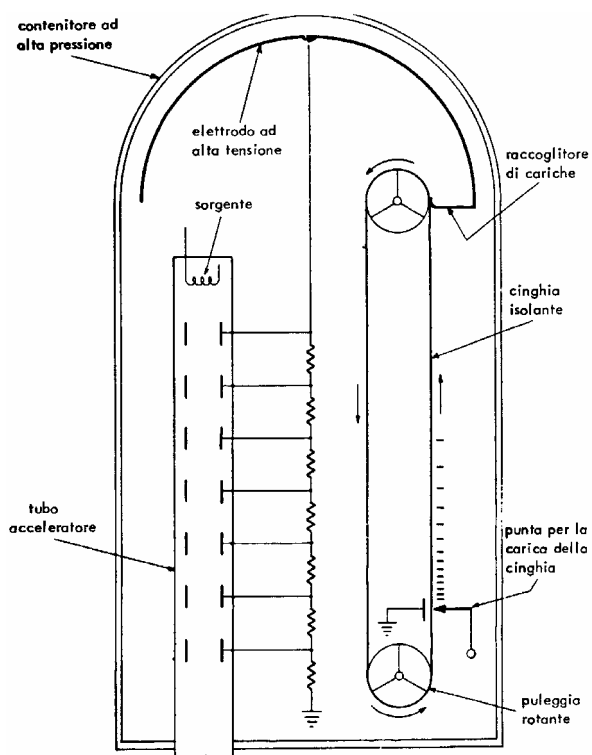


Fig. 16.6 Schema dell'acceleratore Van de Graaf

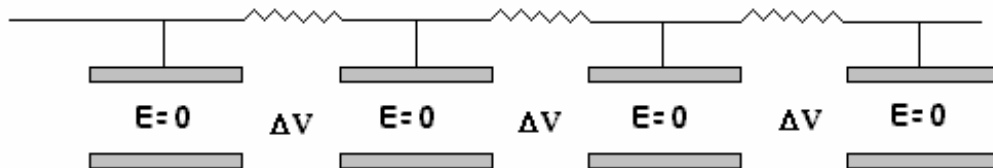


Fig. 16.7 Particolare del tubo accelerante

Le particelle, nella linea da vuoto, passano attraverso vari elementi metallici a forma di tubi come illustrato in sezione figura 16.7.

La differenza di potenziale tra gli elementi è stabilita tramite il partitore resistivo posto tra il terminale ad alta tensione e terra. All'interno dei tubi il campo elettrico è nullo e le particelle sono accelerate solo nei tratti tra due tubi successivi. Le linee di forza del campo elettrico hanno tra l'altro, sagomando opportunamente i tubi acceleranti, un potere focalizzante sulle particelle del fascio. Se il tubo in ingresso presenta una superficie piana con un foro al centro, le linee di forza vengono modificate come mostrato in figura 16.8.

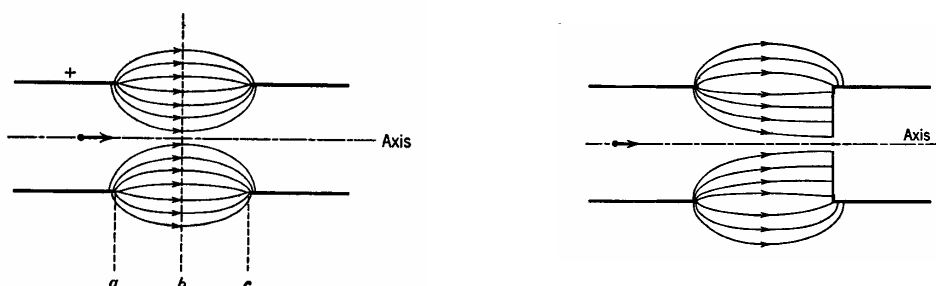


Fig. 16.8 Effetto di focalizzazione delle linee del campo elettrico E

16.5 Acceleratore tandem

È ancora un Van de Graaf, ma lo ione può acquistare energia almeno doppia in quanto la differenza di potenziale realizzata viene sfruttata due volte grazie ad un trucco. Nel tandem la sorgente cede (anziché toglie) elettroni agli atomi del fascio, che partono quindi con una carica netta negativa e sono accelerati verso il potenziale (positivo) prodotto dal Van de Graaf. A metà del tubo accelerante, dove giungono con una energia cinetica pari a eV , gli ioni del fascio incontrano un sottilissimo foglietto (stripper) con il quale interagiscono e dal quale emergono ionizzati positivamente, pronti per essere nuovamente accelerati verso il potenziale zero. Lo schema di funzionamento è indicato in figura 16.9 Se gli elettroni persi nella interazione con lo stripper sono φ , l'energia cinetica finale degli ioni del fascio sarà:

$$T_{fin} = eV + \varphi eV = (\varphi + 1)eV.$$

In genere dopo l'attraversamento dello stripper il fascio emerge dalle sezioni acceleranti con diversi stati di carica (la cui probabilità diminuisce all'aumentare di φ), e quindi possiede particelle con energie cinetiche differenti. Un magnete di raggio di curvatura opportuno posto all'uscita dalla sezione accelerante seleziona la carica degli ioni e quindi la loro energia cinetica T . Se il campo magnetico è perpendicolare alla

traiettoria delle particelle queste, soggette alla forza di Lorentz, seguiranno una traiettoria circolare di raggio R:

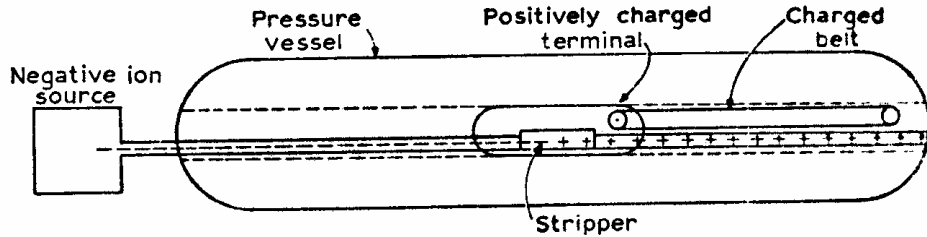


Fig. 16.9 Schema di alimentazione dell'acceleratore tandem

$$F = \varphi e v B = m \frac{v^2}{R} \quad p = mv = \varphi e B R \quad R = \frac{p}{\varphi e B}$$

Se in particolare p si misura in MeV/c, B in Tesla R in metri e la carica e si esprime in unità di cariche elettroniche si ha la semplice relazione:

$$p(\text{MeV}/c) = 300 \cdot \varphi \cdot B(\text{Tesla}) \cdot R(\text{metri})$$

ricordando che l'energia cinetica finale delle particelle, espressa in MeV e' data da:

$$E_c = (\varphi + 1)V \text{ (dove } V \text{ è data in Megavolt)}$$

possiamo scrivere:

$$p = \sqrt{2mE_c} = \sqrt{2m(\varphi + 1)V}$$

Il prodotto BR risulta quindi essere:

$$B \cdot R = \frac{p}{300 \cdot \varphi} = \frac{\sqrt{2m(\varphi + 1)V}}{300 \cdot \varphi}$$

Il raggio di curvatura della linea è ovviamente (per ragioni meccaniche) fisso e deve essere tale da poter accettare, al variare di B , quante più possibili masse di particelle e stati di carica diversi: in questo modo il tandem diventa un acceleratore unico per varie specie di ioni. L'espressione a secondo membro varia tra zero ed un valore massimo che dipende dal tipo di ioni che vogliamo accelerare. Come esempio supponiamo di voler produrre fasci di ioni con $1 < A < 40$ (cioè dai protoni al Calcio) alla massima tensione di 15 MVolt.

$$(B \cdot R)_{max} = \left(\frac{p}{300 \cdot \varphi} \right)_{max} = \frac{\sqrt{2m_{max}(\varphi + 1)V_{max}}}{300 \cdot \varphi} = \frac{\sqrt{4m_{max}V_{max}}}{300}$$

Si verifica infatti facilmente che il prodotto BR è massimo quando φ (intero) vale 1.

Nel caso del calcio $m_{max} = m_{Ca} = 37200 \text{ MeV}$, e quindi: $B \cdot R = 5$. E se ci limitiamo ad un campo magnetico di 1 Tesla ricaviamo che il raggio di curvatura del magnete deve

essere $R = 5$ m. Se con questo acceleratore vogliamo produrre un fascio ioni ${}^4\text{He}$ con uno stato di carica $\varphi = 2$ ed una energia finale di 40 MeV, dovremo scegliere la tensione del terminale V ed il campo magnetico B in modo che:

$$a) (\varphi + 1) \cdot V = 3V = 40 \rightarrow V = 13.3 \text{ MV}$$

$$b) B = \frac{1}{R} \frac{\sqrt{4 \cdot m_{\text{He}} \cdot 3 \cdot V}}{300 \cdot 2} = 0.26 \text{ T}$$

16.6 Ciclotrone

Il primo ciclotrone fu costruito nel 1932: esso era in grado di accelerare protoni fino a qualche MeV. Nel ciclotrone si ha una zona di campo magnetico costante nella quale i protoni o ioni percorrono traiettorie circolari. Il ciclotrone è diviso in due zone a forma di "D" (vedi figura 16.10) entro le quali si trova il campo magnetico, separate da una differenza di potenziale oscillante (radiofrequenza). La massima energia degli ioni è dell'ordine di 50÷100 MeV, quindi sono assenti gli effetti relativistici. Gli ioni percorrono una traiettoria a spirale in quanto, ad ogni passaggio nella sezione tra le due "D", vengono accelerati e si presentano nella zona successiva con una velocità maggiore. Il raggio dell'orbita aumenta con la velocità, ma il tempo t di percorrenza di una semicirconferenza è costante. Infatti:

$$F = evB = m \frac{v^2}{R} \quad mv = eBR \quad R = \frac{mv}{eB}$$

quindi: $t = \frac{\pi R}{v} = \frac{\pi m}{eB}$ risulta indipendente dalla velocità (e quindi dall'energia) della

particella. Il periodo di rivoluzione $T = 2t$ è dato da:

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{eB}$$

da cui si ricava: $f = \frac{eB}{2\pi m}$ e: $\omega = 2\pi f = \frac{e}{m} B$

La frequenza f , dell'ordine di qualche MHz, si chiama appunto "frequenza di ciclotrone". Per ottenere una accelerazione, ad ogni giro gli ioni devono presentarsi tra le due "D" in fase con la differenza di potenziale applicata, ossia il tempo richiesto da uno ione per percorrere mezza circonferenza deve essere uguale a metà del periodo del segnale di potenziale. La radiofrequenza applicata tra le due "D" ha quindi esattamente il valore della frequenza di ciclotrone. L'energia cinetica massima

ottenibile dipende dal raggio massimo e risulta essere: $T_{max} = \frac{p_{max}^2}{2m} = \frac{(eBR_{max})^2}{2m}$

Il campo oscillante ha in genere una differenza di potenziale pari a 200÷400 kV ed il numero totale di rivoluzioni degli ioni prima dell'estrazione è dell'ordine di un centinaio. Quando gli ioni hanno raggiunto l'energia desiderata e sono quindi sul raggio massimo

R_{max} , incontrano un campo elettrico diretto radialmente che bilancia la forza di Lorentz e seguono quindi una traiettoria rettilinea.

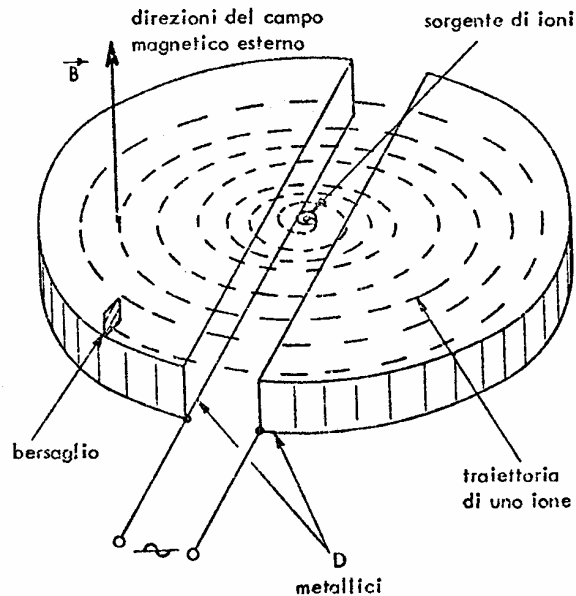


Fig. 16.10 Il ciclotrone

Se per esempio il raggio R vale un metro ed il campo magnetico $B = 2T$:

$$p_{max} = 300 \cdot B \cdot R_{max} = 600 \text{ MeV}/c; \quad E_c = \frac{p_{max}^2}{2m} = 190 \text{ MeV}$$

16.7 Sincrociclotrone

Il sincrociclotrone è essenzialmente un ciclotrone operante per particelle relativistiche per le quali la massa è una funzione della velocità: $m = m_0 \gamma$, $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$.

In questo caso la frequenza di ciclotrone $f = \frac{eB}{2\pi m}$ non è costante e quindi è necessaria

una radiofrequenza variabile. La relazione: $mv = eBR$ continua ad essere valida, ma adesso, con m variabile, possiamo scriverla in forma generale come $p = eBR$. Il periodo di rivoluzione sarà dato da:

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m R}{p} = \frac{2\pi m}{eB} = \frac{2\pi m_0 \gamma}{eB}$$

Il periodo aumenta con l'aumentare dell'energia in quanto il raggio, che è legato alla quantità di moto, aumenta più velocemente della velocità. Se sostituiamo $m = E/c^2$ e

scriviamo $E = m_0 c^2 + E_c$, indicando con E_c l'energia cinetica, vediamo che il valore di γ si ricava dalla seguente relazione:

$$E = mc^2 = m_0 c^2 \gamma = (m_0 c^2 + E_c) \text{ e vale: } \gamma = \frac{m_0 c^2 + E_c}{m_0 c^2} = 1 + \frac{E_c}{m_0 c^2}$$

dove E_c rappresenta l'energia cinetica. La frequenza risulta:

$$f = \frac{eB}{2\pi m_0 c^2 \gamma} = \frac{e c^2 B}{2\pi E} = \frac{e c^2 B}{2\pi (m_0 c^2 + E_c)} \quad \omega = 2\pi f = \frac{e c^2 B}{E} = \frac{e c^2 B}{(m_0 c^2 + E_c)}$$

La radiofrequenza deve quindi diminuire mano a mano che la particella aumenta la sua energia: essa è variata tramite una capacità variabile inserita nel circuito risonante.

I sincrociclotroni arrivano ad energie di dell'ordine del GeV.

Naturalmente per $E_c \ll m_0 c^2$ si ritorna nel caso non relativistico del ciclotrone.

16.8 Microtrone

Il microtrone, o ciclotrone per elettroni, tiene conto del fatto che gli elettroni sono relativistici, per cui il loro periodo di rivoluzione è nuovamente dato da:

$$T = \frac{2\pi m_0 \gamma}{eB} = \frac{2\pi E}{e c^2 B}$$

Una descrizione schematica del microtrone è data in figura 16.11, dove si vede che esiste un solo elemento accelerante nella gap tra i due elementi magnetici.

Il principio di funzionamento del microtrone si basa sulla condizione che il tempo richiesto per percorrere orbite successive aumenti secondo multipli del periodo di oscillazione del campo elettrico accelerante che indicheremo con T_{rf} . In questo modo gli elettroni raggiungono la cavità accelerante sempre in fase con la differenza di potenziale, qualunque sia la loro energia. Gli elettroni, emessi da un filamento, entrano nella cavità accelerante con una energia cinetica praticamente uguale a zero. All'interno della cavità sono accelerati una prima volta ed entrano nella zona del campo magnetico con una energia totale $E = m_0 c^2 + \Delta E$, dove $\Delta E = eV$ rappresenta l'energia acquistata nella cavità.

Essi percorrono il primo giro avendo una energia totale $E_1 = m_0 c^2 + \Delta E$, ed il tempo di rivoluzione (trascurando il tratto di percorso rettilineo nel traferro) vale quindi:

$$\tau_1 = \frac{2\pi}{e c^2 B} E_1 = \frac{2\pi}{e c^2 B} (m_0 c^2 + \Delta E) = \mu T_{rf} \quad (1)$$

dove T_{rf} è il periodo della radiofrequenza e μ un numero intero.

Notiamo che $\Delta E = eV$ rimane costante a tutti i giri successivi. Se consideriamo due giri successivi qualsiasi, la differenza del tempo di percorrenza può essere scritta come:

$$\Delta\tau = \frac{2\pi}{e c^2 B} (E_{n+1} - E_n) = \frac{2\pi}{e c^2 B} \Delta E = \nu T_{rf} \quad (2)$$

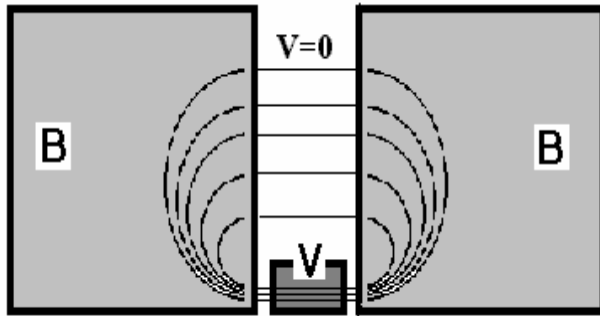


Fig. 16.11 Il microtrone

Imponiamo cioè che anche $\Delta\tau$ sia un multiplo del periodo della radiofrequenza.

Sottraendo membro a membro la (2) dalla (1):

$$\frac{2\pi m_0}{e \cdot B} = (\mu - \nu) T_{rf} \quad (3)$$

$$T_{rf} = \frac{2\pi m_0}{e \cdot B(\mu - \nu)} \quad (4)$$

Dividendo membro a membro la (1) per la (2):

$$\frac{m_0 c^2 + \Delta E}{\Delta E} = \frac{\mu}{\nu} \quad \Delta E = m_0 c^2 \frac{\nu}{\mu - \nu} \quad (5)$$

Tipicamente si hanno valori di ΔE di qualche centinaio di keV, radiofrequenze dell'ordine del GHz, campi magnetici dell'ordine del Tesla e raggi massimi di orbite dell'ordine del metro. Si raggiungono così energie di qualche centinaio di MeV

16.9 Elettrosincrotrone

Il primo elettrosincrotrone fu realizzato nel 1945.

L'elettrosincrotrone o sincrotrone per elettroni accelera elettroni ultrarelativistici, per i quali $\beta = 1$. Esso necessita di uno stadio di preaccelerazione, costituito in genere da un microtrone, da un betatrone o da un acceleratore lineare o linac (vedi nel seguito) che gli fornisca in ingresso elettroni relativistici. Per elettroni ultrarelativistici si può trascurare il contributo della massa a riposo (0.511 MeV) all'energia totale. L'energia cinetica risulta allora: $E_c \approx pc$. Nell'elettrosincrotrone gli elettroni si trovano sempre sulla stessa orbita. Ciò è ottenuto variando il campo magnetico mano a mano che l'energia degli elettroni cresce e accelerandoli tramite una opportuna differenza di potenziale. L'energia massima degli elettroni dipende dal raggio dell'orbita e dal campo massimo ottenibile. Essendo $\beta = 1$ e quindi $v = c$, il periodo

risulta: $T = \frac{2\pi R}{c}$, e rimane costante essendo l'orbita a raggio costante. La frequenza è inversamente proporzionale al raggio dell'orbita ed è data da: $f = \frac{c}{2\pi R} = \frac{47.8 \cdot 10^6}{R} \text{ Hz}$, con R espresso in metri.

Dalle relazioni $p = eBR$ e $E_c = pc$, si ottiene $E_c = ecBR$. Derivando: $\frac{dE_c}{dt} = ecR \frac{dB}{dt}$

Per un giro completo: $\frac{\Delta E_c}{T} = ecR \frac{dB}{dt}$

Ma essendo: $T = \frac{2\pi R}{c}$, si ha:

$$\Delta E_c = TecR \frac{dB}{dt} = 2\pi eR^2 \frac{dB}{dt}$$

Poiché l'incremento di energia cinetica dipende dal potenziale accelerante ($\Delta E_c = eV$), alla fine si ottiene la relazione:

$$V = 2\pi R^2 \frac{dB}{dt}$$

Poiché vogliamo che sia $\Delta E > 0$ deve essere $V > 0$ e quindi B crescente. Il fascio di elettroni viene iniettato a "pacchetti", ciascuno dei quali deve presentarsi in fase con il potenziale accelerante e dopo un determinato numero di giri N viene estratto con un guadagno di energia $\Delta E_{\text{tot}} = e \cdot \sum \Delta V_i$ dove ΔV_i rappresenta il valore del potenziale accelerante all' i -esimo passaggio. Prefissando il numero di giri N di accelerazione si conosce il tempo totale di stazionamento nell'anello $\Delta t_{\text{anello}} = \frac{2\pi \cdot R \cdot N}{c}$. Poiché durante

questo intervallo di tempo il campo magnetico deve essere crescente, si sceglie generalmente un andamento sinusoidale del tipo: $B = B_0 \sin(\omega_B t + \varphi)$, dove la fase iniziale serve a sincronizzare temporalmente l'andamento del campo magnetico con gli istanti di iniezione. Se chiamiamo $t = 0$ l'istante della prima iniezione, affinché il fascio iniettato trovi il campo crescente deve essere: $\varphi = -\pi/2$ e risulta (vedi figura 16.12):

$$B = B_0 \cdot \sin(\omega_B t - \pi/2) = -B_0 \cdot \cos(\omega_B t)$$

Se chiamiamo $T_B = 2\pi/\omega_B$ il periodo del campo magnetico oscillante deve risultare:

$$\Delta t_{\text{anello}} = \frac{2\pi \cdot R \cdot N}{c} \leq \frac{T_B}{2} = \frac{\pi}{\omega_B}$$

Per mantenere la sincronizzazione la frequenza delle iniezioni deve valere:

$$f_{\text{iniez}} = f_B = 1/T_B.$$

Poiché, come abbiamo visto, $B(t) = -B_0 \cdot \cos(\omega_B t)$, il potenziale accelerante deve valere:

$$V = 2\pi R^2 \frac{dB}{dt} = 2\pi R^2 \omega_B B_0 \sin(\omega_B t) = V_0 \sin(\omega_B t) \text{ con } V_0 = 2\pi R^2 \omega_B B_0.$$

$V(t)$ resta positivo, quindi accelerante, per un tempo pari a $T_B/2$.

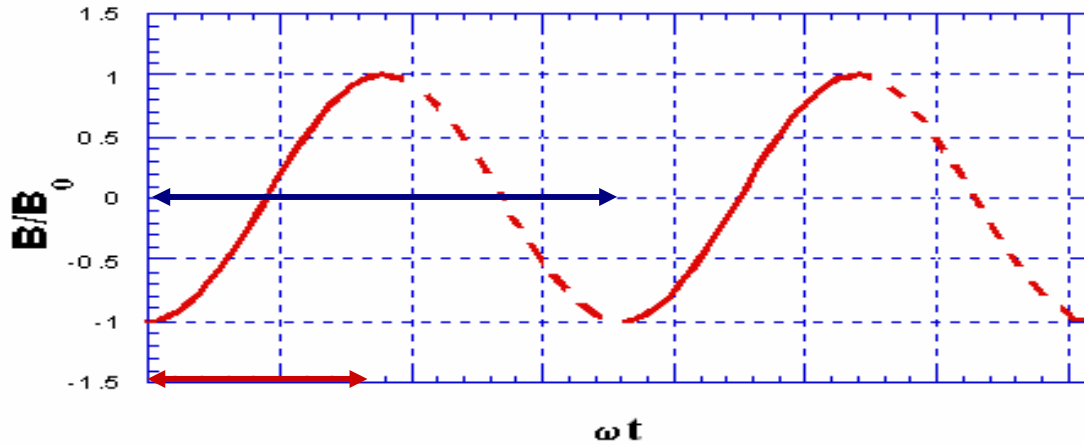


Fig. 16.12 Andamento di B nell'elettrosincrotrone

16.10 Betatrone

Anche nel betatrone il campo magnetico varia nel tempo in modo da forzare le particelle a percorrere sempre la stessa orbita. La forza elettromotrice necessaria ad accelerare gli elettroni lungo l'orbita chiusa è ottenuta sfruttando la variazione di flusso del campo magnetico concatenato con l'orbita (figura 16.13).

Il flusso del campo magnetico attraverso un cerchio di raggio R vale:

$$\Phi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int B(r) 2\pi r dr = \bar{B} \pi R^2$$

dove \bar{B} rappresenta il valor medio del campo magnetico all'interno dell'orbita. Se Φ varia nel tempo, la seconda equazione di Maxwell scritta in forma integrale afferma che: $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt}$, ossia: $-\frac{d\Phi}{dt} = 2\pi R \mathcal{E}$. La forza a cui è sottoposto un elettrone è quindi data da:

$$F = -e\mathcal{E} = \frac{e}{2\pi R} \frac{d\Phi}{dt} = \frac{eR}{2} \frac{d\bar{B}}{dt} \quad (6)$$

Dall'equazione del moto: $F = \frac{dp}{dt}$, essendo $p = eB_R R$ (dove B_R rappresenta il valore di B nella zona dell'orbita degli elettroni) si ricava:

$$\frac{dp}{dt} = eR \frac{dB_R}{dt} \quad (7)$$

Dalla (6) e dalla (7) si ricava:

$$\frac{dB_R}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d\bar{B}}{dt} \quad \text{ossia:} \quad \frac{d}{dt}(B_R) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\bar{B}\right) \quad (8)$$

Ma poiché la rapidità con cui varia il campo magnetico B dipende solo dalla variazione di corrente dell'elettromagnete ed è quindi la stessa in tutti i punti del campo magnetico, la (8) si può riscrivere, indipendentemente dal tempo:

$B_R = \frac{1}{2} \bar{B}$. E' questa la cosiddetta "regola del 2:1", tipica del betatrone.

Il fatto che $B_R = \frac{1}{2} \bar{B}$ ci dice che B deve diminuire spostandoci dal centro verso la zone dell'orbita degli elettroni. Questo si ottiene in pratica sagomando opportunamente le espansioni polari del magnete.

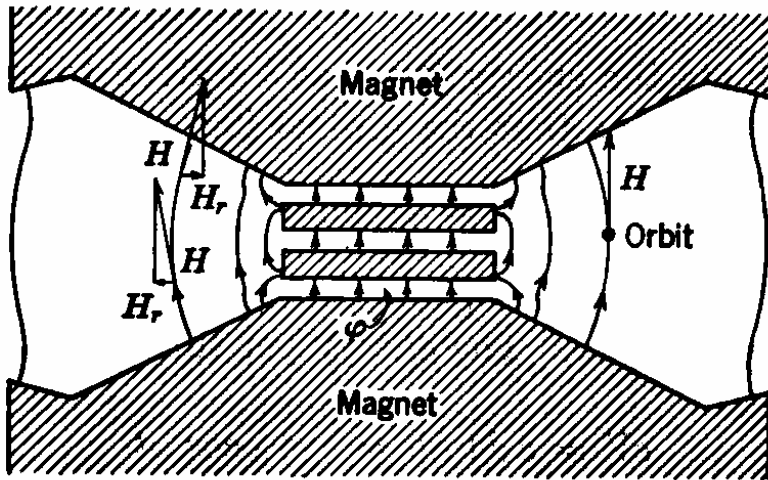


Fig. 16.13 Il betatrone

La variazione di flusso del campo magnetico nel tempo è ottenuta inviando nelle spire una corrente alternata ed utilizzando la semionda crescente per la fase di accelerazione degli elettroni. Come stima dell'energia che può essere fornita ad un elettrone assumiamo che il flusso del campo magnetico sia dato da: $\Phi = \Phi_0 \sin(\omega t)$ e che la accelerazione abbia luogo nel quarto di ciclo durante il quale il campo elettrico indotto cresce, cioè durante un tempo $t = \pi/(2\omega)$. L'energia per giro dovuta al cambio di flusso è:

$$eV = e \frac{d\Phi}{dt} = e \omega \Phi_0 \cos \omega t$$

Durante il quarto di periodo di accelerazione il valore medio del potenziale accelerante

$$\text{vale: } \langle eV \rangle = \frac{4}{T} \int_0^{T/4} e \Phi_0 \cos \omega t \cdot dt = \frac{2}{\pi} e \omega \Phi_0$$

Assumendo che la velocità dell'elettrone sia c , la distanza coperta durante questo tempo è pari a $ct = \pi c/(2\omega)$ ed il numero di giri risulta essere:

$$N = \frac{\pi c / (2\omega)}{\frac{1}{4} 2\pi R} = \frac{c}{4\omega R}$$

L'energia finale è il prodotto del numero di giri per l'energia media guadagnata per giro

$$E_{fin} = \langle eV \rangle \cdot N = \frac{ec\Phi_0}{2\pi R}$$

Ed essendo $\Phi_0 = \pi R^2 \bar{B} = 2\pi R^2 B_R$, sostituendo si ottiene:

$$E_{fin} = \frac{ec}{2\pi R} 2(\pi R^2) B_R = ecR B_R$$

Con una frequenza di 60 Hz e per un raggio dell'orbita di un metro si ricava che il numero di giri è:

$$N = \frac{c}{4\omega R}, \text{ che corrisponde ad una distanza di } 2 \cdot 10^5 \text{ m (1000 km !).}$$

Per un campo magnetico di 0.5 Tesla l'energia acquistata risulta:

$$E_{fin} = ecR B_R = 3 \cdot 10^8 \cdot 1 \cdot 0.5 \text{ eV} = 150 \text{ MeV}$$

il guadagno di energia ad ogni giro vale 750 eV.

La limitazione maggiore del betatrone (e del resto di tutte le macchine circolari) è dovuta al fatto che gli elettroni, sottoposti ad accelerazione centripeta, irradiano parte della loro energia (radiazione di sincrotrone): il guadagno di energia per rivoluzione diminuisce quindi, a causa di queste perdite radiative, all'aumentare dell'energia della macchina.

16.11 Acceleratore lineare

Il principio dell'accelerazione multipla viene anche sfruttato negli acceleratori lineari in cui la traiettoria delle particelle è rettilinea. Si hanno vari tipi di acceleratori lineari: per elettroni, per protoni e per ioni più pesanti. Qui descriviamo brevemente solo i due tipi estremi: quello per elettroni ultrarelativistici e quello per ioni. Nella figura 16.14 è riportato lo schema di un acceleratore lineare.

Gli elettrodi pari e dispari sono collegati ai poli opposti di un oscillatore. Negli intervalli tra i tubi posti sull'asse della cavità si stabilisce una differenza di potenziale

$$V = V_0 \cos(\omega t)$$

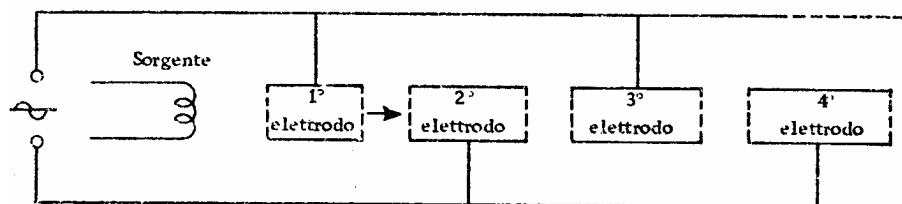


Fig. 16.14 Il Linac per ioni non relativistici

Uno ione che si trova nell'intervallo tra due tubi è soggetto al campo elettrico ivi esistente, mentre uno che viaggia all'interno di un tubo non subisce l'influenza di alcun campo. Uno ione che si affaccia sugli intervalli negli istanti appropriati, per esempio per $t=0, T, 2T, \dots$ ($T=2\pi/\omega$ essendo il periodo dell'onda) subisce molteplici impulsi acceleranti. La distanza L tra gli intervalli deve via via aumentare se si vuole che lo ione lo attraversi al tempo giusto e deve essere tale che uno ione entri nel tubo quando questo è negativo e ne esca quando è positivo, quindi $L = vT/2$, dove v è la velocità (costante) all'interno del tubo. Nel caso non relativistico, dopo l'attraversamento di j

intervalli, la velocità vale: $v_j = \left(\frac{2e}{m} jV_0\right)^{1/2}$ e la lunghezza del tubo deve perciò essere:

$$L_j = \left(\frac{2e}{m} jV_0\right)^{1/2} \frac{T}{2}$$

Poiché lo ione resta in ciascun tubo per un tempo $t=T/2$, anche lo spazio tra i due tubi deve essere percorso in un tempo $t=T/2$ se si vuole mantenere la sincronizzazione. La distanza tra due tubi successivi quindi crescerà lungo l'acceleratore dal momento che la velocità dello ione aumenta.

Nel caso estremo relativistico, essendo $v = c$ costante, la lunghezza L dei tubi e la spaziatura s tra di essi restano invece costanti e valgono $L = s = cT/2$.

Negli acceleratori moderni per stabilire il campo elettrico si adoperano le guide d'onda. Una guida d'onda è essenzialmente un tubo di materiale conduttore in cui viene eccitato un campo elettromagnetico oscillante. Il campo elettromagnetico nella cavità può formare un'onda stazionaria, nel qual caso funziona come un risonatore, oppure un'onda che si propaga. L'onda stazionaria può naturalmente essere considerata come la sovrapposizione di due onde progressive che si propagano in direzioni opposte. Uno ione che si muova con la stessa velocità di una delle onde progressive è soggetto ad una forza acceleratrice costante.

Capitolo 17

I rivelatori di particelle

17.1 Generalità

Il principio di funzionamento di tutti i rivelatori di particelle è il trasferimento di tutta o di una parte dell'energia della radiazione alla massa del rivelatore, dove è convertita in qualche altra forma più accessibile alle percezioni umane: la forma in cui l'energia viene convertita dipende dal tipo di rivelatore. Così nelle emulsioni fotografiche la ionizzazione delle particelle interagenti produce reazioni chimiche che permettono la formazione di immagini, mentre nei rivelatori a gas produce ioni che danno origine ad un segnale elettrico, negli scintillatori induce transizioni energetiche molecolari che risultano nella emissione di luce. Tutti i rivelatori moderni forniscono essenzialmente un tipo di risposta elettrico, cioè l'informazione dal rivelatore è trasferita in impulsi elettrici che poi sono processati da opportuni circuiti elettronici. Oltre a rivelare la "presenza" di una radiazione, la maggior parte dei rivelatori è anche in grado di fornire informazioni sulla energia della radiazione. Infatti la ionizzazione prodotta dalla radiazione in un rivelatore è proporzionale alla energia che essa deposita nel volume sensibile. Se il rivelatore è sufficientemente grande da assorbire completamente la radiazione, allora questa ionizzazione dà una misura dell'energia della radiazione. In genere il segnale di uscita è nella forma di un impulso di corrente e la ionizzazione totale è legata alla carica elettrica contenuta nell'impulso, cioè all'integrale rispetto al tempo:

$$q_{\text{tot}} = \int_{\text{impulso}} i(t) dt$$

Se però la forma dell'impulso (che è una caratteristica del rivelatore e dell'elettronica associata) non cambia da un evento all'altro, l'integrale è direttamente proporzionale all'ampiezza del segnale. La relazione esistente tra l'energia della radiazione e l'integrale o l'ampiezza del segnale di uscita è la "risposta" del rivelatore. In generale si scelgono rivelatori con risposta lineare, anche se questa è comunque funzione del tipo di particelle rivelate. Vediamo ora quali sono le principali caratteristiche che contraddistinguono un rivelatore.

17.2 Risoluzione energetica

Rappresenta la capacità del rivelatore di distinguere tra valori di energia prossimi tra loro. Poiché l'interazione della radiazione con la materia a livello microscopico coinvolge processi di tipo stocastico, è inevitabile una fluttuazione nel numero e nel tipo di eccitazioni e di ionizzazioni nel mezzo: pertanto la risposta ad una radiazione monocromatica, piuttosto che una delta di Dirac assume una forma gaussiana. La risoluzione è espressa dalla larghezza a metà altezza FWHM (Full Width Half Maximum) del picco.

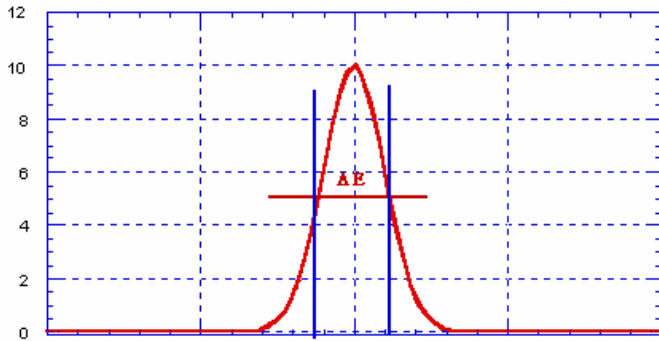


Fig. 17.1 il significato della grandezza FWHM

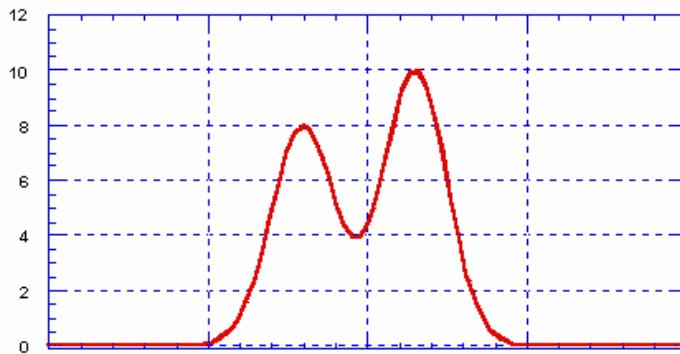


Fig. 17.2 la separazione di due picchi dipende dalla risoluzione

Se le due energie sono troppo vicine rispetto alla risoluzione dello strumento, questo non è in grado di separarle. In genere si quota la risoluzione relativa:

$$R = \frac{\Delta E}{E}, \text{ che viene data in percento.}$$

La risoluzione relativa in genere migliora con l'aumentare dell'energia. L'energia media di ionizzazione w è una quantità definita che dipende solo dal materiale. Per una radiazione di energia E ci si aspetta che in media vengano prodotte $N = E/w$ ionizzazioni. Le fluttuazioni di questo numero, secondo la statistica di Poisson, sono espresse da: $\sigma_N = \sqrt{N}$. La relazione tra larghezza a metà altezza di una gaussiana e la sua σ si ricava notando che l'ordinata x che corrisponde ad un dimezzamento dell'altezza è ottenuta dalla relazione: $A \cdot \exp(-x^2/2\sigma^2) = A/2$.

$$\text{Da cui si ricava } x = \sigma\sqrt{2\ln 2}$$

x rappresenta la semilarghezza a metà altezza. Quindi:

$$\text{FWHM} = 2x = \sigma\sqrt{8\ln 2} = 2.35 \sigma$$

$$\text{Pertanto } R = 2.35 \frac{\sigma_N}{N} = \frac{2.35}{\sqrt{N}} = 2.35 \sqrt{\frac{w}{E}}$$

Questa trattazione è solo approssimata nel caso di assorbimento completo della radiazione. In questo caso si deve introdurre un fattore $F < 1$, detto fattore di Fano:

$R = 2.35 \cdot F \sqrt{\frac{W}{E}}$ che rende la risoluzione migliore di quanto stimato. Il valore di F è una funzione del tipo di radiazione e di rivelatore.

17.3 Funzione di risposta.

Per la misura degli spettri di energia un fattore importante da conoscere è la funzione di risposta del rivelatore al tipo di radiazione. Questa rappresenta lo spettro di ampiezza di impulso prodotto dal rivelatore quando le particelle incidenti sono monocromatiche. Fino ad ora abbiamo considerato gaussiana la risposta, ma questo è vero solo in pochi casi, tipicamente se la radiazione è costituita da particelle cariche pesanti.

Se per esempio consideriamo elettroni, questi in alcuni casi potranno subire deflessioni a grossi angoli ed uscire dal rivelatore senza avervi depositato tutta la propria energia. La funzione di risposta non sarà più gaussiana, ma presenterà una "coda" (fig. 17.3) nella zona dello spettro a bassa energia, originata dagli eventi di tipo B (vedi figura 17.4) Lo stesso effetto è prodotto nel caso che l'elettrone perda energia per irraggiamento ed il fotone di bremsstrahlung generato sfugga al rivelatore (evento C).

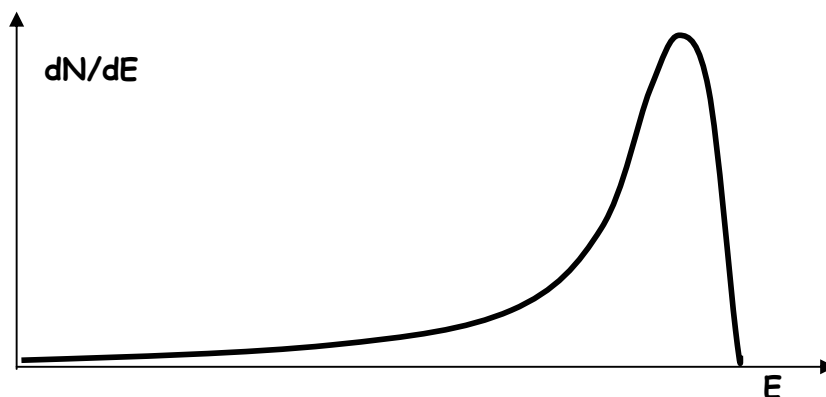


Fig. 17.3 "coda" della funzione di risposta ad elettroni

Se le particelle incidenti sono fotoni, la funzione di risposta è ancora più complicata. Risulta chiaro che il rivelatore "vede" il fotone attraverso gli elettroni da esso generato per interazione fotoelettrica, compton o produzione di coppie

questi elettroni sono infatti responsabili della ionizzazione e quindi della risposta del rivelatore. Nel caso di interazione fotoelettrica l'elettrone acquista una energia cinetica pari all'energia del fotone (trascurando l'energia di legame) ed in questo caso la funzione di risposta in questo caso è una gaussiana centrata sull'energia dei fotoni incidenti e di larghezza dipendente dalla risoluzione del rivelatore. Nel caso di effetto compton, se il fotone diffuso sfugge al rivelatore, questo registra solo l'elettrone e la funzione di risposta sarà uno spettro continuo direttamente discendente dalla sezione d'urto di Klein-Nishina (fig. 17.5).

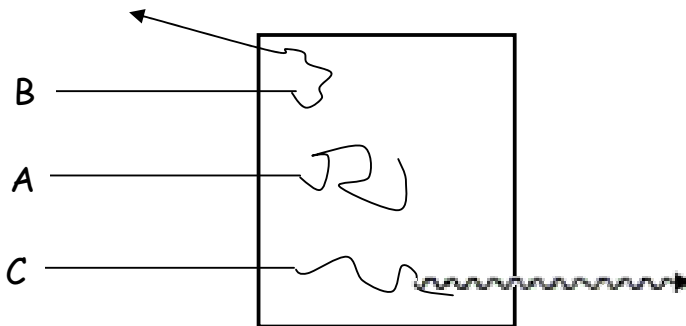


Fig. 17.4 diversi meccanismi di rilascio di energia per elettroni

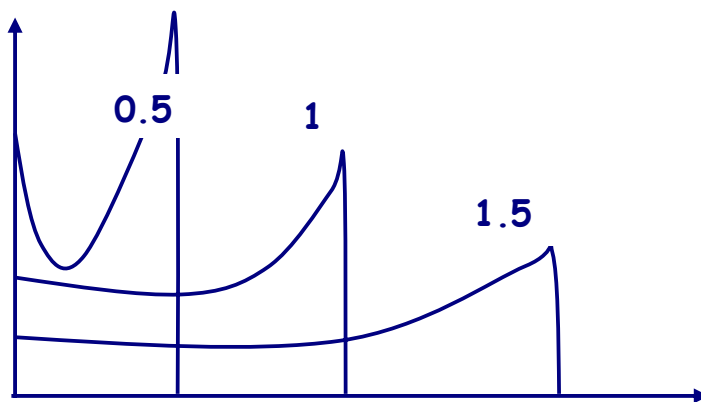


Fig. 17.5 andamento della sezione d'urto di Klein-Nishina

Per energie di fotone elevate, dove è possibile anche la produzione di coppie, lo spettro si complica e nella parte continua dovuta all'effetto compton crescono due picchi ad energia $E_\gamma - m_e c^2$ e $E_\gamma - 2m_e c^2$ legati alla fuga dal rivelatore di uno o entrambi i fotoni di annichilazione del positrone (fig. 17.6)

Nella figura 17.7 sotto sono riportate le funzioni di risposta di due diversi rivelatori a fotoni da 662 keV (sorgente di ^{137}Cs)

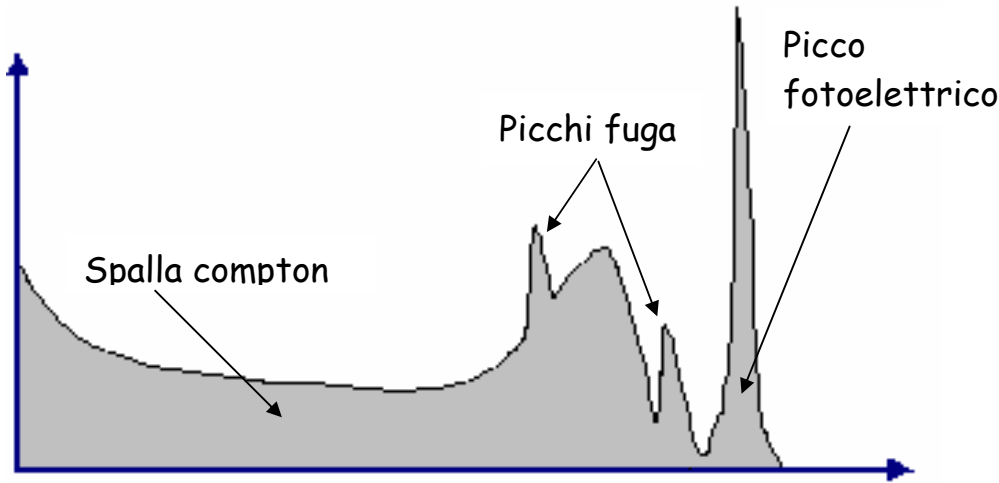


Fig. 17.6 funzione di risposta a fotoni

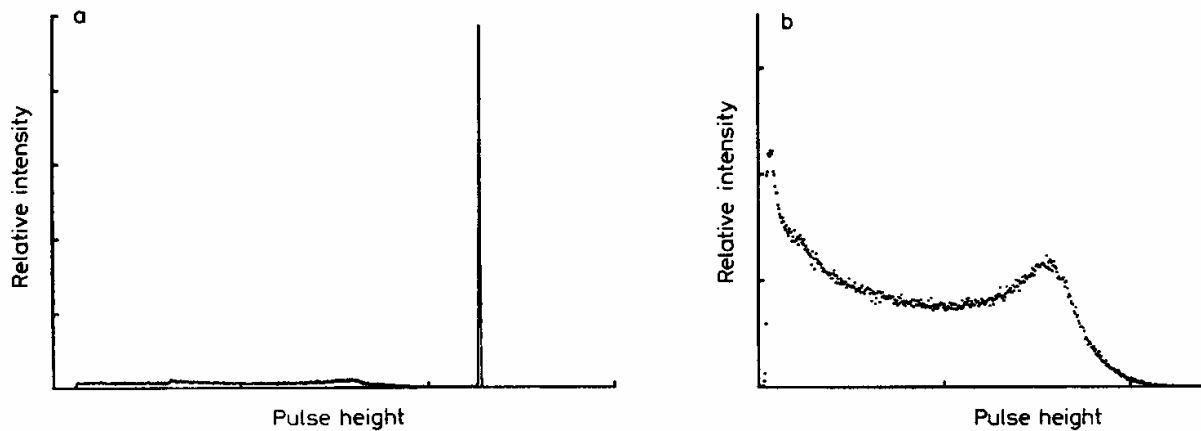


Fig. 17.7 funzione di risposta ai fotoni da 662 keV con rivelatori a diversa risoluzione

La forma dello spettro riflette le diverse interazioni che avvengono nel rivelatore. Così si vede che nel germanio (spettro a), materiale a Z relativamente alto, prevale l'effetto fotoelettrico (picco) rispetto all'effetto compton (spalla continua), mentre nello scintillatore organico (spettro b), che è un materiale a basso Z , lo scattering compton è di gran lunga dominante, tanto che solo questa distribuzione è presente nella funzione di risposta.

Se il rivelatore è usato per misurare uno spettro non monocromatico $S(E')$ di fotoni, la distribuzione delle ampiezze di impulso $h(E)$ sarà data dalla convoluzione dello spettro di energia dei fotoni $S(E')$ con la funzione di risposta $R(E,E')$:

$$h(E) = \int S(E')R(E, E')dE' \quad (1)$$

dove $R(E, E')$ rappresenta la funzione di risposta del rivelatore a fotoni di energia E' . Poiché il risultato della misura ci fornisce $h(E)$, per risalire allo spettro $S(E')$ bisogna invertire la (1): da qui è evidente il vantaggio di avere ottima risoluzione, ossia:

$$R(E, E') = \delta(E' - E)$$

17.4 Risposta temporale.

Un'altra caratteristica importante dei rivelatori è la loro risposta temporale, ossia il tempo impiegato dal rivelatore per formare il segnale dopo l'arrivo della radiazione. Per una buona temporizzazione (timing) è necessario che il segnale venga formato molto velocemente ed abbia un tempo di salita estremamente rapido. Anche la durata del segnale è importante, in quanto determina il tempo morto del rivelatore, ossia il tempo durante il quale il rivelatore rimane insensibile alla rivelazione di un nuovo evento o lo rivela distorto (fenomeno dell'impilamento, o "pile-up")

17.5 Efficienza

Si definiscono due tipi di efficienza: l'efficienza totale e l'efficienza intrinseca. L'efficienza totale è definita come la frazione di eventi emessi dalla sorgente che viene registrata dal rivelatore. Questa è una funzione della geometria rivelatore-sorgente e della probabilità di interazione della radiazione nel volume sensibile. Se le particelle uscenti dalla sorgente hanno una distribuzione angolare isotropa:

$$p_{\text{geom}}(\vartheta, \varphi)d\Omega = \frac{d\Omega}{4\pi}$$

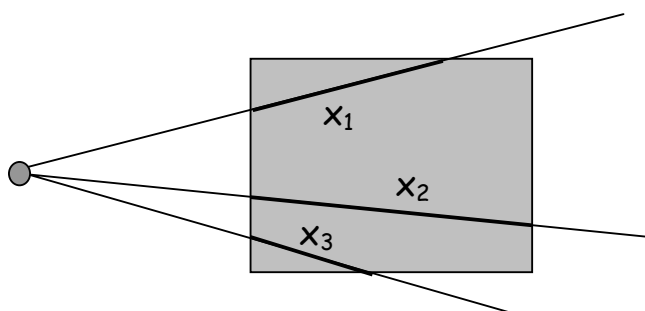


Fig. 17.8 spessore di rivelatore attraversato

La probabilità che una particella che ha colpito il rivelatore interagisca in esso è data da:

$$p_{\text{int}}(x) = 1 - \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right)$$

dove x rappresenta lo spessore effettivo di rivelatore "visto" dalla radiazione (vedi fig. 17.8) e λ il libero cammino medio all'interno del rivelatore.

Nel caso di fotoni $\lambda = 1/\mu$, mentre nel caso di particelle cariche il valore di λ è confrontabile con le distanze interatomiche, cosicché $p_{int} = 1$.

L'efficienza totale può essere fattorizzata in due termini: l'efficienze intrinseca e l'efficienze geometrica o accettanza: $\epsilon_{tot} = \epsilon_{intr} \cdot \epsilon_{geom}$

L'efficienza intrinseca rappresenta quindi la frazione di eventi registrati tra quelli che sono diretti nel rivelatore.. L'efficienze intrinseca è ovviamente una funzione del tipo di radiazione, della sua energia e del tipo di materiale di cui è composto il rivelatore.

17.6 Tempo morto

La registrazione di un evento richiede un certo tempo e il rivelatore rimane insensibile per questo tempo, detto tempo morto. Se un secondo evento non dista temporalmente dal primo per più del tempo morto, non viene registrato. E' evidente che se siamo interessati ad una qualsiasi misura di intensità di radiazione è importante conoscere il tempo morto per poter correggere opportunamente la misura.

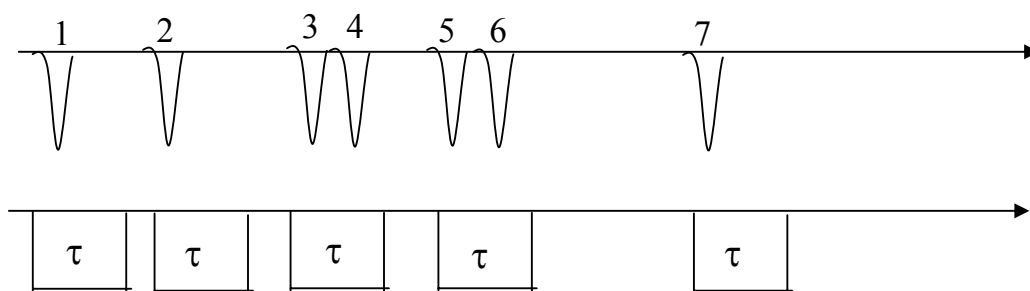


Fig. 17.9 visualizzazione del tempo morto di un rivelatore

Nell'esempio riportato in figura 17.9 gli eventi numero 4 e 6 non sono registrati.

Supponiamo che in una misura durata un tempo complessivo T siano stati registrati k conteggi. Se il tempo morto del rivelatore è τ , l'intensità di conteggi corretta m è data da:

$$mT = k + m \cdot k \cdot \tau$$

infatti k rappresenta il numero di conteggi rivelati e $k \cdot \tau$ il tempo totale durante il quale il rivelatore è rimasto insensibile: poiché l'intensità vera di conteggi è m , nel tempo $k \cdot \tau$ il numero di conteggi persi è $m \cdot k \cdot \tau$. Risolvendo:

$$m = \frac{\frac{k}{T}}{1 - \frac{k}{T} \tau}$$

che ci permette di ricavare la vera intensità di conteggio in funzione di quella misurata k/T . Naturalmente per $\tau = 0$ otteniamo $m = k/T$. un metodo per misurare il tempo morto è quello detto "delle due sorgenti". Si fanno tre misure indipendenti : la prima con la sorgente 1, la seconda con la sorgente 2 e la terza con entrambe le sorgenti. Se chiamiamo R_1 , R_2 e R_{12} le rispettive intensità di conteggi registrate e n_1 , n_2 e n_{12} le intensità vere delle sorgenti, si ha:

$$n_1 = \frac{R_1}{1 - R_1\tau} \quad n_2 = \frac{R_2}{1 - R_2\tau} \quad n_1 + n_2 = \frac{R_{12}}{1 - R_{12}\tau}$$

dovrà essere:

$$\frac{R_1}{1 - R_1\tau} + \frac{R_2}{1 - R_2\tau} = \frac{R_{12}}{1 - R_{12}\tau}$$

dalla relazione precedente si può ricavare l'unica incognita τ .

I rivelatori di radiazione possono inoltre essere suddivisi in diverse categorie a seconda degli scopi per i quali vengono impiegati.

I "rivelatori integrali" servono per la misura delle proprietà globali del campo di radiazione in una zona dello spazio.

I "contatori" permettono di contare il numero di corpuscoli della radiazione, senza fornire informazioni sulla loro energia e spesso anche sul tipo di radiazione.

I "contatori differenziali" o "spettrometri" non soltanto permettono di contare il numero di corpuscoli della radiazione, ma sono in grado di misurare (con precisione più o meno grande) l'energia che essi lasciano nel materiale sensibile del rivelatore e di distinguere il tipo di radiazione. Alcuni rivelatori possono essere impiegati come "rivelatori integrali" e "contatori differenziali", altri rivelatori sono al tempo stesso "contatori" e "contatori differenziali", ecc.ecc.

Le emulsioni fotografiche e le camere a ionizzazione sono gli esempi più importanti di rivelatori integrali. Il più noto dei contatori semplici è il contatore Geiger. Appartengono alla categoria dei contatori differenziali i contatori proporzionali, gli scintillatori, i rivelatori a stato solido e tutto l'insieme di spettrometri magnetici.

17.7 Emulsioni fotografiche.

Un'emulsione fotografica consiste in uno strato di gelatina nel quale sono sospesi grani di bromuro di argento ($AgBr$). La gelatina è depositata su una o su entrambe le facce di un supporto che di solito è acetato di cellulosa o film poliestere. Le dimensioni medie dei grani variano a seconda della sensibilità dell'emulsione (da $0.5 \mu m$ per emulsioni nucleari a $2 \div 3 \mu m$ per emulsioni comuni). Lo spessore delle lastre varia da pochi μm a $0.5 mm$ per le emulsioni nucleari, mentre è di decine di μm per le emulsioni comuni. In un grano di bromuro d'argento, al quale sia ceduta una quantità sufficiente di energia, a seguito di complicati fenomeni di cessione di energia ad elettroni atomici e di movimento di questi elettroni nel cristallo di $AgBr$, si formano agglomerati di argento metallico (Ag) che si differenziano, dal punto di vista della

loro configurazione elettronica, dagli ioni positivi Ag^+ del grano di emulsione. L'energia necessaria a produrre questo agglomerato di argento metallico è tipicamente dell'ordine di $2\div 3$ eV (per questa ragione in una camera oscura è possibile tenere accese luci rosse). La presenza in un grano di uno o più agglomerati di atomi di argento favorisce gradatamente la "riduzione" ad argento metallico di tutti gli altri ioni Ag^+ del grano, una volta che questo sia immerso nel bagno di sviluppo. L'amplificazione del numero di ioni metallici nel processo di sviluppo rispetto a quelli originariamente formati dalla radiazione è dell'ordine di $10^{10}\div 10^{12}$. I grani di bromuro d'argento non sviluppati sono sciolti dalla soluzione di fissaggio. Mandando sulla lastra fotografica sviluppata un fascio di luce di intensità I_0 e misurando l'intensità I che passa attraverso la lastra si può risalire al numero di grani sviluppati e quindi alla energia persa dalla radiazione. Si definisce "densità ottica" il logaritmo in base 10 del rapporto tra intensità luminosa incidente ed intensità trasmessa:

$$d = \text{Log}_{10}(I_0 / I)$$

quindi:

$$d = 1 \rightarrow I = I_0/10 \quad d = 2 \rightarrow I = I_0/100 \quad d = 3 \rightarrow I = I_0/1000$$

per $d=3$ la lastra appare praticamente nera.

Caratteristiche di una emulsione fotografica sono:

la "sensibilità", definita come l'inverso del flusso di energia che produce una densità ottica prefissata (p. es.: $d = 0.3$). Tanto maggiore è la densità quanto minore è il flusso di energia necessario a produrre un dato annerimento dell'emulsione.

Il "contrasto", cioè l'aumento di densità ottica che si ottiene quando il flusso di energia aumenta di un fattore 10.

La sensibilità di una emulsione fotografica dipende dalla energia della radiazione ed ha un massimo tra 20 e 60 keV, dato che in tale zona prevale l'effetto fotoelettrico nel bromuro di argento che ha un alto Z (Br: $Z=25$, Ag: $Z=47$). Per aumentare la sensibilità di una emulsione ripongono le pellicole a contatto con cosiddetti "schermi di rinforzo", costituiti da materiale che ha proprietà di fluorescenza sotto l'azione di raggi X: in tal modo la sensibilità può essere aumentata di un fattore 50.

Le emulsioni fotografiche sono oggi usate soprattutto in diagnostica medica e come dosimetri personali per la misura delle radiazioni ambientali. In passato furono usate estensivamente come rivelatori di tracce nucleari. Facendo uso di un microscopio è infatti possibile seguire la traiettoria percorsa in una emulsione da una particella carica: tanto più alta è l'energia della particella, tanto più lunga è la traccia. Inoltre, se tale emulsione è posta in un campo magnetico, dalla curvatura della traiettoria della particella si può ricavare la sua quantità di moto e dalla lunghezza si ricava l'energia cinetica. Una misura simultanea di quantità di moto e di energia cinetica fornisce infine la massa della particella.

17.8 Camere ad ionizzazione.

Una camera ad ionizzazione è uno strumento in cui un campo elettrico viene applicato attraverso un volume riempito di gas. Le particelle cariche di una radiazione che si muova attraverso il gas, a seguito della loro interazione ionizzano il gas producendo ioni positive ed elettroni. La presenza del campo elettrico fa sì che ioni positivi ed elettroni si muovano in versi opposti lungo le linee di forza del campo, producendo una corrente di ionizzazione. In condizioni standard, la velocità degli elettroni è dell'ordine di $\approx 10^6$ cm/s, mentre quella degli ioni è molti ordini di grandezza minore. L'energia media spesa nella singola ionizzazione non dipende dall'energia della radiazione incidente, né dal tipo di radiazione, ma solo dal gas. Immaginiamo una camera ad ionizzazione come un condensatore piano a facce parallele riempito di gas e supponiamo che, per esempio, particelle α di energia cinetica E perdano tutta la loro energia nel gas. Se chiamiamo w l'energia media di ionizzazione del gas, le particelle α produrranno ciascuna un numero di coppie elettrone-ione dato da: $N = E/w$. Questa carica verrà raccolta dalle armature e produrrà un impulso elettrico. Se variamo la differenza di potenziale tra le armature, otteniamo per la carica raccolta l'andamento tipico di figura 17.10

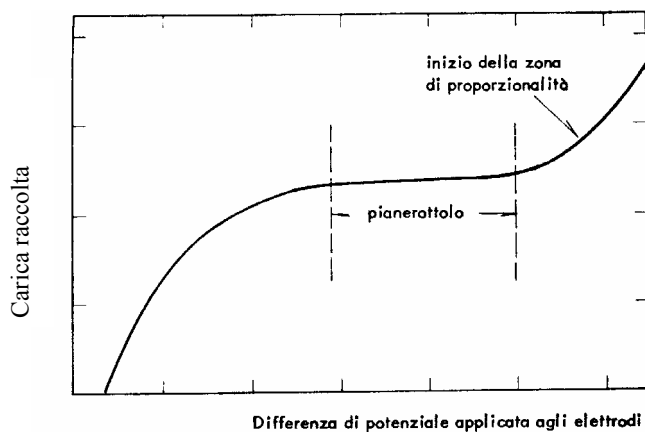


Fig. 17.10 relazione carica-tensione per una camere ad ionizzazione

Nel primo tratto la carica raccolta cresce con la differenza di potenziale in quanto è presente, per bassi valori della tensione, il fenomeno della ricombinazione e quindi neutralizzazione parziale degli ioni prodotti. Quando il campo elettrico è sufficientemente alto, la ricombinazione non può avvenire e la carica raccolta resta costante. La zona del pianerottolo è la tipica regione di funzionamento della camera ad ionizzazione. Il numero di ioni formati per unità di percorso è funzione della densità del gas e , soprattutto quando si rivelano fotoni e l'energia della radiazione è elevata, occorre usare alte pressioni di gas affinché il libero cammino medio nella camera sia inferiore alle dimensioni della stessa.

Se le armature del condensatore che costituisce la camera ad ionizzazione fossero isolate, la differenza di potenziale tra le stesse varierebbe come indicato in figura 17.11 quando viene raccolta una carica totale q :

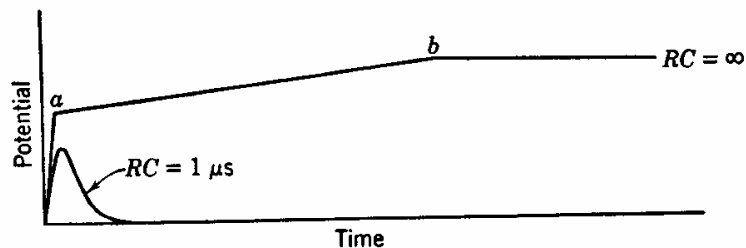


Fig. 17.11 andamento temporale del potenziale ai capi di una camera ad ionizzazione isolata

Prima gli elettroni (a), più veloci, e dopo gli ioni (b), attratti dalle armature di carica opposta, variano la carica totale del condensatore (tra parentesi questo è il modo in cui funzionano alcuni dosimetri personali per radiazioni). Se invece la camera ad ionizzazione è tenuta a potenziale costante tramite un alimentatore esterno e letta verso massa tramite una resistenza, in questa nasce un impulso di corrente come descritto nella figura 17.12. Qui la capacità (che spesso coincide semplicemente con la capacità della camera stessa) ha la funzione di integrare nel tempo gli impulsi di corrente delle singole radiazioni e fornire, a seconda del valore della costante RC , o una corrente media, proporzionale all'intensità del campo radiante, oppure impulsi separati. In questo secondo caso la camera ad ionizzazione funziona come contatore differenziale e/o contatore semplice. Infatti una particella incidente, depositando tutta la sua energia nel gas, dà luogo ad un impulso di corrente la cui area (carica) è proporzionale all'energia della particella. Per eliminare il fenomeno del pile-up il segnale viene poi differenziato prima di essere analizzato. L'uso della camera ad ionizzazione come contatore differenziale è limitato sia verso le basse energie, dove il rumore dell'elettronica (equivalente a circa $7\div 8$ keV) sporca il segnale, che verso le alte energie dove il range delle particelle diventa maggiore delle dimensioni della camera.

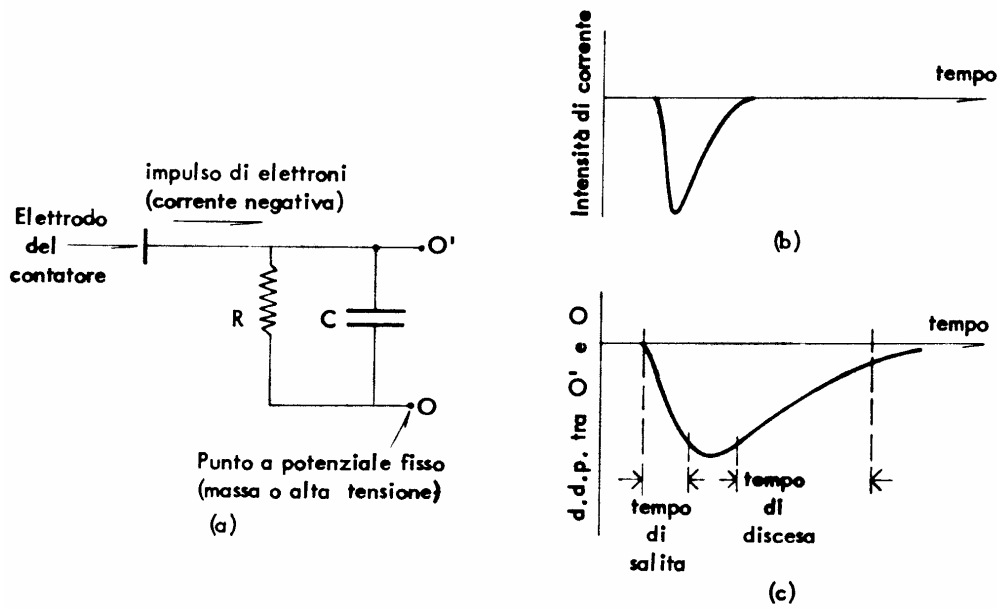


Fig. 17.12 circuito base e forma di impulso di una camera ad ionizzazione

17.9 Contatore proporzionale

Quando il valore del campo elettrico in un contatore a gas aumenta al di sopra di un certo valore (fig. 17.13), l'impulso in uscita da rivelatore inizia ad aumentare, pur rimanendo proporzionale alla ionizzazione iniziale, legata alla energia cinetica delle particelle rivelate: un rivelatore che opera in queste condizioni è detto contatore proporzionale.

Il grande vantaggio di questo rivelatore è che permette di rivelare anche una ionizzazione iniziale molto bassa, al limite anche una singola coppia di ioni. Per un contatore con geometria cilindrica il campo elettrico, a distanza r dall'asse, è dato da:

$$E(r) = \frac{V_0}{r \ln(b/a)}$$

dove a e b rappresentano il raggio dell'elettrodo interno e dell'elettrodo esterno. L'elettrodo interno è usualmente un file estremamente sottile ($a \approx 0.01$ cm), in modo che r ($a < r < b$) può essere molto piccolo ed in corrispondenza $E(r)$ molto grande. Poiché vicino all'anodo il campo elettrico aumenta rapidamente, gli elettroni che si avvicinano acquistano molta energia cinetica, così da produrre per collisione ioni ed elettroni secondari, a loro volta accelerati ed in grado di ionizzare ulteriormente il gas. Sono generati anche fotoni che a loro volta producono elettroni per effetto fotoelettrico sulle pareti o nel volume del gas. Chiamiamo n il numero di elettroni prodotti nella ionizzazione primaria dalla radiazione incidente; ciascuno di essi ha una probabilità P di generare m elettroni secondari (m essendo il fattore di moltiplicazione). Il numero medio di elettroni secondari generati sarà allora: $k = mP$.

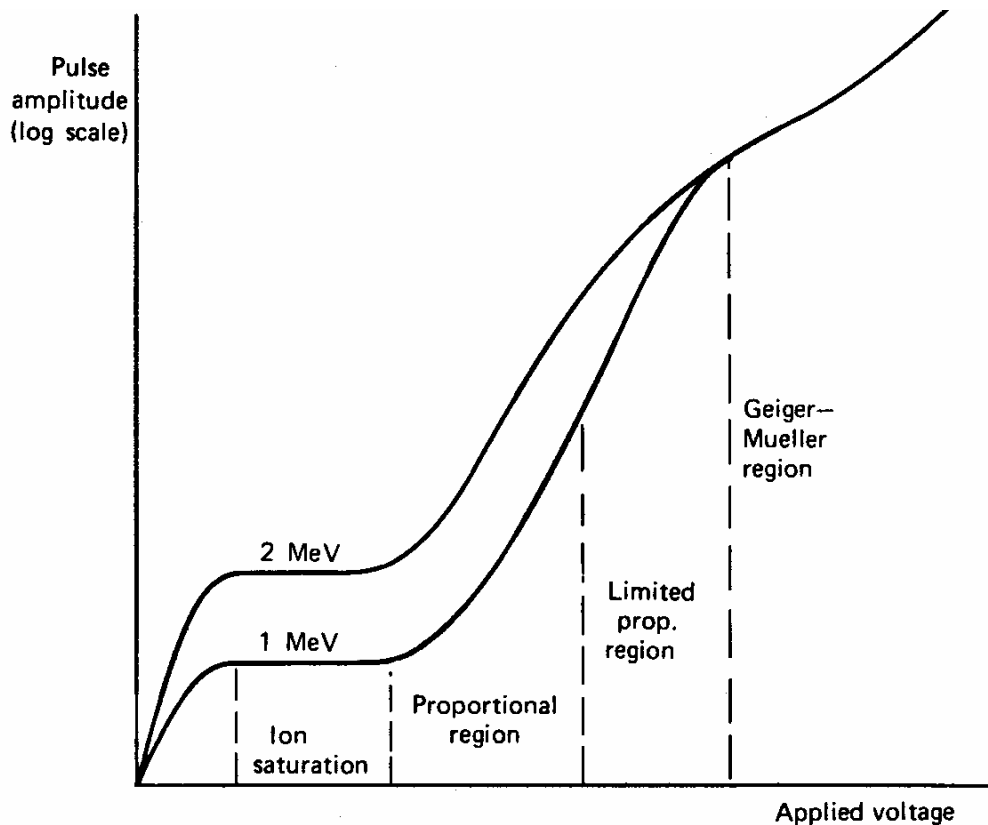


Fig. 17.13 i vari regimi di funzionamento di un rivelatore a gas

Il numero N di elettroni generati in seguito all'intero processo di moltiplicazione a cascata risulta allora:

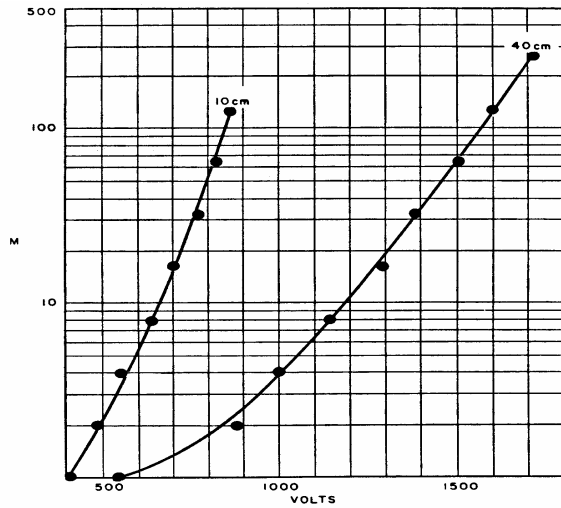
$$N = n + nPm + (nPm)Pm + n(Pm)^2Pm + \dots$$

Che si può scrivere come: $N = n(1 + k + k^2 + k^3 + \dots)$

Nel caso che sia $k = mP \ll 1$ si può scrivere: $N = n \frac{1}{1 - mP} = n \frac{1}{1 - k}$

Come si vede, per $k=0$ non si ha moltiplicazione e comunque vi è proporzionalità tra N ed n . Quanto più k tende all'unità (anche se non si può usare la relazione precedente) quanto maggiore è il fattore di moltiplicazione $M=N/n$. Il fattore di moltiplicazione, che può raggiungere valore di 10^2 (vedi fig. 17.14), è funzione del tipo di gas di riempimento, della pressione e della tensione applicata. Il gas di riempimento è di solito un gas nobile (es: argon) con aggiunta di piccole quantità (10%) di molecole complesse capaci di assorbire i fotoni prodotti senza ionizzarsi a loro volta. Con una mistura argon-metano è possibile raggiungere fattori di moltiplicazione fino a 10^4 . Per utilizzare i contatori proporzionali per la rivelazione di raggi X o fotoni occorre avere gas ad alta pressione. Per rivelare invece particelle alfa o beta di bassa energia occorre avere finestre molto sottili e quindi

pressioni del gas pari a quella atmosferica. In alcuni casi addirittura non vi sono finestre di ingresso ed il gas di riempimento viene flussato tra gli elettrodi.



Multiplication factor, M, as a function of applied voltage for argon at pressures of 10 and 40 cm Hg (1.33×10^3 Pa = 1 cm Hg), radius of center wire = 0.015 cm, radius of outer electrode = 1.105 cm (Staub, 1953).

Fig. 17.14 il fattore di moltiplicazione M nei contatori proporzionali

Mentre le camere ad ionizzazione lavorano al centro della zona del "plateau", i contatori proporzionali operano in genere verso la zona mediana della regione di proporzionalità: in questo caso la stabilità di tensione è ovviamente più importante in quanto una sua variazione si ripercuote sul valore di M e quindi sulla funzione di risposta del rivelatore.

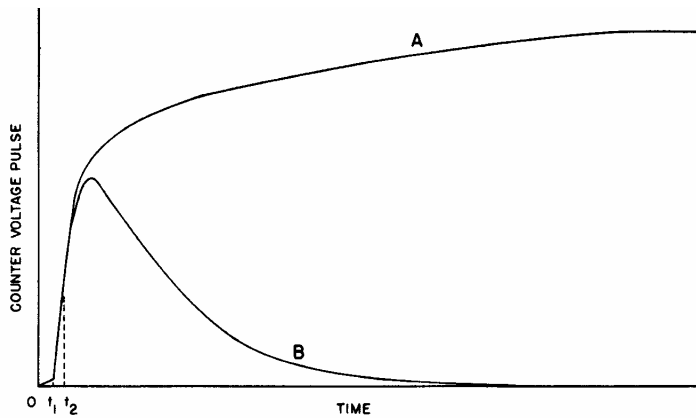


Fig. 17.15 la forma di impulso nei contatori proporzionali

La tecnica di formazione degli impulsi è la stessa già vista a proposito delle camere ad ionizzazione: anche in questo caso il segnale viene differenziato da un circuito RC.

17.10 Contatore di Geiger-Muller

Se la tensione di polarizzazione aumenta fino a che il prodotto $mP \approx 1$ si ha una scarica che si propaga anche lungo l'asse del contatore cilindrico: è questo il fenomeno della valanga Townsend: il segnale elettrico che ne deriva è grande (quindi facilmente leggibile), ma ha perso la proporzionalità con la ionizzazione iniziale (vedi ultima zona della figura 17.13): il contatore Geiger quindi non può essere usato per spettroscopia, ma soltanto per misure di intensità di campi di radiazioni. La scarica si propaga lungo il filo anodico alla velocità di 10^7 cm/s e gli elettroni vengono raccolti in tempi brevissimi ($\approx 10^{-9}$ s). gli ioni positivi si muovono più lentamente e stazionano per tempi più lunghi attorno al filo, dando origine a una carica spaziale che fa diminuire il campo elettrico ed interrompe la scarica.

L'effetto di "quenching" (raffreddamento, estinzione) è ottenuto miscelando il gas nobile argon (90%) con gas poliatomici, in genere alcol etilico (10%). Queste molecole sono in grado di assorbire energia (specie da parte dei tanti fotoni prodotti) senza a loro volta ionizzarsi. Anche se l'impulso di uscita è molto veloce, i contatori Geiger hanno un tempo morto dell'ordine di $10\text{-}100$ μs dovuto all'effetto del "quenching" e pertanto va utilizzato con cautela in presenza di alte velocità di conteggio.

17.11 Multi Wire Proportional Chamber

Esistono molte versioni moderne di rivelatori a gas basati sui principi descritti sopra ed utilizzati nella rivelazione delle particelle negli esperimenti di fisica nucleare: qui accenniamo solo al principio di funzionamento di alcuni di essi: la camera a multifili (MWPC, Multi Wire Proportional Chamber), la camera a Drift e la camera TPC (Time Projection Chamber). Le camere multifili sono costituite da due o più piani di fili paralleli tra loro, tutti alimentati e letti da circuiti elettronici indipendenti. Quando una particella ionizza il gas di riempimento, solo i fili più vicini raccolgono il segnale elettrico (fig. 17.16a): in questo modo il filo che produce il segnale elettrico identifica una coordinata della particella. Se i fili di due piani indipendenti sono perpendicolari tra di loro (fig. 17.17) si riescono a misurare le coordinate X e Y della posizione della particella. E se esistono parecchi piani di fili si ottiene il cosiddetto "tracking" ossia tracciamento della traiettoria della particella. Si possono ricostruire i vertici delle interazioni (fig. 17.18), e se le MWPC sono immerse in un campo magnetico si può misurare il raggio di curvatura delle traiettorie e quindi la quantità di moto della particella.

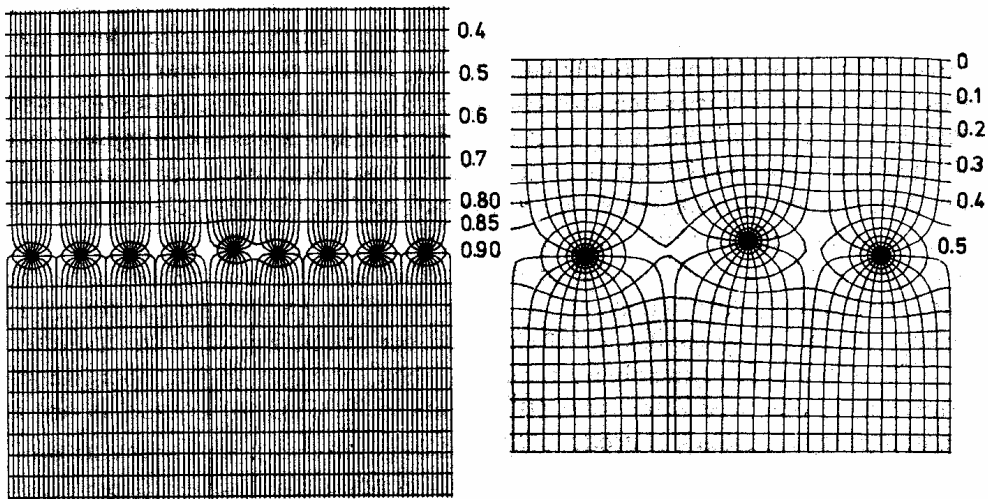
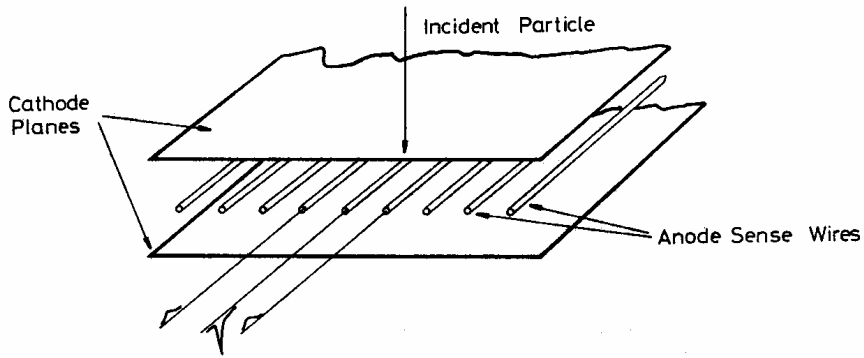


Fig. 6.8. Electric field lines and potentials in a multiwire proportional chamber. The effect of a slight wire displacement on the field lines is also shown (from *Charpak et al.* [6.16])

Fig. 17.16 la camera proporzionale multifili MWPC

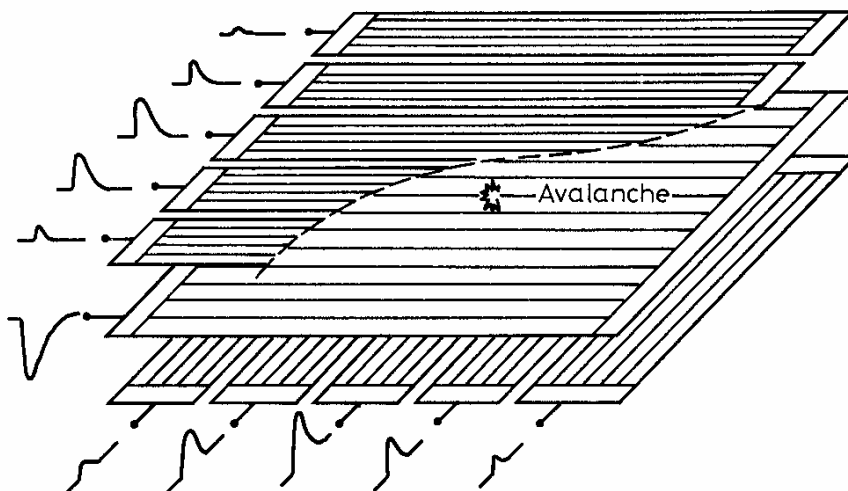


Fig. 17.17 disposizione di due strati per l'identificazione delle coordinate XY della traccia

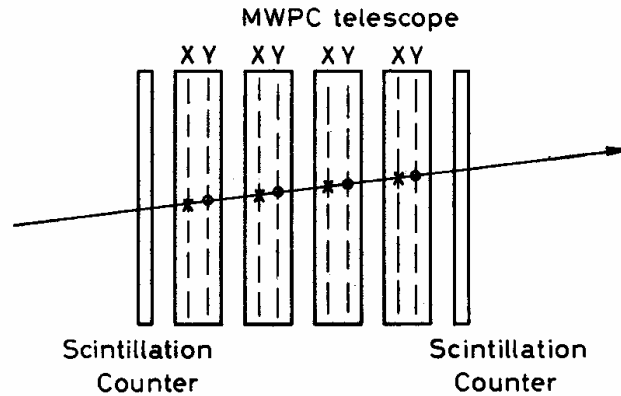


Fig. 17.18 ricostruzione di una traccia tramite un rivelatore MWPC multistrati

17.12 La camera a drift

In questo rivelatore l'informazione spaziale è ottenuta misurando il tempo di drift degli elettroni prodotti dalla ionizzazione della radiazione incidente. Se si dispone di un "trigger", ossia di un riferimento temporale preciso, ed è nota la velocità di drift degli elettroni nel gas, la distanza tra il filo di raccolta e il punto di origine degli elettroni può essere calcolata dalla relazione:

$$d = \int_{t_0}^{t_1} u dt.$$
 Qui t_0 è il tempo di arrivo della particella e t_1 l'istante al quale l'impulso appare all'anodo.

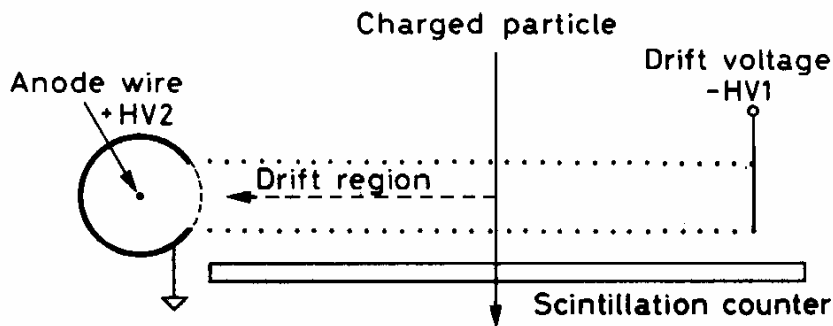


Fig. 17.19 principio di funzionamento di una camera a drift

Il tempo t_0 è fornito da uno scintillatore. L'uniformità del campo elettrico nella zona di drift, indispensabile per avere velocità di drift costante e quindi risposta lineare, è garantita da tanti fili equispaziati e tenuti ad una opportuna differenza di potenziale tra loro. Poiché la tipica velocità di drift degli elettroni è dell'ordine di $5 \text{ cm}/\mu\text{s}$ e le dimensioni della regione di drift sono dell'ordine di $5\div 10 \text{ cm}$, i tempi di drift sono dell'ordine di $1\div 2 \mu\text{s}$.

17.13 Camere TPC a proiezione di tempo

rappresentano i rivelatori a gas più sofisticati di ultima generazione. Funzionano contemporaneamente come MWPC e come camere a drift. Il rivelatore, schematicamente mostrato in figura 17.20, è costituito da un grande cilindro (diametro e lunghezza possono raggiungere i due metri) con al centro un sottile piano tenuto ad alta tensione. Le estremità del cilindro sono ricoperte da una matrice di fili funzionanti in regime proporzionale disposti come indicato in figura. Parallelo a ciascun filo si trova, a forma di sottile striscia, un catodo di dimensioni rettangolari. Il rivelatore è posizionato in modo che vertice della interazione che si vuole misurare si trova all'interno del volume cilindrico. Le particelle prodotte nell'interazione passano attraverso il volume del cilindro producendo per ionizzazione elettroni che sotto l'azione del campo elettrico migrano verso le estremità del cilindro dove sono rivelati dalle camere a fili.

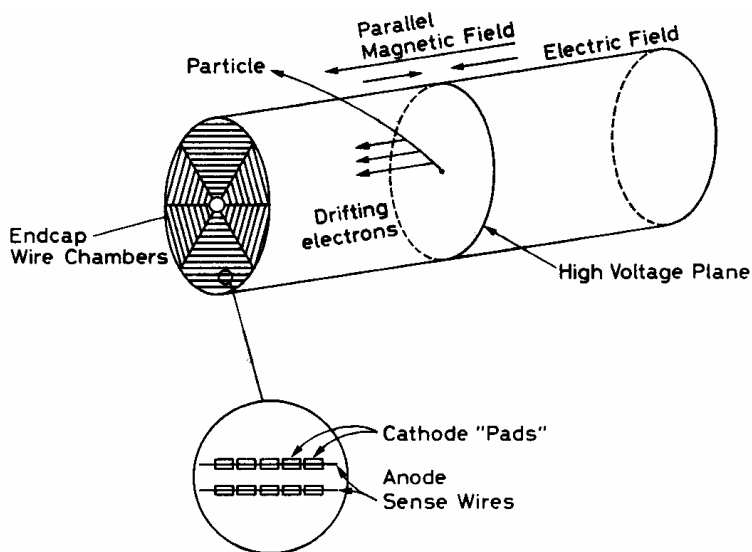


Fig. 17.20 schema di una camera TPC

Le coordinate radiale ed azimutale sono ricavate dalla posizione del filo che ha prodotto il segnale elettrico e dal segnale indotto sulla riga di catodi: i segnali di induzione sui vari catodi avranno una distribuzione di ampiezze decrescente con la distanza dal punto di raccolta: con un metodo di analisi elettronica dei segnali si ricava il baricentro di questa distribuzione. La terza coordinata, lungo l'asse del cilindro, è data dal tempo di drift degli elettroni. Il campo magnetico assiale serve a minimizzare la diffusione laterale degli elettroni che, per una buona risposta del rivelatore, dovrebbero muoversi lungo traiettorie parallele all'asse. Infatti gli elettroni prodotti dalla ionizzazione, essendo di bassa energia, spiralizzano facilmente attorno alle linee del campo magnetico e finiscono per "avvitarsi" lungo di esse e spostarsi quindi parallelamente all'asse del rivelatore senza componenti

radiali. Nella figure 17.20 e 17.21 è riportato in maggior dettaglio il sistema di rivelazione degli elettroni e la ricostruzione della traccia della particella.

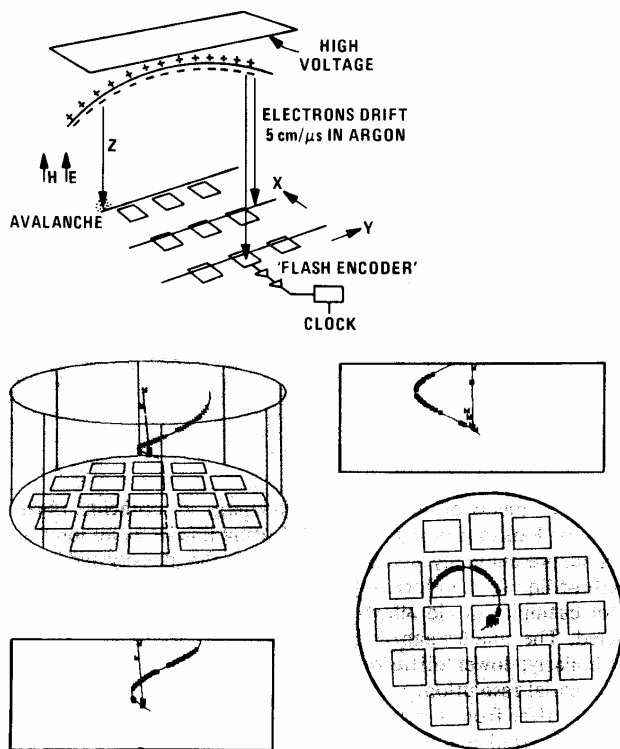


Fig. 17.21 ricostruzione di una traccia in una camera TPC

17.14 Rivelatori a scintillazione

I rivelatori a scintillazione sono senza dubbio tra i più diffusi rivelatori di particelle usati oggi in fisica nucleare. Sono basati sulla proprietà di alcuni materiali di emettere luce quando eccitati o ionizzati dalla radiazione incidente. Gli scintillatori sono sempre accoppiati ad un sistema di amplificazione di questa luce, un fotomoltiplicatore, in grado di convertire questo debole segnale ottico in un segnale elettrico che poi può essere processato ed analizzato e che contiene l'informazione sulla radiazione misurata. Gli elementi fondamentali di un rivelatore a scintillazione sono riassunti nella figura 17.22:

Esso generalmente consiste di un materiale scintillante accoppiato otticamente ad un fotomoltiplicatore. Quando la radiazione interagisce nello scintillatore causa emissione di luce da parte di quest'ultimo. La luce è trasmessa, attraverso il rivelatore stesso che è quindi trasparente alla luce emessa, al fotomoltiplicatore (dall'inglese: PM o PMT) dove è convertita in una debole corrente di fotoelettroni che è poi ulteriormente amplificata da un sistema di moltiplicazione di elettroni. Il

segnale in corrente così prodotto viene successivamente analizzato dall'elettronica di acquisizione.

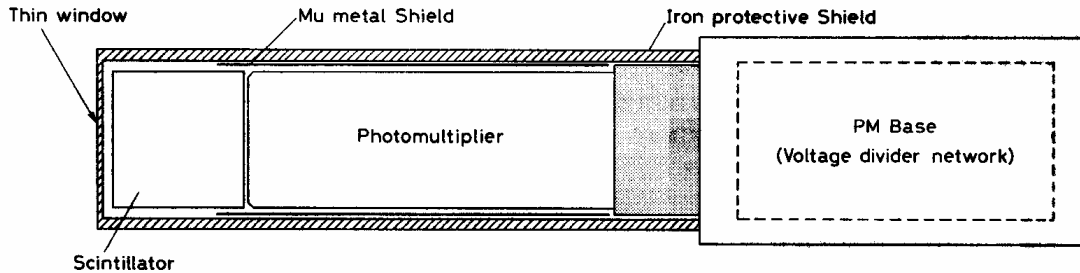


Fig. 17.22 schema di un rivelatore a scintillazione e relativo fotomoltiplicatore accoppiato

Diversi materiali hanno proprietà scintillanti. Noi qui descriveremo solo i più importanti tra di essi, distinguendoli in scintillatori organici e scintillatori inorganici. Esiste inoltre un meccanismo di produzione della luce basato sull'effetto Cherenkov, da cui prendono il nome gli omonimi contatori

17.15 Contatore Cherenkov.

Una particella carica veloce, che si muove in un mezzo con una velocità superiore a quella della luce in quel mezzo origina una radiazione elettromagnetica direzionale ad un angolo ben definito che dipende dal β della particella e dall'indice di rifrazione del mezzo. La particella carica che si muove attraverso il dielettrico interagisce elettromagneticamente con gli atomi del mezzo più vicini che si comportano come dipoli ed irradiano nel campo della luce visibile. In generale queste onde interferiscono distruttivamente tra di loro, sicché non si riscontra emissione di luce a distanza. Se però la velocità della particella è maggiore di quella della luce (e quindi della propagazione delle onde elettromagnetiche) nel mezzo le onde possono essere in fase tra di loro come mostrato in figura 17.23 e dare luogo ad un fenomeno coerente che si traduce nella formazione di un'onda luminosa direzionale.

$AB = \beta c \Delta \tau$ $AC = c/n \Delta \tau = AB \cos \vartheta$, dove n è l'indice di rifrazione del mezzo.

$$\cos \vartheta = \frac{AC}{AB} = \frac{c \Delta \tau}{n \beta c \Delta \tau} = \frac{1}{n \beta}$$

Poiché $\cos \vartheta \leq 1$ si ricava che deve essere $\beta \geq 1/n$

I contatori Cherenkov producono luce solo per particelle con $\beta \geq 1/n$ e funzionano egregiamente per esempio per distinguere, a parità di energia cinetica, protoni, pioni ed elettroni. Nella tabella 17.1 sono riportate le caratteristiche di alcuni materiali usati come rivelatori Cherenkov.

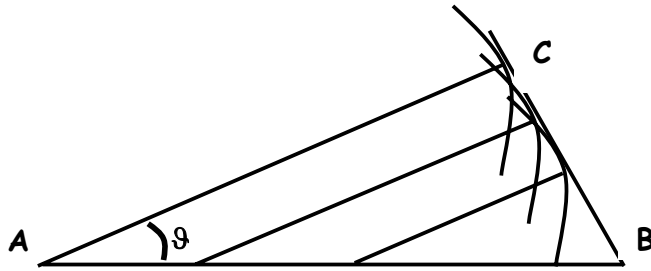


Fig. 17.23 meccanismo coerente di produzione di luce Cherenkov

Material	n	Threshold β	Protons	Pions	Electrons
Liq. N_2	1.205	0.830	760 Mev	112 Mev	410 kev
Liq. O_2	1.221	0.819	710 Mev	104 Mev	380 kev
FC-75*	1.277	0.782	580 Mev	86 Mev	315 kev
Water	1.332	0.751	500 Mev	73 Mev	265 kev

* A fluorochemical available from Minnesota Mining & Mfg. Co. (Composition $C_8F_{16}O$).

Tab. 17.1 caratteristiche di alcuni rivelatori Cherenkov

Misurando l'angolo della luce Cherenkov si può risalire al β della particella e se la sua energia o la sua quantità di moto possono essere simultaneamente misurate se ne ricava la massa. I rivelatori RICH, Ring Image Cherenkov, funzionano come descritto molto schematicamente in figura 17.24. La luce Cherenkov prodotta dalle particelle viene raccolta da una matrice di fotomoltiplicatori (in realtà attraverso un complicato sistema di specchi) ed è quindi possibile misurare l'angolo θ ed identificare il tipo di particelle.

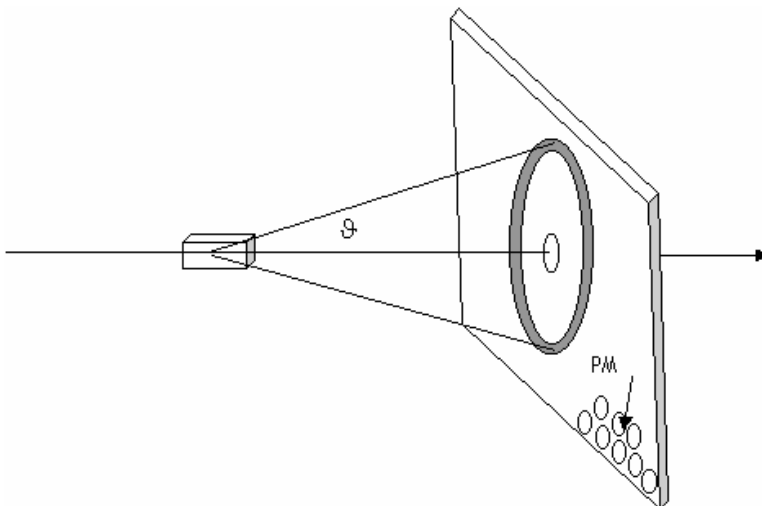


Fig. 17.24 principio di funzionamento di un rivelatore RICH

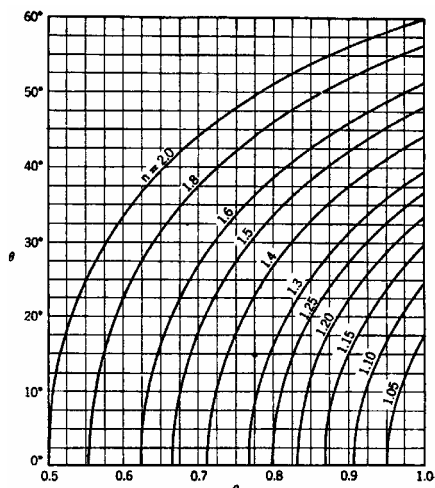


Fig. 17.25 dipendenza di ϑ dal valore di β

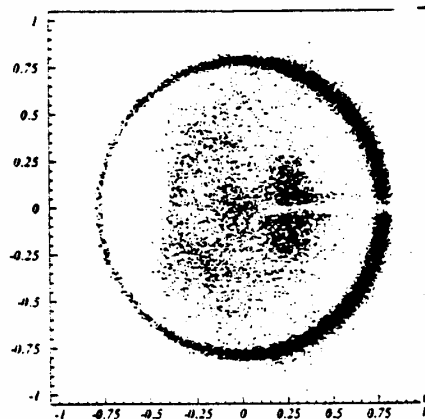


Fig. 17.26 esempio di ricostruzione degli eventi

Nelle figura 17.25 è riportata la dipendenza dell'angolo ϑ in funzione del β delle particelle al variare dell'indice di rifrazione n e nella figura 17.26 un esempio di ricostruzione degli eventi da dati sperimentali.

17.16 Scintillatori organici.

Sono principalmente idrocarburi della serie aromatica. La loro caratteristica migliore è il rapidissimo tempo di decadimento (qualche nanosecondo), che li rende ottimi per la generazione di impulsi di timing. La luce di scintillazione in questi composti nasce da transizioni energetiche degli elettroni covalenti degli orbitali " π -molecolari". Un tipico diagramma energetico è riportato in figura 17.27:

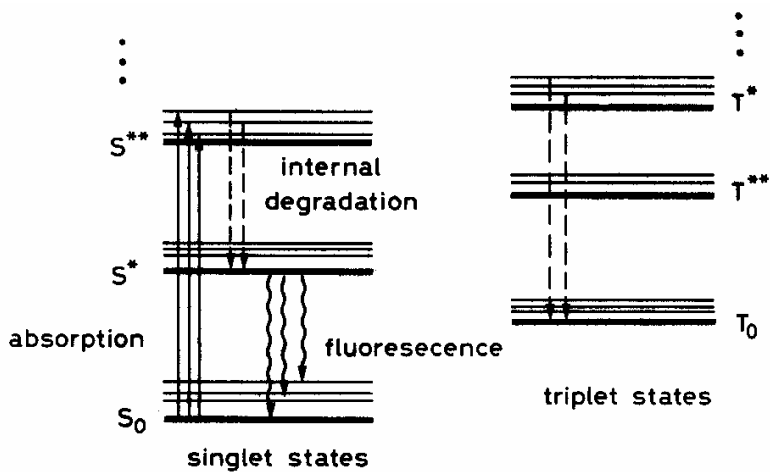
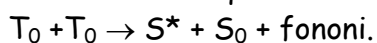


Fig. 17.27 livelli energetici negli scintillatori organici

Vi sono stati distinti di singoletto e di tripletto. Lo stato fondamentale S_0 è uno stato di singoletto. Sopra di esso vi sono i livelli eccitati di singoletto S^* , S^{**} , ecc. e gli stati di tripletto T_0 , T^* , T^{**} , ecc. Associata con ciascun livello elettronico vi è una struttura fine che corrisponde a modi di eccitazione vibrazionale. La spaziatura energetica tra le varie bande di livelli è dell'ordine dell'elettronvolt, mentre quella tra i livelli vibrazionali è dell'ordine del decimo di elettronvolt. La radiazione incidente eccita i livelli come mostrato dalle frecce. Le eccitazioni di singoletto in genere decadono in qualche picosecondo dalla banda S^{**} alla banda S^* senza emissione di radiazione. Viceversa la probabilità di decadimento radiativo da S^* a S_0 è elevatissima: i tempi caratteristici di questo processo sono di qualche nanosecondo, e questa è la cosiddetta componente pronta. Tra l'altro, il fatto che S^* decade a stati eccitati vibrazionali di S_0 implica che la radiazione luminosa è leggermente minore di quella necessaria per la transizione $S_0 \rightarrow S^*$ e spiega quindi la trasparenza dello scintillatore alla sua stessa radiazione. Gli stati di tripletto invece decadono per degradazione interna non radiativa allo stato T_0 che non può decadere, a causa di regole di selezione, allo stato S_0 . Il meccanismo di diseccitazione, più lento, avviene tramite interazione con un altro stato T_0 come schematizzato qui sotto:



Lo stato S^* si diseccita come descritto sopra. Questo processo contribuisce alla cosiddetta componente lenta o ritardata della luce di scintillazione. Tra gli scintillatori organici ricordiamo l'antracene ($C_{14}H_{10}$), lo stilbene ($C_{14}H_{12}$) e molti materiali plastici. Alcuni scintillatori organici possono essere allo stato liquido: in questo caso sono utilizzati per la rivelazione di particelle beta di bassissima energia (3H , ^{14}C). Il campione radioattivo viene disciolto all'interno dello scintillatore e si evita così qualsiasi spessore morto tra rivelatore e sorgente, massimizzando inoltre l'angolo solido di accettazione che in questa geometria vale 4π .

Gli scintillatori organici producono segnali estremamente veloci, con tempi di durata di qualche nanosecondo, che li rende particolarmente adatti all'impiego come apparati di "trigger" temporale. Altro vantaggio è il loro basso costo e la semplicità dell'utilizzo. La limitazione maggiore è senza dubbio la scarsa risoluzione energetica (dovuta ad una bassa resa di luce). Inoltre, dato il loro basso valore di Z , non sono adatti alla rivelazione di fotoni, soprattutto se si vuole determinarne lo spettro energetico.

17.17 Scintillatori inorganici

Gli scintillatori inorganici sono cristalli di alogenuri alcalini con aggiunta di piccole percentuali di "attivatori" che vengono indicati tra parentesi. Tra i più usati ricordiamo $NaI(Tl)$, $CsI(Tl)$, $KI(Tl)$, $LiI(Eu)$ e il CsF_2 . Fra i materiali non alcalini ricordiamo soprattutto il $Bi_4Ge_3O_{12}$ (ossigermanato di Bismuto, noto brevemente come BGO), il BaF_2 , il $ZnS(Ag)$.

Il meccanismo di luminescenza è completamente differente da quello che avviene negli scintillatori organici. In questo caso l'emissione di luce non è un fenomeno molecolare ma è collegato alla struttura a bande dei cristalli. In un cristallo puro il passaggio di una particella ionizzante può provocare il passaggio di un elettrone dalla banda di valenza alla banda di conduzione. Il ritorno dell'elettrone alla banda di valenza, con relativa emissione di un fotone, è però un processo inefficiente, ed in più i fotoni sarebbero emessi nell'ultravioletto, che è una regione di scarsa efficienza per i fotocatodi dei fotomoltiplicatori. Per aumentare la probabilità di emissione di fotoni ottici durante il meccanismo di diseccitazione, la struttura delle bande viene modificata mediante l'introduzione di apposite impurezze, cioè atomi di sostanze opportune. La presenza di impurezze significa avere un certo numero di atomi di tali sostanze uniformemente distribuiti all'interno del reticolo cristallino. Le impurezze introdotte vengono anche denominate centri attivatori a causa della funzione che vanno a svolgere. Esse danno origine a dei livelli energetici, spazialmente localizzati, che si vanno a collocare all'interno della banda proibita (fig. 17.28).

La particella ionizzante può trasferire sufficiente energia ad un elettrone da portarlo nella banda di conduzione. Questo è il classico meccanismo di ionizzazione in cui gli elettroni e le lacune generati si muovono liberamente nel reticolo. Un'altra possibilità è invece che l'energia ceduta all'elettrone non sia sufficiente per portarlo nella banda di conduzione, cosicché esso rimane legato elettrostaticamente alla lacuna. Questo stato debolmente legato si chiama "eccitone". L'eccitone si può muovere attraverso tutto il cristallo ma non contribuisce alla conduzione poiché la sua carica totale è nulla. Ci si aspetta che esistano tutta una serie di livelli energetici dell'eccitone che vanno ad occupare la banda proibita, immediatamente sotto la banda di conduzione del cristallo. Nello NaI(Tl) la larghezza della banda proibita è dell'ordine di $6\div 8$ eV e la banda degli eccitoni è ≈ 1 eV. L'eccitone durante la sua diffusione attraverso il cristallo può venir catturato da un centro attivatore, che a sua volta si disecciterà attraverso emissione di radiazione: la lunghezza d'onda del segnale luminoso non è quindi legata alle impurezze e non al cristallo che, per questo motivo, risulta trasparente ad essa. Il meccanismo può venire considerato da un altro punto di vista, esaminando la struttura dei livelli energetici. La curva AE della figura 17.29 rappresenta l'energia potenziale dello stato fondamentale in funzione di una coordinata di configurazione, per esempio la distanza internucleare delle molecole del cristallo. La curva BE rappresenta l'andamento dell'energia potenziale per il primo stato eccitato. L'eccitazione del centro attivatore in seguito alla cattura di un eccitone è indicata dalla transizione AB. Il successivo decadimento di questo stato avviene per dissipazione termica con gli atomi vicine e porta il sistema da B a C. La transizione radiativa CD riporta il sistema nello stato fondamentale e tramite scambi termici si riporterà infine nella configurazione di energia minima A. Lo spettro di emissione avrà quindi lunghezze

d'onda maggiori dello spettro di assorbimento. Questo fatto risulta estremamente vantaggioso in quanto il cristallo risulta trasparente alla luce di diseccitazione (se venisse riassorbita non potrebbe essere rivelata dal fotomoltiplicatore) Inoltre questo porta lo spettro della luce dall'ultravioletto al visibile, in una zona dove la risposta dei fotomoltiplicatori è molto migliore.

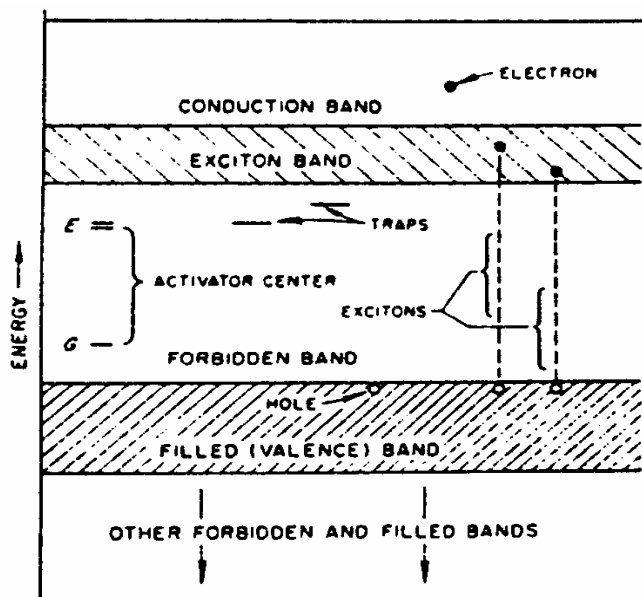


Fig. 17.28 livelli energetici negli scintillatori inorganici

Gli scintillatori inorganici, rispetto a quelli organici, a parità di energia depositata dalla radiazione incidente emettono molta più luce (quasi un ordine di grandezza) e presentano quindi (vedi statistica di Poisson) una risoluzione nettamente migliore. Altro vantaggio, specie per la rivelazione di fotoni, è il loro relativamente alto numero atomico che li rende molto più efficienti. Un inconveniente che alcuni di loro presentano (soprattutto NaI e CsI) è di essere molto igroscopici: è necessario quindi proteggerli rinchiudendoli in contenitori ermetici. Il BaF₂ ed il BGO non sono invece igroscopici e possono quindi essere manipolati senza particolari protezioni. Tutti gli scintillatori, sia organici che inorganici, devono essere accoppiati ad un fotomoltiplicatore, e l'insieme rivelatore-PM deve essere completamente isolato dalla luce ambientale, tramite un recipiente sigillato. Per avere inoltre la massima raccolta di fotoni, tutte le pareti del rivelatore, ad eccezione di quella che si affaccia sul PM, sono ricoperte da un materiale altamente riflettente.

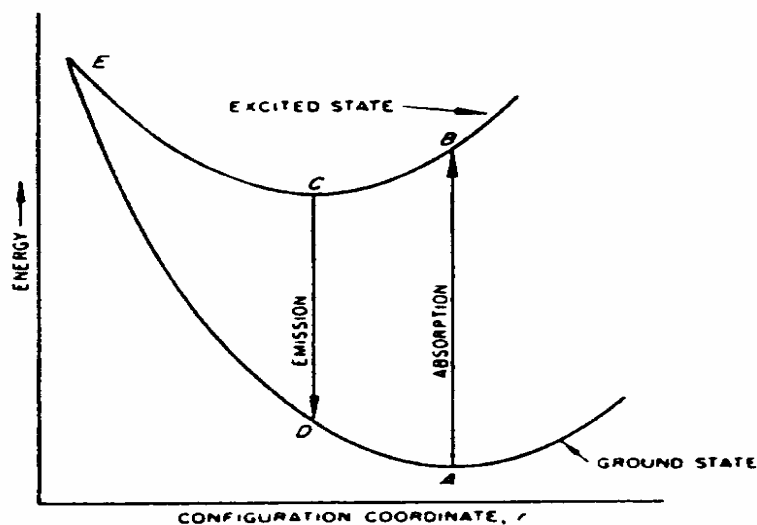


Fig. 17.29 diagramma energetico del meccanismo di scintillazione dei rivelatori inorganici

17.18 Il fotomoltiplicatore.

Come abbiamo accennato sono strumenti in grado di trasformare segnali ottici in impulsi elettrici. Le parti fondamentali del fotomoltiplicatore sono indicate nelle figura 17.30:

Il fotocatodo.

È uno strato di materiale fotosensibile che ha la funzione di convertire, per effetto fotoelettrico, i fotoni ottici incidenti in elettroni. La durata dell'impulso luminoso dovuto all'interazione delle particelle con lo scintillatore è dell'ordine di qualche nanosecondo, in quanto il fotocatodo raccoglie fotoni che sono emessi isotropicamente dal punto di interazione e possono aver subito riflessioni ad opera delle pareti che racchiudono il rivelatore. Gli elettroni emessi hanno anch'essi una distribuzione temporale dell'ordine del nanosecondo. Poiché il numero di questi elettroni è molto basso (sono in genere una decina), la loro carica elettrica globale è troppo piccola per essere misurata direttamente, ed è necessario un sistema di moltiplicazione successivo.

L'ottica di raccolta

Dopo essere stati emessi dal fotocatodo, i fotoelettroni devono essere raccolti e portati senza perdite al primo stadio di moltiplicazione.

La sezione moltiplicatrice

Gli elettroni emessi dal fotocatodo vengono guidati, tramite un opportuno campo elettrostatico, attraverso una struttura di elettrodi, i dinodi, dove ciascun elettrone incidente dà origine, tramite il meccanismo della emissione secondaria, a più elettroni uscenti (in genere 2÷3). Il segnale di carica opportunamente amplificato, viene alla fine raccolto dall'anodo. Se il fattore di emissione secondaria vale δ , ed il numero dei dinodi è N , il fattore di moltiplicazione complessivo vale δ^N :

per esempio con $\delta=3$ un PM con $N=14$ dinodi presenta una fattore di moltiplicazione pari a $5 \cdot 10^6$, ma si riescono ad ottenere fattori di moltiplicazione fino a 10^8 . E' importante notare che l'amplificazione è lineare e la carica finale rimane proporzionale a quella iniziale (e quindi alla luce emessa in scintillazioni), ed è proporzionale all'energia depositata, conservandone inoltre l'informazione temporale.

I dinodi sono tenuti ad una differenza di potenziale accelerante (positiva) tra di loro, in modo da attrarre gli elettroni provenienti dal dinodo precedente. Questo è ottenuto tramite un partitore di tensione, come schematizzato in figura 17.31

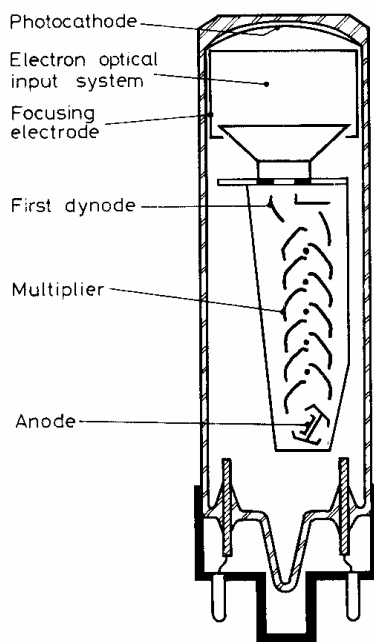


Fig. 17.30 schema di un fotomoltiplicatore

L'amplificazione di un fotomoltiplicatore dipende dal coefficiente δ che, in prima approssimazione, è proporzionale alla tensione interdinodo V_d . Supponendo V_d che resti costante lungo tutto il PM, e supponendo $\delta = k V_d$, il guadagno G del fotomoltiplicatore, ossia il rapporto tra gli elettroni raccolti all'anodo e quelli emessi dal fotocatodo, è dato da:

$$G = \delta^N = k^N \cdot V_d^N, \text{ e anche: } \frac{dG}{G} = N \frac{dV_d}{V_d}$$

Da questa relazione si vede quanto critica è la stabilizzazione in tensione dei dinodi: se per esempio $N = 15$, una variazione dello 0.1% sulla tensione di alimentazione dei dinodi si traduce in una variazione del 1.5% sul guadagno e quindi in un peggioramento della risoluzione del rivelatore. Se supponiamo che δ , a causa di processi stocastici, fluttui da evento ad evento secondo la statistica di Poisson (e

quindi con deviazione standard data da $\sqrt{\delta}$, nel caso che il fotocatodo emetta un solo fotoelettrone il segnale finale dopo N dinodi avrà una carica totale pari a $G = \delta^N$ con una deviazione standard relativa data da:

$$\left(\frac{\sigma_G}{G}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_\delta}{\delta}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_\delta}{\delta}\right)^4 + \dots + \left(\frac{\sigma_\delta}{\delta}\right)^{2N}$$

che si ottiene considerando indipendenti le fluttuazioni su ogni dinodo e sommandole quadraticamente. Poiché $\sigma_\delta = \sqrt{\delta}$, si ottiene.

$$\left(\frac{\sigma_G}{G}\right)^2 = \frac{1}{\delta} + \frac{1}{\delta^2} + \dots + \frac{1}{\delta^N} \approx \frac{1}{\delta - 1}$$

Questa relazione ci dice che la deviazione standard è dominata dalle fluttuazioni sul primo dinodo, dove del resto la statistica è minima e gli effetti delle fluttuazioni sono più rilevanti.

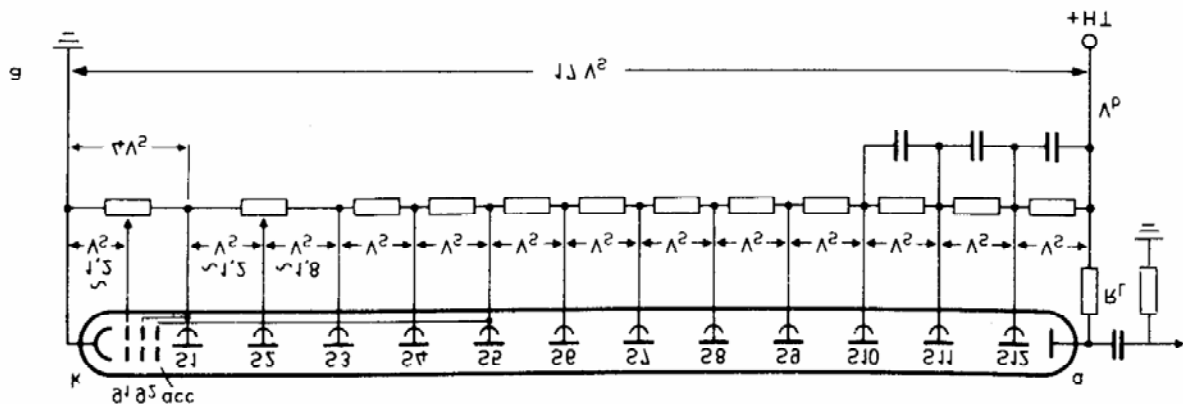


Fig. 17.31 circuito di alimentazione di un fotomoltiplicatore

IL problema della stabilizzazione in tensione dei dinodi si risolve utilizzando alimentatori stabilizzati, e facendo in modo che la corrente di alimentazione del partitore sia molto maggiore della corrente di elettroni lungo i dinodi (che scorre in parallelo) in modo che possa essere trascurata. Molto schematicamente, la differenza di potenziale tra due dinodi successivi è data da: $V_d = R(I_p + I_D)$, essendo I_p la corrente che fluisce nel partitore, ed I_D la corrente di elettroni lungo il tubo da vuoto. Poiché da evento ad evento I_D varia, per mantenere V_d costante deve sempre essere: $I_p \gg I_D$.

L'effetto della perturbazione dovuta a I_D si fa sentire soprattutto sugli ultimi dinodi, dove I_D è maggiore. I condensatori posti in parallelo (vedi schema precedente) sugli ultimi tra dinodi hanno la funzione di fornire la carica necessaria durante il picco di corrente senza che la tensione del dinodo vari.

Il numero di fotoni ottici prodotti dalla radiazione incidente è dato da: $P_v = \frac{E}{h\nu} \varepsilon_v$, dove E è l'energia depositata nello scintillatore, $h\nu$ l'energia dei fotoni ottici e ε_v l'efficienza di scintillazione. ε_v è in genere molto bassa: vale per esempio 8% per lo NaI e meno del 4% per l'antracene. L'impulso di fotoni ha una distribuzione temporale tipica della diseccitazione dello scintillatore:

$$p(t) = A \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) = \frac{P_v}{\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

τ è dell'ordine di 10 ns per gli scintillatori plastici e vale 250 ns per lo NaI.

Il numero di fotoelettroni prodotti al fotocatodo risulta allora: $P_e = \varepsilon_L \varepsilon_C P_v$, dove ε_L rappresenta l'efficienza ottica (in genere attorno al 90%) e ε_C rappresenta l'efficienza di conversione del fotocatodo (in genere attorno al 10÷20 %). Sostituendo:

$$P_e = \varepsilon_L \varepsilon_C P_v = \varepsilon_L \varepsilon_C \varepsilon_v \frac{E}{h\nu}$$

La carica totale Q raccolta all'anodo dopo la moltiplicazione operata dai dinodi vale:

$$Q = P_e \delta^N = \varepsilon_L \varepsilon_C \varepsilon_v \frac{E}{h\nu} \delta^N$$

dove δ è al solito il numero medio di elettroni prodotti per emissione secondaria ed N il numero dei dinodi. Da qui si vede che se il primo dinodo riceve una decina di elettroni, la carica totale raccolta all'anodo corrisponde ad una ventina di picocoulomb.

17.19 Rivelatori a semiconduttore

Il principio di funzionamento è analogo a quello dei rivelatori a gas. Al posto del gas il mezzo è ora un volume di semiconduttore in cui una radiazione ionizzante crea coppie elettrone-lacuna (invece che coppie elettrone-ione) che possono essere raccolte per mezzo di un campo elettrico. Il vantaggio degli apparati a semiconduttore è che l'energia media richiesta per ottenere una coppia elettrone-lacuna è almeno 10 volte più piccola di quella necessaria in un rivelatore a gas, e questo si traduce in una risoluzione migliore. Inoltre i dispositivi a semiconduttore, data la loro maggiore densità, hanno potere frenante (particelle cariche) e coefficiente di attenuazione (fotoni) maggiori, e questo si traduce in maggiore efficienze di rivelazione. Altro vantaggio, nel caso di rivelazione di fotoni, è il numero atomico più elevato (Ge: $Z=32$) rispetto ai rivelatori a gas (Ar: $Z=20$).

La struttura di un semiconduttore, comparata a quella di un conduttore e di un isolante, è riportata in figura 17.32

Nei metalli banda di conduzione e di valenza sono sovrapposte, tanto è vero che vi sono elettroni liberi che partecipano alla conduzione della corrente elettrica. Negli isolanti il gap tra le due bande vale circa 6 eV, mentre nei semiconduttori il salto energetico è dell'ordine dell'elettronvolt: questo significa che l'energia termica può

essere sufficiente a portare qualche elettrone dalla banda di valenza a quella di conduzione lasciando una lacuna (mancanza di elettrone e quindi assimilabile ad una carica positiva) nella posizione precedentemente occupata dall'elettrone.

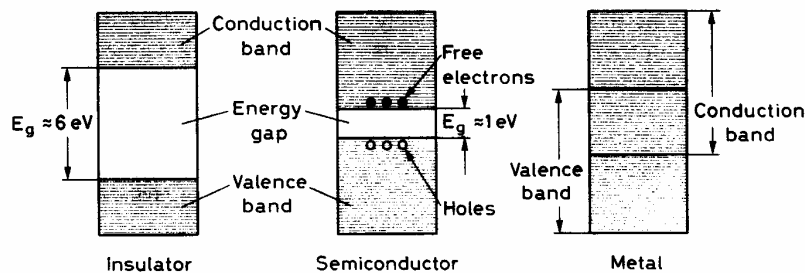


Fig. 17.32 la struttura a bande di un semiconduttore

Il fenomeno di conduzione elettrica per un semiconduttore è allora dovuto a due effetti: quello degli elettroni che si muovono nella banda di conduzione e quello delle lacune che si muovono nella banda di valenza. Coppie elettrone-lacuna sono costantemente generate a causa dell'energia termica ma, allo stesso tempo alcune di esse si ricombinano finché non si raggiunge una situazione di equilibrio statistico.

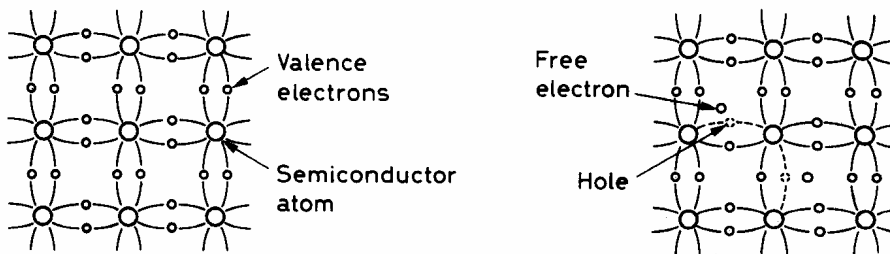


Fig. 17.33 legami elettronici in un semiconduttore. A temperature più elevate (destra) si nota la creazione di cariche libere e lacune

I semiconduttori sono materiali tetravalenti come Silicio e Germanio, il cui reticolo è formato da legami covalenti. In figura 17.33 è illustrata la situazione di un cristallo di silicio a $T = 0 \text{ K}$ (a sinistra) e a temperatura più elevata (a destra). La concentrazione n_i di elettroni e quindi di lacune ad una temperatura fissata T risulta essere:

$$n_i = AT^{3/2} \exp\left(-\frac{E_{\text{gap}}}{2kT}\right)$$

dove A è una costante che non dipende dalla temperatura ed E_{gap} rappresenta la larghezza della banda proibita. Per $T = 300 \text{ K}$, valori tipici per il Germanio e per il

Silicio, che hanno entrambi circa 10^{22} atomi/cm³ sono: $n_i \approx 2.5 \cdot 10^{13}$ cm⁻³ (ossia una parte su 10^9 per il Germanio) e $n_i \approx 1.5 \cdot 10^{10}$ cm⁻³ (una parte su 10^{12} per il Si). Il fenomeno della ricombinazione avviene quando un elettrone che si trova nella banda di conduzione occupa il posto di una lacuna passando nella banda di valenza: nel processo viene emesso un fotone. Il meccanismo principale di ricombinazione avviene tramite centri di ricombinazione o di intrappolamento causati dalle impurità del reticolo cristallino (fig. 17.34).

Questo fenomeno può essere amplificato e tenuto sotto controllo con il cosiddetto "drogaggio". I cristalli tetraivalenti di Si o Ge possono essere "drogati" tramite l'aggiunta di piccole quantità di materiale pentavalente (As, Sb, P) detto donatore, creando un eccesso di elettroni, oppure con un materiale trivalente (Ga, B, In) detto accettore, ottenendo un eccesso di lacune come schematicamente illustrato in figura 17.35.

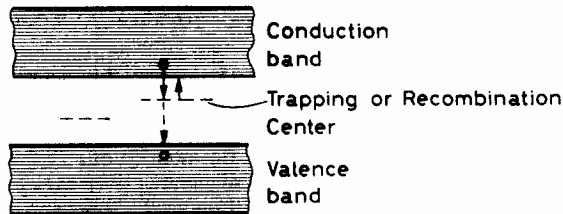


Fig. 17.34 i centri di ricombinazione in un semiconduttore

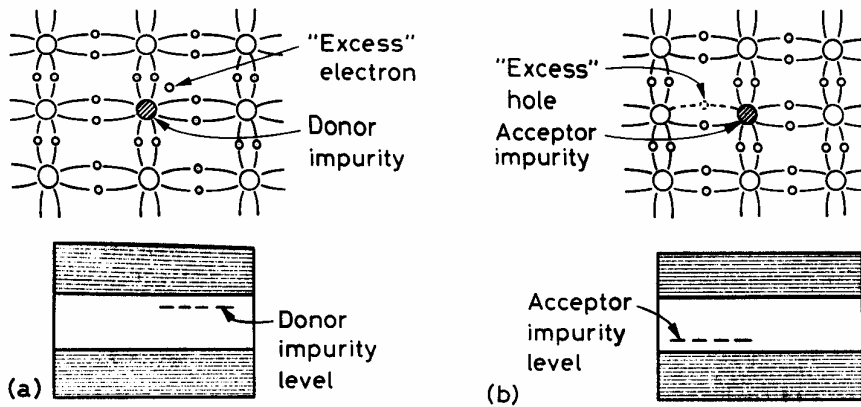


Fig. 17.35 drogaggio di un semiconduttore con materiali penta e trivalenti

Questi semiconduttori drogati vengono chiamati rispettivamente semiconduttori di tipo n o di tipo p. Se ora si uniscono due semiconduttori con drogaggi opposti, si ottiene una giunzione pn schematizzata nella figura 17.36

A causa delle differenti concentrazioni di elettroni e di lacune vi è una iniziale diffusione degli elettroni verso la regione p e delle lacune verso la regione n. All'equilibrio si crea una differenza di potenziale di contatto V_0 e si genera un campo elettrico che impedisce ulteriore diffusione. Senza entrare nel dettaglio, ciò che è importante per l'utilizzo dei semiconduttori come rivelatori di particelle è che la zona di cambiamento di potenziale (detta anche zona di svuotamento, "depletion layer") ha la proprietà di essere completamente libera da ogni possibile portatore di carica. Questa zona, che per $V_0 = 1$ Volt vale $10 \div 100 \mu\text{m}$, può essere artificialmente estesa (vedi figura 17.37) se la giunzione pn viene polarizzata inversamente con una tensione applicata $V_I \approx 50 \div 100$ Volt

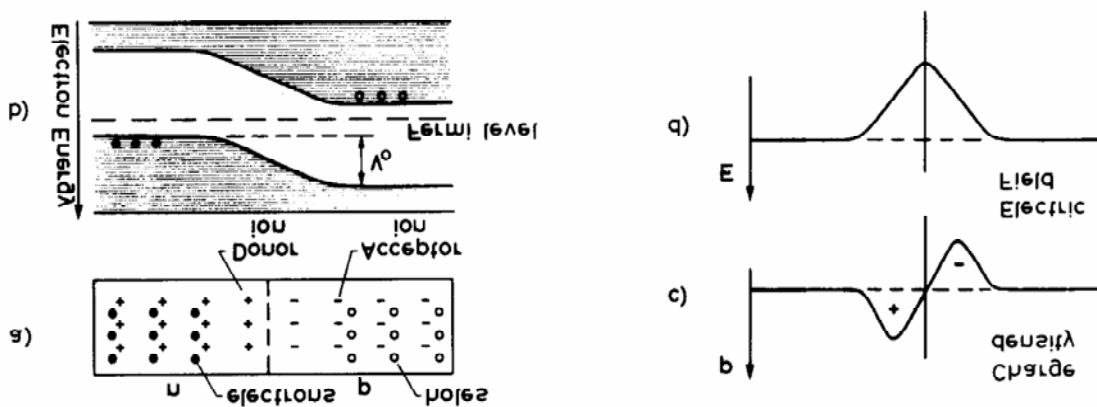


Fig. 17.36 giunzione p-n e campo elettrico di contatto

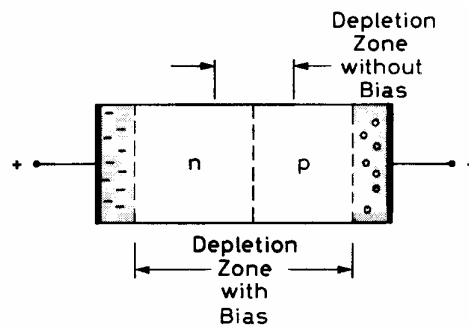


Fig. 17.37 la zona di svuotamento aumenta per la presenza di una polarizzazione inversa

La zona di svuotamento funziona a questo punto come un rivelatore a gas: la radiazione incidente, interagendo con il cristallo, perde energia per ionizzazione e produce coppie elettrone-lacuna che vengono raccolte dal campo elettrico prodotto

dalla polarizzazione inversa. Il vantaggio principale dei rivelatori a semiconduttore è dovuto al fatto che l'energia per creare una coppia elettrone-lacuna è assai bassa. Come per i gas, l'energia media è indipendente dal tipo e dall'energia della radiazione incidente e risulta circa 1/100 di quella richiesta per la generazione di un fotoelettrone in uno scintillatore: nel caso dei semiconduttori essa ovviamente dipende dalla temperatura. A titolo di esempio, per il silicio l'energia necessaria per creare una coppia vale 3.62 eV a temperatura ambiente e 3.81 eV alla temperatura di 77 K (azoto liquido); per il germanio è di soli 2.96 eV a 77 K (non è possibile utilizzare rivelatori al Germanio a temperatura ambiente, a causa del rumore termico).

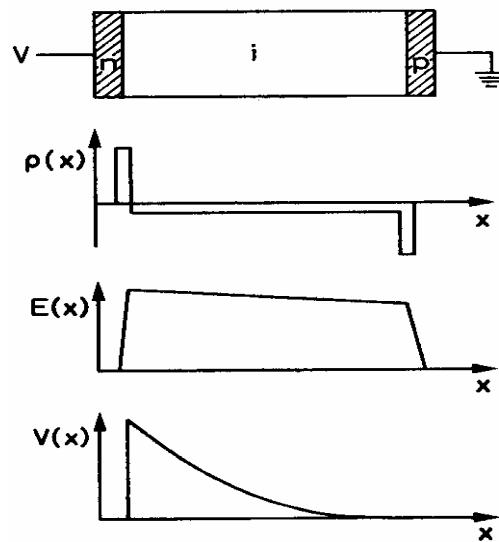


Fig. 17.38 andamento di varie grandezze elettriche nella zona di svuotamento

Per aumentare lo spessore della zona sensibile si inserisce tra la zona p e la zona n una zona di semiconduttori compensati (detti di tipo i) per i quali la concentrazione di donatori ed accettori sono le stesse. Questi rivelatori p-i-n hanno la zona priva di carica spaziale abbastanza ampia, dell'ordine di qualche centimetro ed un campo elettrico interno pressochè costante.

Per ottenere questa zona compensata si diffonde nel cristallo (Ge o Si) del litio (donatore) in un cristallo originariamente di tipo p, come illustrato in figura 17.39. Se la concentrazione di litio varia con continuità, si passa gradatamente da un materiale di tipo p ad un materiale di tipo n e la zona di svuotamento risulta sensibilmente più spessa. Per mantenere questo gradiente di concentrazione è necessario mantenere alla temperatura dell'azoto liquido questo tipo di rivelatori, indicati con il simbolo Ge(Li) o Si(Li): questo è appunto l'inconveniente maggiore.

In genere i rivelatori al silicio sono usati in tutte le applicazioni che comportano la rivelazione di particelle cariche, mentre i rivelatori al germanio sono preferiti per la rivelazione dei fotoni.

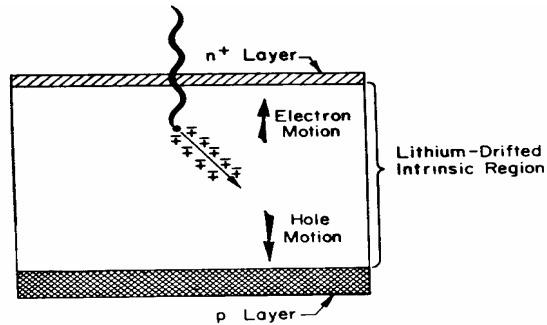


Fig. 17.39 rivelatori a diffusione di Litio ("Lithium-drifted")

Recentemente, i grandi progressi tecnologici effettuati sulla crescita di cristalli hanno permesso la realizzazione di cristalli anche di grosse dimensioni (volumi dell'ordine del litro) ad altissima purezza (meno di 10 atomi/cm^3 di impurezze). Rivelatori di questo tipo, detti HPGe (High Purity Germanium) hanno l'enorme vantaggio di non dover essere tenuti continuamente a bassa temperatura: il raffreddamento è necessario solo se viene applicata la tensione di polarizzazione, che in questo caso, a causa delle maggiori dimensioni della zona sensibile, sono dell'ordine di qualche migliaio di Volt.

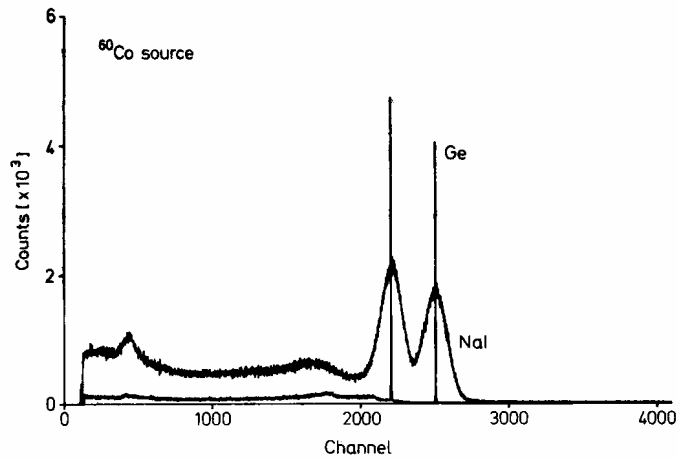


Fig. 17.40 confronto tra rivelatore al Germanio e NaI(Tl)

Nel grafico di figura 17.40 precedente è riportato il confronto tra la funzione di risposta di un rivelatore al Germanio ed un rivelatore NaI(Tl): è evidente la notevole differenza in risoluzione energetica.

I rivelatori al silicio, nel caso di rivelazione di particelle cariche, possono essere formati da strisce sottilissime affacciate parallelamente tra di loro e lette da una elettronica indipendente come illustrato nelle figure 17.41 e 17.42. In questo modo

si comportano come i fili di una camera MWPC o addirittura come una camera a drift.

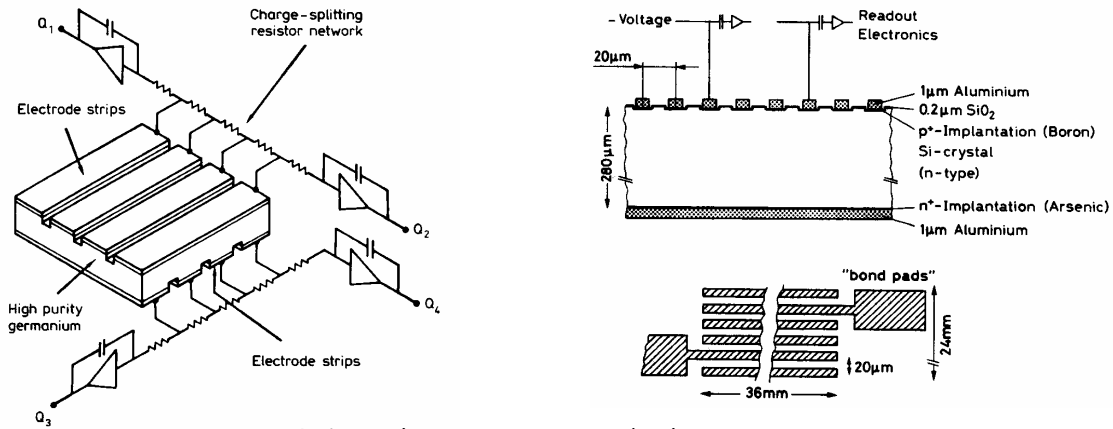


Fig. 17.41 rivelatori a microstrip di silicio

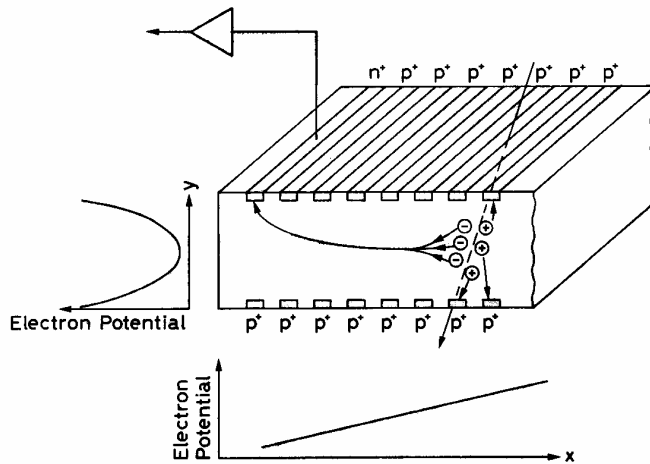


Fig. 17.42 identificazione di una traccia con rivelatori microstrip

17.20 Scelta del rivelatore

Vediamo ora, a conclusioni di questo capitolo, come si deve scegliere il tipo di rivelatore a seconda della radiazione da monitorare.

Radiazione alfa

Il range delle particelle alfa in aria è di qualche centimetro, nei materiali solidi di qualche micron

- Contatori proporzionali a finestra sottile
- Rivelatori a semiconduttore (Silicio) a barriera superficiale

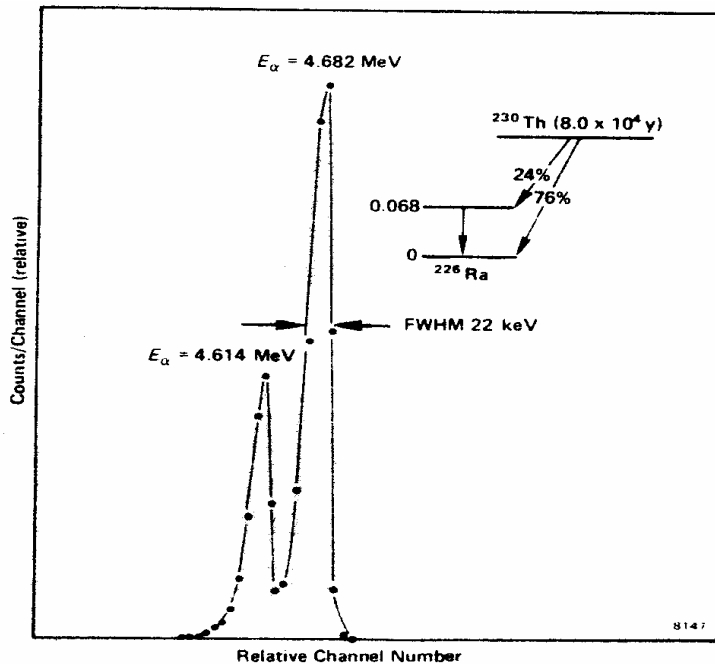


Fig. 17.43 Spettro particelle alfa dal ^{230}Th ottenuto con un contatore proporzionale

A titolo di esempio in figura 17.43 è riportato lo spettro delle particelle alfa emesse dal Torio rivelate tramite un contatore proporzionale. A causa della buona risoluzione (FWHM = 22 keV) sono distinguibili le due energie diverse. Il picco di energia 4.682 MeV risulta più intenso in quanto associato al 76% dei decadimenti. Da una valutazione numerica si ricaverebbe che il rapporto delle aree dei picchi sta esattamente come il rapporto delle relative probabilità di decadimento (branching ratio)

In figura 17.44 è riportato invece uno spettro, sempre di particelle alfa, ma ben più complesso.

Naturalmente, sia i contatori proporzionali che i rivelatori a stato solido possono essere utilizzati per la rivelazione di raggi X di bassa energia, essendo il cammino

libero medio dell'ordine di poche centinaia di micron (qualche mm al massimo). Lo spettro di figura 17.45 è appunto uno spettro dei raggi x atomici provenienti dallo ^{241}Am .

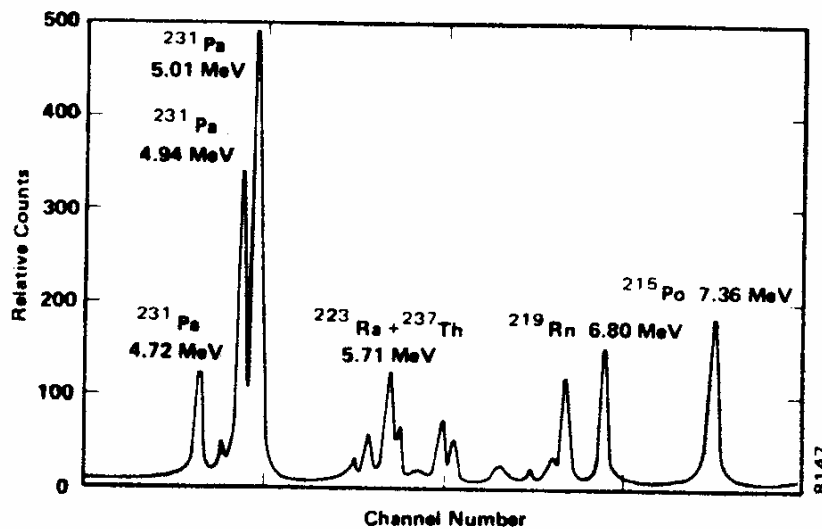


Fig. 17.44 Spettro particelle alfa ottenuto con un rivelatore a semiconduttore (Si)

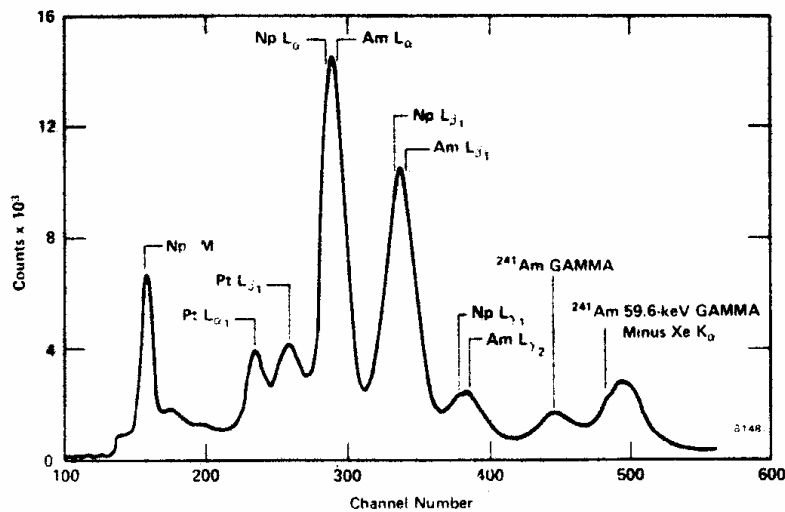


Fig. 17.45 spettro dei raggi x atomici provenienti dallo ^{241}Am ottenuto con un contatore proporzionale

Radiazione beta

Hanno uno spettro continuo, quindi la risoluzione del rivelatore non è importante.

Il range è di qualche g/cm^2

- Contatori proporzionali

- Scintillatori organici
- Per radiazione beta di bassa energia (^{14}C : $E_{\text{max}}= 180 \text{ keV}$, ^3H : $E_{\text{max}}= 20 \text{ keV}$) vengono usati scintillatori liquidi o contatori proporzionali operanti a pressione atmosferica a flusso di gas (senza finestra)

A titolo di esempio in figura 17.46 è riportato lo spettro beta del Tallio204. I punti rappresentano i conteggi sperimentali mentre la linea continua rappresenta un fit. Come già detto, trattandosi di spettri continui, la risoluzione non è un parametro importante e per la rivelazione di particelle beta vengono preferiti gli scintillatori inorganici a causa del loro basso costo e della loro facilità di impiego. Naturalmente il discorso è diverso se si devono rivelare elettroni di elevata energia. In questo caso, a causa della produzione di sciami elettromagnetici, il comportamento degli elettroni e dei fotoni di elevata energia nella materia è pressocchè analogo e pertanto verranno utilizzati per la loro rivelazione gli stessi tipi di rivelatori (vedi nel seguito rivelatori per fotoni)

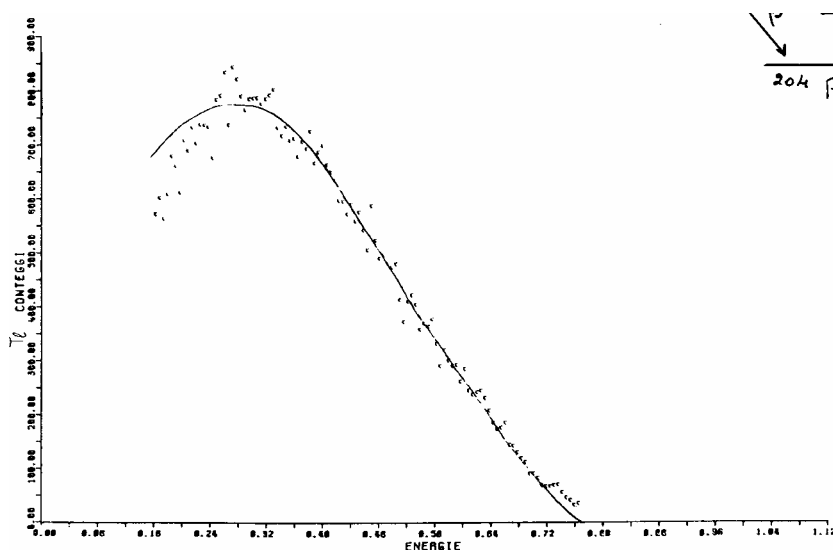


Fig. 17.46 Spettro beta del ^{204}Tl misurato con uno scintillatore organico

Un altro esempio di rivelazione di spettro beta è dato in figura 17.47 dove è visibile la doppia spalla, tipica del decadimento beta in cascata. In questo caso si ha la trasformazione: $^{90}\text{Sr} \rightarrow ^{90}\text{Y} \rightarrow ^{90}\text{Zr}$. Lo ^{90}Sr decade in ^{90}Y con un tempo di dimezzamento di 28 anni ed una energia beta massima di 0.5 MeV (prima spalla in figura, a causa dell'effetto della soglia se ne vede solo la discesa). Lo ^{90}Y decade immediatamente in ^{90}Zr con un tempo di dimezzamento di 62 ore (siamo quindi in condizioni di equilibrio secolare) ed una energia beta massima di 2.7 MeV (seconda spalla in figura)

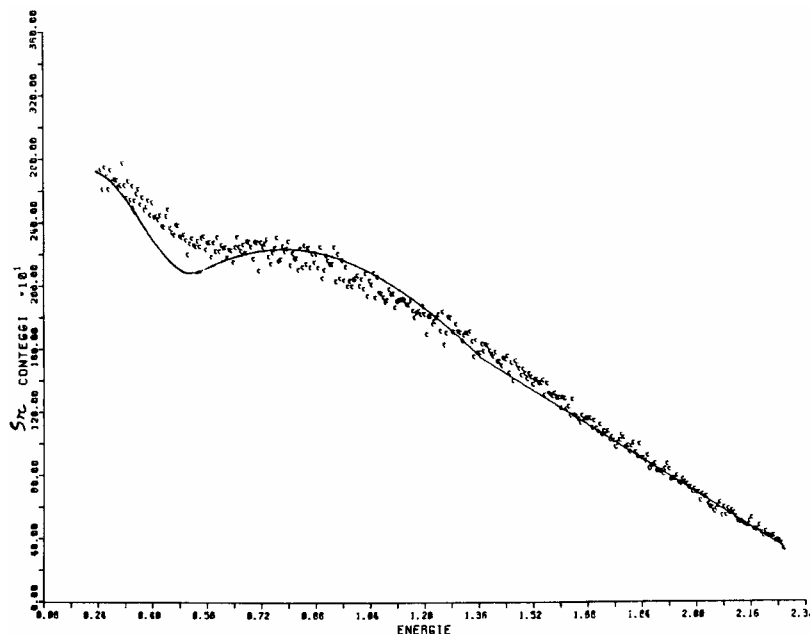


Fig. 17.47 Spettro beta del ^{90}Sr : è visibile il doppio decadimento beta ($^{90}\text{Sr} \rightarrow ^{90}\text{Y} \rightarrow ^{90}\text{Zr}$)

Radiazione gamma

Necessitano di rivelatori con alto Z ed alta densità: i più usati sono NaI(Tl) e BGO. Possono essere costruiti anche di grandi dimensioni, quindi con efficienza relativamente elevata anche o per fotoni di alta energia. Se la risoluzione è un parametro fondamentale, il rivelatore migliore è il germanio, specie lo HPGe: in questo caso le dimensioni sono ridotte e l'efficienza risulta minore.

Nella figura 17.48 sono schematizzati i principali effetti che stanno alla base della rivelazione gamma con scintillatori e che contribuiscono alla forma della funzione di risposta: è possibile distinguere vari effetti dovuti all'interazione dei fotoni sia nel volume sensibile del rivelatore che nei materiali circostanti: la forma dello spettro gamma dipende dal peso relativo di questi effetti e quindi dalle distanze e dimensioni dei materiali circostanti.

In figura 17.49 riportato uno spettro di fotoni (fondo gamma ambientale) misurato con NaI e Ge. La scala delle ordinate dà un'idea della efficienza relativa dei due rivelatori, decisamente a favore dello NaI, soprattutto per motivi di dimensioni del rivelatore. D'altra parte il vantaggio di avere una risoluzione migliore è evidente se lo scopo della misura è il riconoscimento delle righe gamma e quindi degli elementi emittitori. Come si vede, nello spettro dello NaI molti gruppi di picchi sono completamente sovrapposti nella funzione di risposta e quindi sperimentalmente indistinguibili.

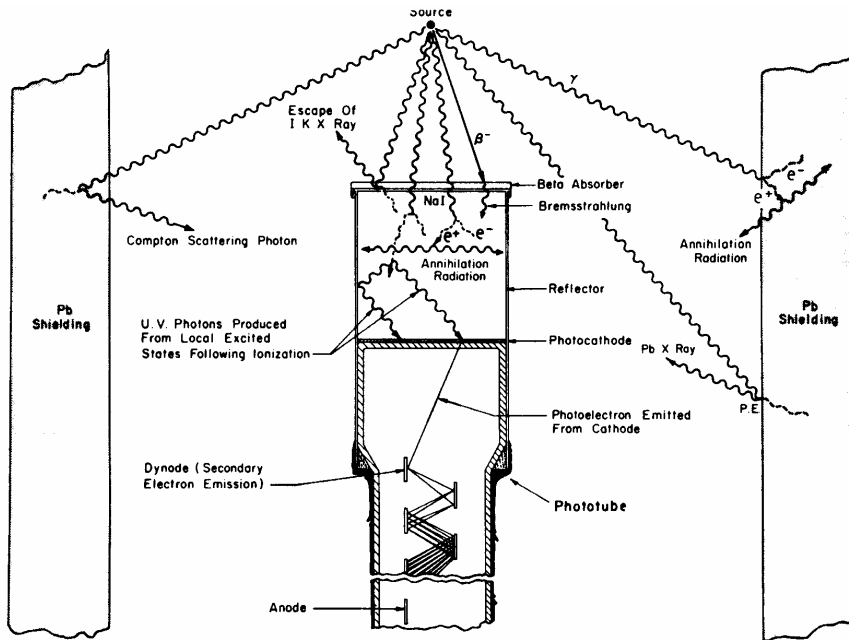


Fig. 17.48 illustrazione dei principali effetti di interazione dei fotoni che contribuiscono alla funzione di risposta dei rivelatori

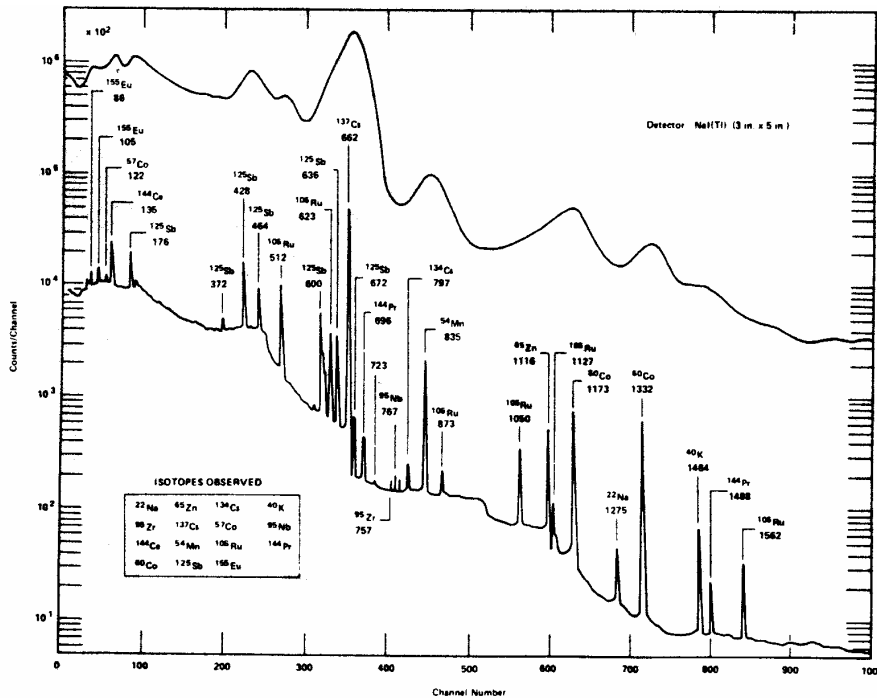


Fig. 17.49 Spettro di fotoni (fondo gamma ambientale) misurato con NaI e Ge

Capitolo 18

Elementi di dosimetria delle radiazioni

18.1 La scoperta dei danni da radiazione. Cenni storici

Da quando le radiazioni ionizzanti sono presenti nei reattori e virtualmente in ogni apparato che utilizza l'energia nucleare, i progettisti di questi sistemi devono includere nei relativi progetti le schermature e la protezione dalla radiazioni sia per il personale addetto al loro funzionamento che per la popolazione nel suo insieme. La sorveglianza e il monitoraggio continuo dei livelli di radiazione sono responsabilità dei fisici sanitari, che devono garantire la sicurezza degli operatori e del pubblico in modo che nessuno riceva una dose pericolosa o non necessaria per esposizione alle radiazioni. I criteri per il progetto delle schermature e l'applicazione delle misure di sicurezza sono basate sulle conoscenze aggiornate dei rischi dovuti alle radiazioni ionizzanti e degli effetti che esse provocano sull'uomo. Vale la pena di osservare che nel corso degli anni, con l'aumentare delle conoscenze in questo campo, la "pericolosità" delle radiazioni è andata aumentando e le norme di sicurezza adottate su scala mondiale sono diventate sempre più restrittive.

Il genere umano è da sempre esposto a varie forme di radiazione naturale costituite, come già visto, dai raggi cosmici e da tutti gli elementi radioattivi naturali (^{40}K , gas Radon, Uranio, torio, Radio, ecc. ecc.). Comunque i livelli di radiazione naturali sono troppo deboli per mettere in luce gli effetti dannosi delle radiazioni, che non divennero evidenti prima della fine dell'800, quando in seguito alla scoperta dei raggi X da parte di Roentgen e della radioattività da parte di Bequerel furono disponibili intense sorgenti di radiazione. Non era ancora passato un mese dall'annuncio della scoperta dei raggi X da parte di Roentgen (gennaio 1896) che un costruttore e sperimentatore di tubi sotto vuoto mostrò lesioni alla cute e alle mani che oggi indicherebbero come dermatite subacuta da raggi X. Quelle lesioni erano il risultato di esposizioni ad alte dosi avvenute manipolando apparecchi a raggi X, prima ancora del riconoscimento dei raggi X da parte di Roentgen. Le osservazioni cliniche di questo genere si moltiplicarono rapidamente. Nel 1901 Bequerel mostrò eritema della cute in corrispondenza della tasca del vestito nella quale aveva tenuto per qualche tempo una fiala di vetro contenente sali di Radio. Poco dopo Pierre Curie si provocò intenzionalmente un eritema da Radio sulla cute del braccio ed ebbe l'idea che le radiazioni potessero avere proprietà terapeutiche. Molti malcapitati ricevettero come ricostituente iniezioni di materiali contenenti Radio e Torio e furono successivamente colpiti da tumore. Nel 1903 fu scoperto che l'esposizione ai raggi X poteva indurre sterilità negli animali da laboratorio; pochi anni dopo fu annunciato che gli embrioni di uova di rospo fertilizzate con sperma irradiato con raggi X presentavano anomalie. Nel 1904 furono segnalate le prime anemie e le prime leucemie indotte da raggi X e già nel 1902 si constatò che un carcinoma cutaneo si era sviluppato su precedente dermatite da raggi X. A proposito

della correlazione tra esposizione alle radiazioni ed insorgenza di cancro, già nel 1911 furono messi in evidenza 94 casi di tumori indotti da raggi X, 50 dei quali in radiologi. Nel 1922 fu stimato che almeno 100 radiologi morirono come risultato di cancro indotto da radiazioni.

Così entro circa dieci anni dalla scoperta di Roentgen e Bequerel una gran parte delle patologie da dosi elevate ed intense di esposizione a radiazioni ionizzanti era stata riconosciuta e sommariamente descritta.

Le lesioni da incorporazione di sostanze radioattive furono scoperte più tardi, attorno agli anni '20 quando si manifestarono necrosi e tumori ossei al mascellare di operaie che durante la prima guerra mondiale erano state addette a dipingere le lancette ed il quadrante di orologi luminescenti con vernici contenenti sali di Radio: esse avevano ingerito le vernici facendo la punta ai piccoli pennelli inumidendoli con le labbra, in un gesto frequentemente ripetuto durante il lavoro. Inoltre si notò che i minatori che lavoravano nelle miniere di cobalto della Sassonia e nelle miniere di peccblenda in Cecoslovacchia, entrambe contenenti grosse percentuali di uranio, soffrivano di cancro ai polmoni con una percentuale trenta volte più elevata che il resto della popolazione: oggi è noto che questi lavoratori erano vittime di esposizione interna al gas Radon ed ai suoi figli, prodotti di decadimento dell'uranio: la concentrazione di Radon emesso dalle pareti dei tunnel nell'aria respirata, soprattutto a causa della scarsa ventilazione, è estremamente elevata in miniera. Oggi per legge è imposta una ventilazione forzata delle miniere e turni di lavoro limitati per i minatori.

Un altro genere di effetti cominciò ad essere noto verso la fine degli anni '20: durante i suoi studi di genetica Muller mostrò che raggi X e raggi gamma producono mutazioni genetiche e cromosomiche nel moscerino dell'aceto, mutazioni che vengono trasmesse ai discendenti secondo le leggi dell'ereditarietà biologica.

La radioprotezione comunque si occupò in maniera rilevante degli effetti genetici solo dopo la seconda guerra mondiale, quando questi furono considerati come i più gravi ed insidiosi dell'esposizione alle radiazioni. In questi anni viene approfondito anche il capitolo dei cosiddetti "effetti tardivi" (costituiti in gran parte da tumori maligni) che compaiono in una piccola frazione delle persone di una popolazione sottoposta a dosi anche non elevate di radiazioni. Alla International Conference on Pacific Uses of Atomic energy (Ginevra, 1955) Tzuzuki riportò la notizia che tra i sopravvissuti di Hiroshima e Nagasaki erano stati osservati circa 200 casi di leucemia, un numero enormemente più alto di quello atteso in base alle caratteristiche endemiche della malattia. Negli anni seguenti fu annunciato l'aumento di frequenza di altre forme tumorali maligni nei sopravvissuti, mentre venivano resi noti i risultati di indagini epidemiologiche sull'incremento di tumori maligni tra i pazienti curati con radiazioni per forme morbose non tumorali. Court, Brown e Dale nel 1957 poterono dimostrare un aumento della frequenza di leucemie nelle cause di morte di pazienti trattati con roentgenterapia per dolori dovuti ad

artrosi vertebrale. A cavallo del 1960, a causa delle ricadute radioattive (fallout) conseguenti alle esplosioni nell'atmosfera di ordigni bellici nucleari di prova iniziò purtroppo anche il fenomeno di piccole dosi annue ricevute costantemente da vastissime popolazioni di interi continenti e si cominciò a parlare di "dose collettiva" ricevuta da un insieme di persone esposte. Già negli anni '50 era stato studiato un altro campo di effetti delle radiazioni: i danni riguardanti lo sviluppo embrionale e fetale. Furono soprattutto le ricerche sistematiche dei coniugi Russel che mostrarono le capacità lesive delle radiazioni sulla organogenesi che si verifica nell'embrione umano nei primi mesi dal concepimento, anche per dosi non elevate. Nasce così una speciale protezione alle donne durante la gravidanza ed in generale alle donne in età fertile.

18.2 Elementi di biologia cellulare

L'effetto delle radiazioni sugli organismi viventi è dovuto alla loro interazione con le molecole contenute nelle cellule di cui è composto l'organismo: diamo qui brevemente e qualitativamente qualche cenno sulla biologia delle cellule (soprattutto umane).

Una persona adulta possiede circa $4 \cdot 10^{13}$ cellule che differiscono tra loro sia per la funzione che per le dimensioni. La maggior parte delle cellule è piccola (avendo dimensioni dell'ordine di 10^{-3} cm), mentre ad esempio le cellule nervose possono arrivare a lunghezze dell'ordine del metro.

Le cellule possono essere divise in due categorie: cellule somatiche e cellule germinali. Quasi tutte le cellule del corpo sono cellule somatiche le quali costituiscono i vari organi, i tessuti e le altre strutture del corpo. Le cellule germinali o gameti funzionano solo nella riproduzione della specie. L'unione tra due gameti di differenti sessi è il punto di partenza per un nuovo individuo della specie. I gameti inoltre portano con sé il patrimonio ereditario della specie. Nella figura 18.1 è riportato lo schema tipico della struttura di una cellula somatica. Come si vede dalla figura la cellula contiene un numero di strutture diversificate, ciascuna delle quali ha una funzione specifica: tali strutture sono chiamate organelli e sono sospese nel citoplasma, una sostanza liquida, trasparente, formata prevalentemente da acqua ma anche da molecole varie ed elettroliti che ha lo scopo di secernere enzimi, controllare i processi di assorbimento e di secrezione della cellula, ecc. ecc.

Le parti principali della cellula sono elencate qui di seguito:

Nucleo: il grande corpo centrale di forma generalmente sferica che è il centro di controllo della cellula. Contiene la cromatina;

Cromatina: materiale genetico della cellula, discusso più avanti;

Nucleoli: corpi sferici (possono essere fino a quattro) situati all'interno del nucleo. Essi sono importanti nel metabolismo di certe sostanze chimiche;

Reticolo Endoplasmatico: è una complessa rete di tubercoli che serve al trasporto dei materiali all'interno della cellula. Esso è anche una sorgente di importanti enzimi metabolici;

Apparato del Golgi: un organello le cui funzioni non sono ancora del tutto state spiegate. Esso apparentemente concentra e modifica certe sostanze chimiche;

Lisosomi e Perossisomi: organelli che contengono enzimi per la produzione di vari prodotti chimici;

Mitocondri: sono piccoli orfanelli presenti a migliaia nella cellula e responsabili del suo metabolismo;

Centrosoma: questa struttura contiene due centrioli, che hanno un ruolo fondamentale nella mitosi della cellula;

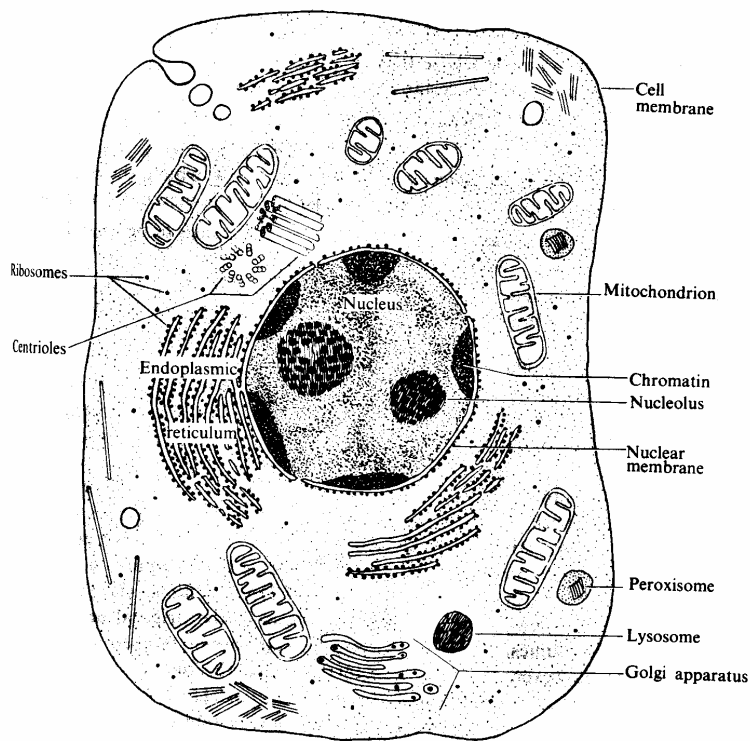


Fig. 18.1 La cellula e di suoi componenti principali

Ribosomi: sono localizzati nel reticolo endoplasmatico, sulla superficie del nucleo e nel citoplasma. Sono i centri di produzione delle proteine.

La cromatina è definita come tale soltanto durante il periodo quiescente della cellula, quando cioè non si sta dividendo. In questo stadio appare come una massa confusa di trecce di molecole di acido desossiribonucleico (DNA) e di proteine. La cromatina controlla la sintesi delle proteine che danno alla cellula le sue caratteristiche distintive. Quando inizia la mitosi queste trecce vengono districate

e si attorcigliano in un numero fisso di avvolgimenti chiamati cromosomi. Il numero dei cromosomi varia da specie a specie. Nell'uomo vi sono 46 cromosomi in ogni cellula eccetto che nelle cellule germinali che ne contengono 23, cioè la esatta metà. Nella mitosi ciascun cromosoma duplica esattamente se stesso, in modo che le nuove cellule formate contengono ancora 46 cromosomi. Poiché il DNA cromosomico controlla la produzione di proteine da parte della cellula, le due nuove cellule sono esatte repliche della cellula originaria. Dopo la mitosi i cromosomi si disattorcigliano e tornano alla loro forma filamentosa. La struttura delle cellule germinali è molto diversa da quella delle cellule somatiche: vi sono cellule germinali diverse per i due sessi e nella riproduzione ciascuna di loro porta i propri 23 cromosomi per dare origine allo zigote, la prima cellula del nuovo individuo, anch'esso contenente 46 cromosomi. La mitosi dello zigote produce l'accrescimento dell'individuo appena generato. Per molti anni si pensò e che le caratteristiche dell'ereditarietà dipendessero dalle azioni dei geni, descritti come particelle individuali situate lungo i cromosomi. Oggi si sa che i geni sono in pratica segmenti delle molecole del DNA che forniscono il codice specifico che controlla la sintesi delle proteine. Tuttavia il termine è ancora usato e i cambiamenti nei cromosomi che risultano in nuove caratteristiche ereditabili sono chiamate mutazioni genetiche.

18.3 Effetto biologico delle radiazioni

Quando una particella ionizzante interagisce con le molecole di un tessuto organico, essa perde energia attraverso interazioni di tipo elettrico con gli elettroni degli atomi. Anche particelle non direttamente ionizzanti come fotoni o neutroni interagiscono con la materia attraverso cessione di energia agli elettroni degli atomi. Quando un elettrone viene strappato ad un atomo, lo ionizza. Inoltre, a causa della energia cinetica acquistata, lungo il suo percorso interagisce e ionizza altri atomi del tessuto. Questi ioni, estremamente instabili, si combinano con gli altri atomi e molecole del tessuto dando luogo ad una vera e propria reazione a catena. A seguito di questo fenomeno vengono create nuove molecole, differenti da quelle originarie di cui è composto il tessuto, e vengono messi in moto dei radicali liberi. Questi ultimi possono interagire tra loro o con altre molecole e, attraverso processi che tutt'oggi non sono ben noti, possono indurre cambiamenti biologicamente significativi nelle molecole stesse che possono essere causa di un loro malfunzionamento. Questi cambiamenti, che si manifestano nel giro di pochi millesimi di secondo successivi all'irraggiamento, possono uccidere le cellule o alterarle al punto di generare l'insorgenza di tumori o mutazioni genetiche, a seconda che le cellule colpite sono somatiche o germinali.

Sintetizzando, vi sono due meccanismi fondamentali mediante i quali la radiazione può danneggiare le cellule: effetto diretto ed effetto indiretto. Nel primo caso la radiazione può portare alla rottura di una molecola a seguito del meccanismo di ionizzazione. Nel secondo caso invece la radiazione, sempre a causa di ionizzazione,

può produrre nuovi elementi chimici come il radicale O^+ o il radicale OH^- che interagiscono chimicamente con la cellula dando luogo a nuove alterazioni.

Per quanto detto, l'effetto biologico delle radiazioni non è sostanzialmente diverso da un qualsiasi altro effetto chimico. Il risultato della trasformazione chimica dipende dalla molecola sulla quale la radiazione ha agito. Se ad esempio la molecola fa parte di un mitocondrio, essendo presenti nella cellula moltissimi di questi oggetti, il malfunzionamento di uno di essi non pregiudica il funzionamento dell'intero sistema cellulare. Se invece la radiazione distrugge direttamente o indirettamente una molecola di DNA in un cromosoma, il risultato è una mutazione. Se questa mutazione avviene in una cellula somatica di un individuo adulto, non si ha alcun effetto macroscopico, a meno che il numero di molecole di DNA danneggiate non sia enorme (il ruolo del DNA è la produzione di proteine necessarie al funzionamento e alla vita delle cellule): semplicemente la cellula non è più in grado di riprodursi e muore. Se invece la mutazione avviene in una cellula germinale, la cellula in questione in genere non è più in grado di essere fertilizzata (questo è in fondo un meccanismo di autodifesa) ma se lo è, la mutazione si trasferisce allo zigote e alla progenie. Un altro effetto della radiazione sulle cellule somatiche è l'insorgenza del cancro, che possiamo schematizzare come una divisione rapidissima ed incontrollata delle cellule. Anche se l'origine del cancro a tutt'oggi non è nota, l'ipotesi più accettata è che sia dovuto ad un virus che è normalmente presente ed inattivo nelle cellule, ma che ad un certo punto diventa attivo distorcendo il normale processo di mitosi. Vi sono migliaia di prodotti chimici oggi riconosciuti responsabili dell'insorgenza del cancro, detti pertanto cancerogeni: non sorprende quindi che anche le radiazioni possano avere questo effetto. L'aspetto inusuale di questo tipo di danno somatico è che può manifestarsi molto tempo dopo che la radiazione ha agito, potendo addirittura iniziare dopo che le cellule si sono rinnovate per molte generazioni.

Poiché le cellule differiscono sia nella composizione che per il metabolismo ad esse associato, il loro comportamento (ed il danno subito) nei confronti delle radiazioni è diverso da tipo a tipo.

Consideriamo per esempio l'irradiazione dell'intestino. Le pareti dell'intestino, a continuo contatto con le scorie dei cibi e delle bevande, devono essere periodicamente rinnovate mediante frequenti processi di mitosi. Come effetto dell'esposizione alle radiazioni, per dosi relativamente basse la riproduzione è rallentata ma non si ha alcun effetto grave. Se però la dose è superiore ad un valore di soglia, la superficie dell'intestino non è più in grado di riprodursi e rinnovarsi in tempo e si hanno quindi lesioni ai tessuti, tali che i fluidi contenuti nell'intestino possono fuoriuscire: batteri ed altri materiali tossici entrano in circolo nel sangue e inducono gravi infezioni in tutto il corpo. A questo proposito aggiungiamo che da tutta una serie di osservazioni è noto che la radiosensibilità delle cellule è direttamente proporzionale alla loro velocità di riproduzione: esse infatti sono

particolarmente vulnerabili proprio durante il processo di mitosi. Per questo motivo il midollo osseo, i tessuti linfatici e gli organi di riproduzione sono tra i più radiosensibili mentre il muscolo, le ossa ed il sistema nervoso sono tra i meno radiosensibili. Va però detto che le cellule nervose per esempio, proprio a causa della lentezza con la quale si rinnovano, se danneggiate non vengono più riparate.

18.4 Effetti su particolari organi

Midollo osseo e sangue. All'interno delle ossa si trova il midollo che può essere di due tipi: giallo, che serve per l'accumulo dei grassi, e rosso che è deputato alla formazione del sangue. Il sangue è composto di tre tipi principali di cellule: gli eritrociti (globuli rossi), i leucociti (globuli bianchi) e le piastrine. I globuli rossi sono i responsabili della alimentazione e ossigenazione delle altre cellule del corpo e alla rimozione dei prodotti di rifiuto. I globuli bianchi hanno azione di difesa contro le infezioni e le piastrine hanno azione coagulante. In caso di irraggiamento i primi ad essere danneggiati sono i globuli bianchi, che diminuiscono in numero (leucopenia). In caso di forte irraggiamento si ha anche una riduzione di piastrine (emorragie) e successivamente di globuli rossi (anemia). Se non si è verificato contemporaneamente un grave danno al midollo osseo, è possibile un recupero da parte dell'organismo in quanto il midollo osseo può produrre nuove cellule che sostituiscono quelle distrutte. In caso contrario il danno sarà permanente ed ovviamente irreversibile.

Sistema linfatico. Il sistema linfatico è costituito da una rete fittissima di capillari all'interno dei tessuti, nei quali scorre un fluido (linfa) simile al plasma ma con minore contenuto proteico. Nella linfa si raccolgono i prodotti di rifiuto dei tessuti che vengono convogliati verso le ghiandole (linfonodi) dove sono eliminati per filtrazione: la linfa ripulita passa di nuovo nel sangue. La milza ha la funzione principale di eliminare per filtrazione le cellule morte del sangue e produrre leucociti.

Gli effetti di irraggiamento si manifestano con infezione dei linfonodi e danneggiamento dei linfociti

Apparato digerente. Per apparato digerente si intende quel complesso di organi che vanno dalla bocca all'intestino. Le cellule localizzate sulle pareti secernono sostanze che agiscono sul cibo in modo da renderne possibile l'assorbimento da parte del sangue. L'intestino tenue è abbastanza radiosensibile, lo stomaco e l'esofago lo sono molto meno. I primi effetti del danneggiamento sono secrezione anomala e produzione discontinua di cellule. Le cellule morte possono portare ad occlusioni intestinali. Si possono avere anche ulcerazioni delle pareti con conseguente processo infettivo.

Apparato genitale. Il danneggiamento da radiazioni può avere effetti sia somatici che ereditari. Come effetto somatico si ha la sterilità, permanente o meno (le femmine sono più sensibili dei maschi). Come effetto genetico si possono avere,

come già detto, mutazioni che possono essere trasmesse alla specie nelle generazioni future.

Sistema nervoso. La colonna vertebrale ed i nervi periferici sono più radiosensibile del cervello. L'effetto delle radiazioni sul cervello è di tipo diretto, cioè altera le funzioni piuttosto che la struttura. Per dosi molto elevate si può verificare anche un danno strutturale attraverso una carenza di rifornimento sanguigno (ischemia) conseguente al danno subito dai vasi adduttori.

Tiroide e ghiandole pituitarie e surrenali. Esse regolano il metabolismo basale e sono responsabili del meccanismo della crescita e dello sviluppo del corpo. Il danno alla tiroide o alle altre ghiandole ha quindi conseguenze su tutto l'organismo. La tiroide presenta scarsa radiosensibilità, tranne che allo iodio che, per meccanismi metabolici, si fissa su tale organo.

Occhio. il cristallino è suscettibile di un danno irreversibile conseguente a radiazioni in quanto le sue cellule non si rigenerano. La retina invece è molto meno radiosensibile. Effetto somatico tardivo è la cataratta, che si manifesta in quanto le cellule danneggiate perdono la loro trasparenza e diventando alla fine completamente opache.

Polmoni. I polmoni sono organo costituiti da piccolissime cavità chiamate alveoli, che durante la respirazione si dilatano e si restringono. In danno agli alveoli di regola non avviene per irraggiamento esterno, bensì a seguito di contaminazione interna conseguente ad inalazione di sostanze radioattive (Radon, polveri, vapori) tramite il meccanismo della respirazione. Un danno di questo tipo è detto funzionale e coinvolge tutto l'organismo.

Fegato. Fegato e cistifellea sono poco radiosensibili, pertanto il danneggiamento può essere causato solo da radioisotopi che si concentrano nel fegato (per esempio Au) per irraggiamento interno. Anche in questo caso tutto l'organismo viene coinvolto essendo il danno di tipo funzionale.

Reni. In caso di irradiazione al corpo intero non sembrano sussistere pericoli di gravi alterazioni di funzionamento dei reni.

Cuore e vasi sanguigni. Sono organi molto resistenti alle radiazioni, e possono essere danneggiati solo a seguito di dosi elevatissime.

Cute. I vari strati della pelle mostrano una differente radiosensibilità: il danno è tanto più elevato quanto meno penetranti sono le radiazioni. Di solito comunque la capacità di riparazione del danno nel caso della pelle è elevata. Un leggero danno può portare solo ad un arrossamento, una forte irradiazione può portare invece a neoplasia epiteliale.

Capelli. L'irradiazione può portare ad una perdita temporanea dei capelli, che dopo poche settimane ricominciano a crescere, spesso con caratteristiche diverse.

Ossa. Le cellule delle ossa sono relativamente poco radiosensibili. Alte dosi possono portare ad osteoporosi. Alcuni radioisotopi come lo Stronzio ed il Plutonio, se

introdotti nell'organismo si fissano nel midollo e nel tessuto osseo: in tal caso il danno può essere molto maggiore, con l'insorgenza di leucemia o di osteoneoplasia.

18.5 Elementi di dosimetria delle radiazioni

Tutti gli effetti ed i danni biologici (di origine fisica o chimica) indotti dalle radiazioni direttamente o indirettamente ionizzanti si manifestano quando avviene una cessione di energia alla materia. Per questo motivo si introduce una grandezza, la dose assorbita, che, come vedremo più avanti, coincide sostanzialmente con l'energia assorbita nel mezzo irradiato per unità di massa. Allo scopo di descrivere le varie fasi di trasferimento di energia dalle radiazioni alla materia sono state introdotte anche alcune grandezze fisiche che vengono denominate "grandezze dosimetriche". Per descrivere invece il campo di radiazione sono state introdotte le "grandezze radiometriche". Vediamo adesso le definizioni e le proprietà fondamentali delle principali grandezze fisiche usate, nonché le unità di misura adottate da Sistema Internazionale SI. Poiché però tali unità sono state introdotte soltanto di recente, presenteremo anche le vecchie unità, il cui uso è tuttora molto diffuso (e ancora lo sarà probabilmente per parecchi anni).

Attività

L'attività di una sorgente è definita, come già sappiamo, come il numero di disintegrazioni per unità di tempo:

$$a = \frac{dN}{dt} \quad a = N \cdot \lambda$$

dove N è il numero di nuclidi presenti nella sorgente e λ la sua costante di decadimento

l'unità di misura è il Becquerel (simbolo Bq)

$$1 \text{ Bq} = 1 \text{ s}^{-1}$$

la vecchia unità di misura era il Curie (simbolo Ci)

$$1 \text{ Ci} = 3.7 \cdot 10^{10} \text{ disintegrazioni per secondo} = 3.7 \cdot 10^{10} \text{ Bq}$$

Attività specifica

E' definita come il numero di disintegrazioni per unità di tempo e per unità di massa

$$a_m = \frac{d^2 N}{dt dm}$$

Si misura in Bq/kg, ma unità altrettanto usate sono il Bq/g o il Ci/g.

Per un dato nuclide allo stato puro si ha:

$$a_m = \lambda \cdot N_0 / A$$

dove N_0 è al solito il numero di Avogadro ed A peso atomico.

Fluenza (o flusso) di radiazione

E' definito come il numero di particelle che attraversa una sezione unitaria.

$$\Phi = \frac{dN}{da}$$

Si esprime in particelle per metro quadro e la sua unità di misura è: m^{-2}

Intensità di fluena (o intensità di flusso) di radiazione

E' definito come il numero di particelle che attraversa una sezione unitaria nell'unità di tempo:

$$\Phi = \varphi = \frac{d^2 N}{da dt}$$

Si esprime in particelle per metro quadro per secondo, l'unità di misura è: $m^{-2}s^{-1}$

Fluena (o flusso) di energia

E' definito come l'energia totale che attraversa una sezione unitaria.

$$\Psi = \frac{dE}{da}$$

dove dE rappresenta l'energia totale trasportata dalla radiazione, esclusa l'energia a riposo delle particelle che attraversano la sezione da.

Si esprime in Joule per metro quadro e la sua unità di misura è: $J \cdot m^{-2}$

Intensità di fluena (o intensità di flusso) di energia

E' definito come l'energia totale che attraversa una sezione unitaria nell'unità di tempo

$$\dot{\Psi} = \psi = \frac{d^2 E}{da dt}$$

dove dE rappresenta l'energia totale trasportata dalla radiazione, esclusa l'energia a riposo delle particelle che attraversano la sezione da.

Si esprime in Joule per metro quadro per secondo, oppure in Watt per metro quadro e la sua unità di misura è: $W \cdot m^{-2}$.

18.6 Grandezze dosimetriche.

Vediamo ora di definire alcune grandezze dosimetriche che ci saranno utili nel seguito per quantificare i rischi dovuti alle radiazioni ionizzanti e fare calcoli di radioprotezione.

I processi di ionizzazione ed eccitazione degli atomi e delle molecole associati al passaggio delle radiazioni ionizzanti nella materia sono all'origine degli effetti indotti osservati nei mezzi attraversati. Nel caso dell'organismo vivente il trasferimento di energia dalle particelle ionizzanti ai vari tessuti ed organi irradiati può concludersi con la manifestazione di un certo effetto biologica. Poiché tutti gli effetti fisici, chimici e di conseguenza anche biologici, indotti dalle radiazioni si manifestano soltanto quando avviene una cessione di energia alla materia, si è tentato di risolvere il problema nel modo più elementare mediante l'introduzione di una quantità, la dose assorbita, che coincide praticamente con l'energia assorbita per unità di massa del mezzo irradiato. La misura o il calcolo della dose assorbita costituiscono il principale obiettivo della dosimetria. Allo scopo di descrivere le varie fasi dei processi di trasferimento di energia delle particelle alla materia sono state introdotte in dosimetria altre grandezze fisiche, comunemente dette grandezze dosimetriche, che vedremo nel seguito.

Tutte le misure delle grandezze dosimetriche devono essere effettuate in particolari condizioni sperimentali: deve essere rispettata cioè la condizione di equilibrio di radiazione. Si parla di equilibrio di radiazione in un certo punto di un mezzo irradiato quando il valore dell'energia radiante che entra in un volumetto infinitesimo centrato attorno al punto è uguale a quello dell'energia radiante che ne esce. La condizione di equilibrio di radiazione è fondamentale per quanto illustrato in figura 18.2.

Una misura della dose assorbita in P viene eseguita con uno strumento il cui volume sensibile ha necessariamente dimensioni finite e non deve perturbare il campo di radiazione che sta misurando. Questo avviene solo se in media l'energia depositata all'interno del volumetto da parte di particelle secondarie generate al di fuori del volumetto è compensata dall'energia che particelle generate all'interno del volumetto depositano all'esterno. In caso contrario la lettura dello strumento fornisce evidentemente un valore errato, che non corrisponde alla dose dovuta al campo radiante imperturbato attorno al punto P.

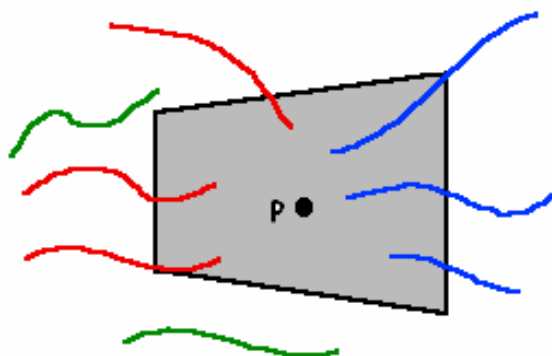


Fig. 18.2 schematizzazione della condizione di equilibrio elettronico

18.7 Esposizione

L'esposizione è la più antica delle grandezze dosimetriche e fu a suo tempo introdotta per descrivere la capacità dei raggi X di produrre ionizzazione in aria. Essa è definita come:

$$X = \frac{dQ}{dm}$$

dove dQ è il valore assoluto della carica totale degli ioni di uno stesso segno prodotti in aria quando tutti gli elettroni liberati dai fotoni nell'elemento di massa dm sono completamente fermati in aria. L'Esposizione è definita solo per fotoni, non per particelle cariche o neutroni. Nel SI l'unità di misura dell'Esposizione è il $C \cdot kg^{-1}$. Questa unità è tuttavia scarsamente usata in pratica, dove si preferisce servirsi ancora della vecchia unità, il Roentgen (simbolo R) il cui valore esatto è:

$$1R = 2.58 \cdot 10^{-4} C \cdot kg^{-1}$$

L'intensità di esposizione è a sua volta definita come:

$$\dot{X} = \frac{dX}{dt}$$

e si esprime in $A \cdot kg^{-1}$ nel SI, ma più comunemente in $R \cdot s^{-1}$ oppure in $R \cdot h^{-1}$ con i suoi sottomultipli il più usato dei quali è il $mR \cdot h^{-1}$.

Quando si effettuano misure di esposizione è sempre necessario che nel volume di misura siano verificate le condizioni di equilibrio delle particelle cariche. Siccome tali condizioni si riescono in pratica ad ottenere solo per fotoni di energia non troppo elevata (il range degli elettroni secondari aumenta con l'energia dei fotoni), è fissato convenzionalmente a 3 MeV la massima energia di fotone per la quale ha senso parlare di esposizione. L'esposizione è quindi una grandezza utilizzabile in un ambito assai limitato, riguardando solo un tipo di radiazione (raggi X e fotoni) per di più in un range ristretto di energia.

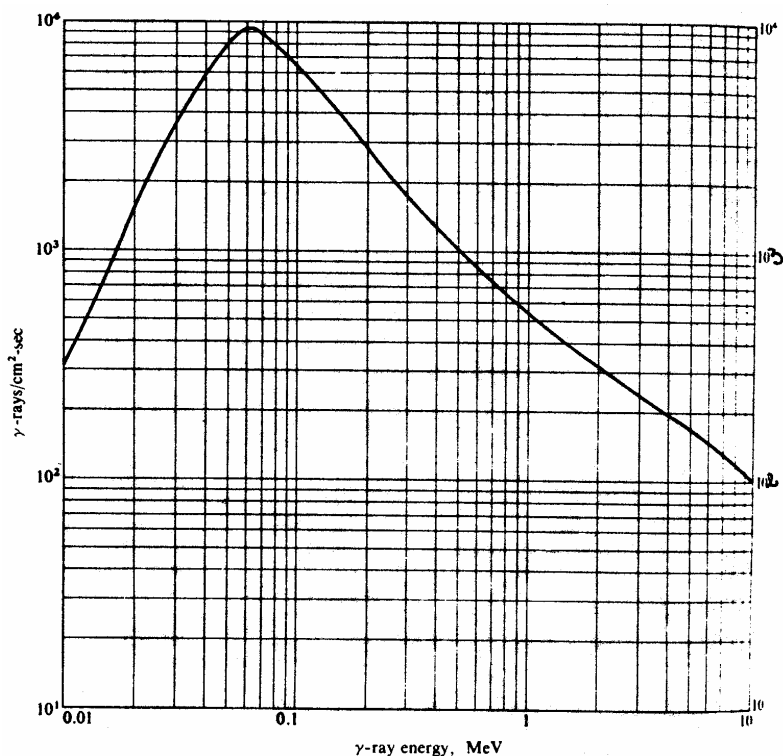


Fig. 18.3 intensità di fluenza di fotoni ($cm^{-2} \cdot s^{-1}$) di energia E_{γ} corrispondente ad una intensità di Esposizione pari ad 1 mR/h

Tuttavia, a causa della sua enorme diffusione, dovuta ad abitudini ormai radicate tra gli operatori di radioprotezione e alla semplicità concettuale della strumentazione di misura, l'Esposizione è una delle grandezze dosimetriche più

utilizzate. Supponiamo di avere un fascio di fotoni di fluena $\Phi = \frac{dN}{da}$ e di energia

$h\nu$. Vediamo di ricavare l'Esposizione $X = \frac{dQ}{dm}$

$dm = \rho \cdot dV = \rho \cdot da \cdot dx$, essendo a l'area del fascio e x lo spessore del volume d'aria.

Se immaginiamo che nel volumetto dm interagiscano dN fotoni e che ciascuno depositi una energia dE , la carica dQ generata è data da:

$$dQ = e \cdot dN \cdot dE / w$$

dove dE rappresenta l'energia impartita dal fascio di fotoni agli elettroni secondari e w l'energia media spesa per ionizzare una molecola d'aria

$$\text{Sostituendo: } X = \frac{dQ}{dm} = \frac{1}{\rho} \frac{e}{w} \frac{dN dE}{da dx}$$

Ma, per definizione di coefficiente di assorbimento μ_{en} : $E(x) = E_0 \cdot e^{-\mu_{en}x}$

$$\left| \frac{dE}{dx} \right| = \mu_{en} E_0 \cdot e^{-\mu_{en}x} = \mu_{en} E$$

Notando infine che $\Phi = \frac{dN}{da}$, alla fine possiamo scrivere:

$$X = \frac{dQ}{dm} = \frac{e}{w} \left(\frac{\mu_{en}}{\rho} \right) E \Phi \quad \text{e derivando rispetto al tempo:}$$

$$\dot{X} = \frac{e}{w} \left(\frac{\mu_{en}}{\rho} \right) h\nu \frac{d\Phi}{dt} = \frac{e}{w} \left(\frac{\mu_{en}}{\rho} \right) E \varphi$$

dove φ è il numero di fotoni per unità di tempo e di superficie.

In base a questa relazione è stata ricavata la curva riportata in figura 18.3

Essa rappresenta, per varie energie il numero di fotoni per cm^2 e per secondo (intensità di fluena) necessario per ottenere l'Esposizione di 1 mR/h

Poiché $w_{aria} = 34 \text{ eV}$ ed $e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, se esprimiamo l'energia dei fotoni in MeV, la fluena in $cm^{-2} \cdot s^{-1}$ e il coefficiente di assorbimento massico in cm^2/g , si ottiene la seguente utile relazione:

$$\dot{X} = 0.0659 \cdot \left(\frac{\mu_{en}}{\rho} \right) E_{\gamma} \varphi_{\gamma} \quad [\text{mR/h}]$$

Un caso particolare è costituito dalle sorgenti gamma. In questo caso si fa uso della cosiddetta costante gamma specifica Γ , definita tramite la seguente relazione:

$$\dot{X} = \Gamma \cdot \frac{A}{d^2}$$

dove A è l'attività della sorgente e d la distanza dalla sorgente. l'intensità di esposizione \dot{X} risulta infatti proporzionale all'attività ed inversamente proporzionale alla distanza. La costante Γ , caratteristica per ogni radionuclide, si esprime in $R \cdot m^2 \cdot h^{-1} \cdot Ci^{-1}$ oppure in $R \cdot m^2 \cdot h^{-1} \cdot Bq^{-1}$. In tabella 18.1 sono riportati i valori della costante Γ per i principali radionuclidi espressi nelle nuove (SI) e vecchie unità di misura.

Si verifica facilmente che, per un certo radionuclide emettitore di fotoni di energie E_i (MeV), ciascuna con probabilità p_i , il valore di Γ è dato dalla relazione:

$$\Gamma = 19.54 \cdot \sum_i \left(\frac{\mu_{en}}{\rho} \right)_i p_i E_i$$

dove il coefficiente di assorbimento massico espresso in cm^2g^{-1} .

Tabella 2.II – Costante gamma specifica Γ per alcuni radionuclidi

Radio-nuclide	Tempo di dimezzamento	Energia dei fotoni (MeV)	Probabilità di emissione	$\Gamma \left(10^{-18} \frac{\text{Cm}^2}{\text{kg s Bq}} \right)$	$\Gamma \left(\frac{\text{Rm}^2}{\text{hCi}} \right)$																																																										
22-Na	2,6 anni	0,511	1,800	2,30	1,192																																																										
		1,275	1,000			41-A	1,83 ore	1,293	0,990	1,27	0,660	54-Mn	297 giorni	0,835	1,000	0,90	0,468	60-Co	5,23 anni	1,173	1,000	2,50	1,298	1,332	1,000	85-Kr	10,15 anni	0,514	0,0041	0,0023	0,0012	137-Cs	29,9 anni	0,662	0,858	0,62	0,323	113-Xe	5,36 giorni	0,081	0,370	0,027	0,0142	198-Au	2,70 giorni	0,412	0,950	0,44	0,231	0,676	0,010	1,088	0,002	226-Ra	1608 anni	0,186	0,040	0,0073	0,0038	0,260	0,00007	226-Ra + prodotti di decadimento (incapsulato con 0,5 mm di platino)	
41-A	1,83 ore	1,293	0,990	1,27	0,660																																																										
54-Mn	297 giorni	0,835	1,000	0,90	0,468																																																										
60-Co	5,23 anni	1,173	1,000	2,50	1,298																																																										
		1,332	1,000			85-Kr	10,15 anni	0,514	0,0041	0,0023	0,0012	137-Cs	29,9 anni	0,662	0,858	0,62	0,323	113-Xe	5,36 giorni	0,081	0,370	0,027	0,0142	198-Au	2,70 giorni	0,412	0,950	0,44	0,231	0,676	0,010	1,088	0,002	226-Ra	1608 anni	0,186	0,040	0,0073	0,0038	0,260	0,00007	226-Ra + prodotti di decadimento (incapsulato con 0,5 mm di platino)				1,59	0,825 $\left(\frac{\text{Rm}^2}{\text{hg}} \right)$																
85-Kr	10,15 anni	0,514	0,0041	0,0023	0,0012																																																										
137-Cs	29,9 anni	0,662	0,858	0,62	0,323																																																										
113-Xe	5,36 giorni	0,081	0,370	0,027	0,0142																																																										
198-Au	2,70 giorni	0,412	0,950	0,44	0,231																																																										
		0,676	0,010																																																												
		1,088	0,002																																																												
226-Ra	1608 anni	0,186	0,040	0,0073	0,0038																																																										
		0,260	0,00007																																																												
226-Ra + prodotti di decadimento (incapsulato con 0,5 mm di platino)				1,59	0,825 $\left(\frac{\text{Rm}^2}{\text{hg}} \right)$																																																										

Tab. 18.1 La costante Γ per i principali radionuclidi

18.8 Dose assorbita

Questa è la più importante grandezza dosimetrica. Essa è definita come segue:

$$D = \frac{d\varepsilon}{dm}$$

dove dm è la massa di materia alla quale la radiazione cede l'energia $d\varepsilon$.

ε rappresenta la grandezza l'energia media impartita, definita come segue. Se consideriamo un volumetto di un mezzo irradiato da particelle direttamente o indirettamente ionizzanti che lo attraversano, abbiamo: $\varepsilon = R_{in} - R_{out} + \Sigma Q$

dove R_{in} rappresenta l'energia radiante incidente nel volume considerato, cioè la somma di tutte le energie (escluse quelle di quiete) di tutte le particelle direttamente ed indirettamente ionizzanti che entrano nel volume considerato, R_{out}

rappresenta l'energia radiante uscente dal volume considerato, cioè la somma di tutte le energie (escluse quelle di quiete) di tutte le particelle direttamente ed indirettamente ionizzanti che ne escono, e ΣQ la somma di tutte le energie liberate, diminuita della somma di tutte le energie consumate in ogni trasformazione di nuclei e particelle elementari avvenuta in tale volume (in pratica ΣQ rappresenta l'energia spesa per aumentare la massa del sistema). L'energia impartita è una grandezza stocastica, soggetta a fluttuazioni casuali ed ha quindi senso considerarne il valor medio.

Accanto alla dose assorbita si definisce l'intensità di dose assorbita:

$$\dot{D} = \frac{dD}{dt}$$

Nel SI la dose assorbita si misura in gray (Gy), dove $1\text{Gy} = 1\text{J/kg}$ e l'intensità di dose in Gy/s. Tuttavia ancora molto usata è la vecchia unità di misura, il rad. Il rad era definito pari a 100 erg/g , pertanto:

$$1\text{ rad} = 10^2\text{ erg/g} = 10^{-2}\text{ Gy} \quad \text{e viceversa} \quad 1\text{ Gy} = 10^2\text{ rad}$$

Senza scendere nei dettagli, vediamo come si calcola la dose assorbita nel caso di particelle cariche (non elettroni, in quanto le perdite di energia per irraggiamento complicano il calcolo della energia depositata) e di fotoni in due semplicissimi esempi, cioè nel caso di fluenze uniformi di particelle monocromatiche. L'elemento di massa dm si può al solito esprimere nel seguente modo: $dm = \rho \cdot dV = \rho \cdot da \cdot dx$

Nel caso di particelle cariche, nel volumetto incidono dN/da particelle per unità di superficie, ciascuna di energia E . Ognuna di esse depositerà in media nello spessore dx una energia pari a $dE = \frac{dE}{dx} dx$.

Pertanto l'energia totale $d\varepsilon$ depositata dal fascio di particelle sarà data da:

$$d\varepsilon = dE \cdot dN$$

e in conclusione:

$$D = \frac{d\varepsilon}{dm} = \frac{dE dN}{\rho dx da} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{dE}{dx} \right) \cdot \Phi; \quad \dot{D} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{dE}{dx} \right) \cdot \frac{d\Phi}{dt} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{dE}{dx} \right) \cdot \dot{\Phi}$$

Nel caso di fotoni monocromatici di energia E_γ si ha ancora che: $d\varepsilon = dE \cdot dN$

dove questa volta: $dE = \mu_{en} \cdot E_\gamma \cdot dx$. Sostituendo si ottiene:

$$D = \frac{d\varepsilon}{dm} = \frac{dE dN}{\rho dx da} = \frac{\mu_{en} E_\gamma dN}{\rho da} = \left(\frac{\mu_{en}}{\rho} \right) E_\gamma \Phi; \quad \dot{D} = \left(\frac{\mu_{en}}{\rho} \right) E_\gamma \frac{d\Phi}{dt} = \left(\frac{\mu_{en}}{\rho} \right) E_\gamma \dot{\Phi}$$

numericamente, se esprimiamo Φ in cm^{-2} , $\dot{\Phi}$ in $\text{cm}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$ ed E in MeV, abbiamo:

$$D = 1.6 \cdot 10^{-10} \left(\frac{\mu_{en}}{\rho} \right) E_\gamma \Phi_\gamma \text{ [Gy]}; \quad D = 1.6 \cdot 10^{-8} \left(\frac{\mu_{en}}{\rho} \right) E_\gamma \Phi_\gamma \text{ [rad]}$$

$$\dot{D} = 5.76 \cdot 10^{-4} \left(\frac{\mu_{en}}{\rho} \right) E_\gamma \dot{\Phi}_\gamma \text{ [mGy/h]}; \quad \dot{D} = 5.76 \cdot 10^{-2} \left(\frac{\mu_{en}}{\rho} \right) E_\gamma \dot{\Phi}_\gamma \text{ [mrad/h]}$$

Se le particelle incidenti non sono monocromatiche si avrà rispettivamente:

$$D = \frac{d\varepsilon}{dm} = \int_{\text{spettro}} \left(\frac{1}{\rho} \frac{dE}{dx} \right) \cdot \frac{d\Phi}{dE} dE \quad \text{per particelle cariche}$$

$$D = \frac{d\varepsilon}{dm} = \int_{\text{spettro}} \left(\frac{\mu_{en}}{\rho} \right) E \cdot \frac{d\Phi}{dE} dE \quad \text{per fotoni.}$$

Relazione tra Esposizione e dose assorbita

In aria la relazione è molto semplice. Infatti, essendo:

$$D_{\text{aria}} = \left(\frac{\mu_{en}}{\rho} \right)_{\text{aria}} E_{\gamma} \Phi \quad \text{e} \quad X = \frac{e}{w_{\text{aria}}} \left(\frac{\mu_{en}}{\rho} \right)_{\text{aria}} E_{\gamma} \Phi, \quad \text{si ha:}$$

$$X = \frac{e}{w_{\text{aria}}} \cdot D_{\text{aria}}, \quad \text{ossia:} \quad D_{\text{aria}} = \frac{w_{\text{aria}}}{e} \cdot X$$

Poiché $w_{\text{aria}} = 34 \text{ eV}$ ed $e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, numericamente si ha che:

$$1R \Leftrightarrow 0.87 \text{ rad} \quad \text{o anche:} \quad 1R \Leftrightarrow 8.7 \cdot 10^{-3} \text{ Gy} = 8.7 \text{ mGy}$$

Allora:

$$D_{\text{aria}} [\text{Gy}] = 8.74 \cdot 10^{-3} \cdot X [\text{R}] \quad D_{\text{aria}} [\text{rad}] = 0.874 \cdot X [\text{R}]$$

$$\dot{D}_{\text{aria}} [\text{mGy/h}] = 8.74 \cdot 10^{-3} \cdot X [\text{mR/h}] \quad \dot{D}_{\text{aria}} [\text{mrad/h}] = 0.874 \cdot X [\text{mR/h}]$$

Se si ha lo stesso fascio in due mezzi diversi:

$$D_1 = \left(\frac{\mu_{en}}{\rho} \right)_1 E_{\gamma} \Phi \quad D_2 = \left(\frac{\mu_{en}}{\rho} \right)_2 E_{\gamma} \Phi \quad \text{e quindi:}$$

$$D_2 = D_1 \frac{(\mu_{en}/\rho)_2}{(\mu_{en}/\rho)_1}$$

Quest'ultima relazione è utilissima quando, da una misura di Esposizione (necessariamente in aria) si vuol passare ad una misura di dose in un materiale M qualsiasi:

$$D_M = D_{\text{aria}} \frac{(\mu_{en}/\rho)_M}{(\mu_{en}/\rho)_{\text{aria}}} = X \frac{w_{\text{aria}}}{e} \frac{(\mu_{en}/\rho)_M}{(\mu_{en}/\rho)_{\text{aria}}}$$

Numericamente:

$$D_M [\text{Gy}] = 8.74 \cdot 10^{-3} \frac{(\mu_{en}/\rho)_M}{(\mu_{en}/\rho)_{\text{aria}}} \cdot X [\text{R}]$$

$$D_M [\text{rad}] = 0.874 \cdot \frac{(\mu_{en}/\rho)_M}{(\mu_{en}/\rho)_{\text{aria}}} \cdot X [\text{R}]$$

con le analoghe relazioni per le intensità di dose. In generale si può scrivere:

In generale si può scrivere:

$$D_M = f_M \cdot X \quad \text{e} \quad \dot{D}_M = f_M \cdot \dot{X}$$

dove in f_M è contenuta tutta la dipendenza dal materiale. In figura 18.4 è riportato il grafico della grandezza (vedi anche, per un maggior dettaglio, tab. 18.6)

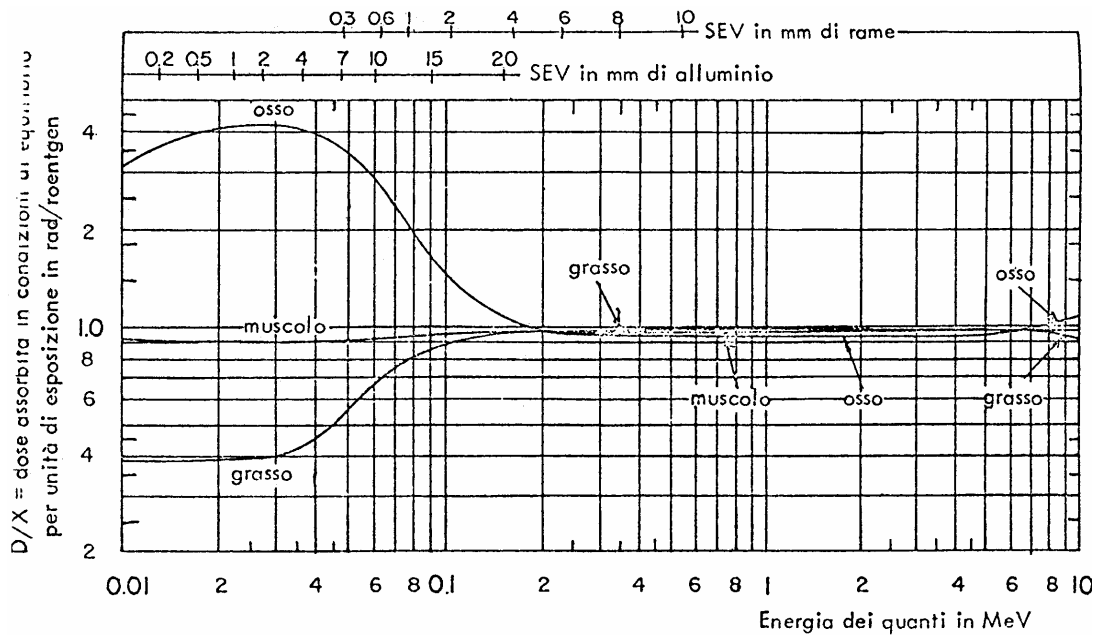


Fig. 18.4 Andamento di f_M per i principali tessuti organici in funzione dell'energia

18.9 Il Kerma

Il processo di trasferimento di energia al mezzo da parte delle radiazioni indirettamente ionizzanti avviene sostanzialmente in due fasi successive. Nella prima la radiazione primaria mette in moto i secondari carichi. Nella seconda questi ultimi depositano l'energia attraverso le collisioni che subiscono nel mezzo. La dose assorbita è stata introdotta per tener conto dell'effetto finale di questi processi. Per descrivere invece solo la prima fase si introduce un'altra grandezza, il kerma, il cui nome significa "kinetic energy released in matter". Il kerma è definito come:

$$K = \frac{dE_{tr}}{dm} \quad (\text{e la relativa intensità di kerma come: } \dot{K} = \frac{dK}{dt})$$

dove dE_{tr} è la somma di tutte le energie cinetiche iniziali di tutte le particelle cariche prodotte da particelle indirettamente ionizzanti in un volumetto di massa dm . Nel termine dE_{tr} è anche compresa l'energia che le particelle cariche secondarie irradiano sotto forma di bremsstrahlung.

Abbiamo in questa sede introdotto il kerma essenzialmente perché rappresenta una utile grandezza che descrive il campo di radiazione neutronico. Le interazioni dei neutroni con la materia in letteratura sono descritte in termini appunto di kerma. Senza scendere in maggior dettaglio aggiungiamo solo che, in condizioni di equilibrio di radiazione, risulta: $K = D$

Ossia il kerma coincide con la dose assorbita. Noi nel seguito assumeremo valida questa relazione e quindi dedurremo la dose assorbita (soprattutto per i neutroni) dal valore del kerma.

Nei grafici di figura 18.5 è riportata schematicamente la relazione tra Esposizione, kerma e dose assorbita nel caso di fotoni in funzione della profondità nel tessuto:

nella figura di sinistra si trascura l'attenuazione del fascio nel mezzo, mentre in quella di destra se ne tiene conto. Dopo una zona iniziale nella quale, in mancanza di equilibrio di radiazione, kerma e dose assorbita sono notevolmente diversi, le due grandezze essenzialmente coincidono. Da notare che la zona di non equilibrio, indicate nelle figure con il termine "buildup", è dell'ordine del range delle particelle cariche secondarie prodotte dai fotoni incidenti e vale quindi, al più, qualche millimetro.

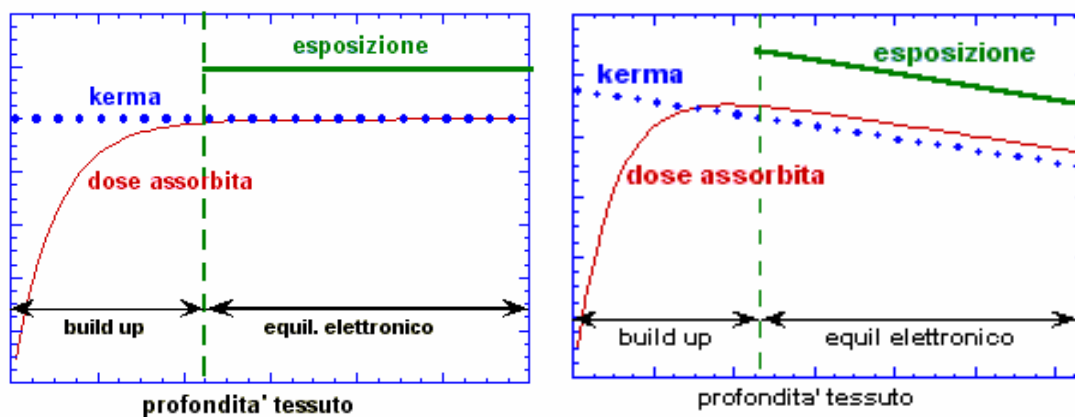


Fig. 18.5 relazione tra Esposizione, kerma e dose assorbita nel caso di fotoni

18.10 Gli indicatori del rischio da radiazioni ionizzanti

Finora abbiamo definito e descritto le grandezze dosimetriche in forma del tutto generale, senza mai tentare di legare la dose assorbita all'eventuale danno biologico ad essa associato. Abbiamo anche visto all'inizio di questo capitolo come l'esposizione alle radiazioni ionizzanti comporti rischi di effetti sanitari per gli esseri viventi: dobbiamo quindi definire una grandezza dosimetrica che in qualche modo sia rappresentativa di questi rischi. Gli effetti sanitari indotti sull'uomo vengono distinti in effetti somatici ed effetti genetici, a seconda che si manifestino sull'individuo esposto o sui suoi discendenti. Gran parte degli effetti somatici sono di tipo non stocastico. La loro gravità è in relazione alla dose assorbita nell'organo o tessuto di interesse e per ciascun effetto esiste un valore di soglia della dose assorbita soltanto superato il quale esso si manifesta. I valori delle dosi corrispondenti alle varie soglie sono sempre piuttosto elevati e conosciuti in genere con accettabile accuratezza. Tutti gli effetti genetici ed i più importanti effetti somatici (leucemia, carcinogenesi) hanno invece un carattere stocastico. Essi sono cioè caratterizzati da una probabilità di accadimento funzione della dose ricevuta, e dall'assenza di un valore di soglia sotto il quale l'effetto non si manifesta. Allo scopo di assicurare la protezione degli individui esposti, della loro progenie e del genere umano nel suo insieme dagli eventuali danni che potrebbero derivare dallo svolgimento delle attività con rischio da radiazioni ionizzanti si è

andata sviluppando, parallelamente all'uso delle tecnologie nucleari, una disciplina relativamente nuova, la radioprotezione. Un ruolo fondamentale nella formulazione dei principi generali cui si ispira la radioprotezione viene svolto dalla "International Commission on Radiation Protection", l'ICRP, un Organismo sovranazionale sorto in occasione del II congresso Internazionale di Radiologia tenutosi a Stoccolma nel 1928. L'autorevolezza di questa Organizzazione è tale che le legislazioni di tutti i Paesi del mondo finiscono sempre con l'adeguarsi alle sue raccomandazioni. Anche le Direttive della Comunità Europea sono formulate sulla base delle periodiche raccomandazioni dell'ICRP.

18.11 Equivalente di dose

Nessuna delle grandezze dosimetriche presentate finora (dose assorbita, kerma, esposizione) è per sua natura idonea ad interpretare in modo completo gli effetti provocati dal trasferimento di energia dalle radiazioni ionizzanti alla materia vivente. Esse non consentono di tener conto della diversità degli effetti biologici indotti da radiazioni di diversa qualità. La più importante delle grandezze radioprotezionistiche è l'equivalente di dose, per mezzo del quale la dose assorbita viene ponderata con un opportuno fattore correttivo per tener conto della qualità della radiazione. L'equivalente di dose, H , in un certo punto di un tessuto irradiato è definito come:

$$H = D \cdot Q \quad \dot{H} = \frac{dH}{dt} = \dot{D} \cdot Q$$

Dove D è la dose assorbita e Q il fattore qualità della radiazione. Il fattore qualità serve a tener conto della distribuzione dell'energia assorbita a livello microscopico ed è quindi il parametro per mezzo del quale si prende in considerazione la diversa qualità della radiazione. Poiché tale distribuzione dipende dalla natura e dalla velocità delle particelle cariche che liberano la dose, essa può essere caratterizzata attraverso la grandezza fisica denominata LET

Il LET (Linear Energy Transfer) è definito soltanto per particelle cariche e rappresenta l'energia dE dissipata dalle particelle nel tratto $d\ell$ mediante collisioni che comportano trasferimenti di energia inferiori ad un determinato valore prefissato Δ .

Si scrive pertanto:

$$L_{\Delta} = \left(\frac{dE}{d\ell} \right)_{\Delta}$$

Ovviamente se si prendono in considerazione tutte le perdite di energia possibili da parte della particella, Δ coincide con l'energia cinetica della particella: il LET si indica (impropriamente) con il simbolo L_{∞} e coincide con il potere frenante lineare da collisione di una particella carica:

$$L_{\infty} = \left(\frac{dE}{dx} \right)_{\text{coll}}$$

finora l'ICRP ha raccomandato i valori di Q servendosi del LET e, più precisamente del L_{∞} in acqua. I valori numerici prescelti sono riportati nella tabella 18.2 che segue:

L_{∞} in acqua (keV· μm^{-1})	Q
< 3.5	1
7	2
23	5
53	10
>175	20

Tab. 18.2

Per valori intermedi i dati possono essere interpolati come riportato nel grafico di figura 18.6

Nel caso in cui le cessioni di energia avvengano con un certo spettro di valori di L_{∞} , in luogo di Q si dovrà calcolare un opportuno valore efficace \bar{Q} dato da:

$$\bar{Q} = \frac{1}{D} \int Q(L_{\infty}) \cdot D(L_{\infty}) dL_{\infty}$$

Tipo di radiazione	\bar{Q}
Raggi X, raggi gamma ed elettroni	1
Neutroni, protoni e particelle con Z=1 e massa M >1 amu	10
particelle alfa, particelle con Z>2	20

Tab 18.3

Una difficoltà pratica nell'applicazione del calcolo integrale sta nel fatto che solo raramente sono disponibili informazioni sulla distribuzione della dose assorbita in funzione del L_{∞} .

In questo caso sono di aiuto la tabella ed i grafici sotto riportati nelle figure 18.7 e 18.8

L'unità di misura dell'equivalente di dose è il Sievert (Sv): $1 \text{ Sv} = 1 \text{ Gy} \cdot Q$

La vecchia unità era il rem: $1 \text{ rem} = 1 \text{ rad} \cdot Q$

In pratica per l'equivalente di dose valgono le stesse relazioni trovate per la dose assorbita se il valore di quest'ultima è moltiplicato per il fattore qualità Q

Il calcolo dell'equivalente di dose da neutroni è estremamente complicato e ci si rifà alla tabella 18.4 e all'utilizzo di grafici.

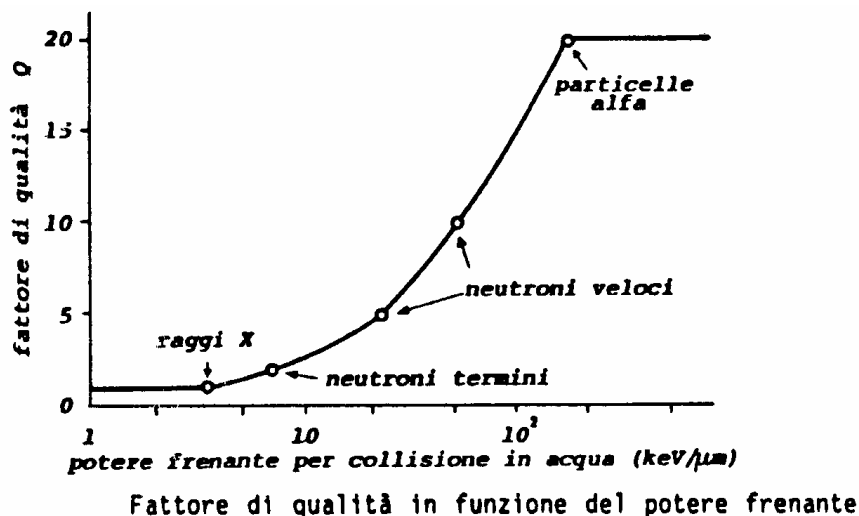


Fig. 18.6 relazione tra potere frenante e fattore qualità Q per varie radiazioni

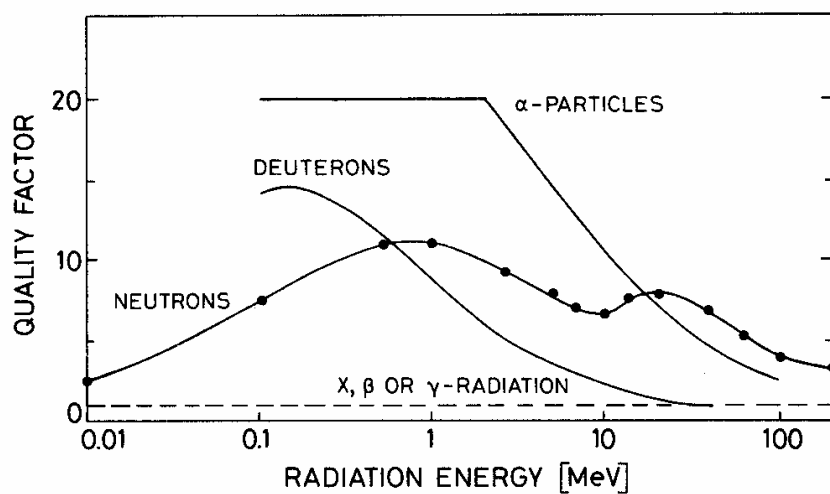


Fig. 18.7 Fattore qualità Q per varie radiazioni in funzione dell'energia

In figura 18.8 è riportato il kerma in tessuto biologico in funzione dell'energia per unità di fluensa dei neutroni. Se ipotizziamo (e in questa sede non possiamo fare altrimenti) di essere in condizioni di equilibrio della radiazione, sappiamo che il kerma coincide con la dose assorbita e quindi $D = K$. L'equivalente di dose risulterà allora: $H = D \cdot Q = K \cdot Q$. Nota l'intensità di fluensa Φ dei neutroni, per ottenere l'intensità di equivalente di dose è sufficiente moltiplicare per Φ il valore del kerma unitario dato dalla figura 18.8.

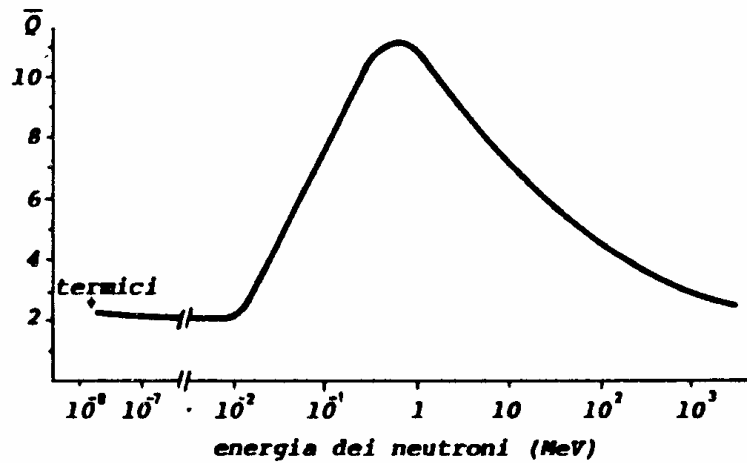


Figura 3. Fattori di qualità efficaci per i neutroni, raccomandati dalla ICRP.

Fig. 18.7 Fattore qualità Q per neutroni in funzione dell'energia

Tab. 6.III. Fattore di qualità efficace per i neutroni di varie energie (dati tratti da ICRP71).

<i>Energia dei neutroni (MeV)</i>	<i>Fattore di qualità efficace</i>
$2.5 \cdot 10^{-8}$ (termici)	2.3
da $1 \cdot 10^{-7}$ a $1 \cdot 10^{-2}$	2
$1 \cdot 10^{-1}$	7.4
$5 \cdot 10^{-1}$	11
1	10.6
2	9.3
5	7.8
10	6.8
20	6.0
50	5.0
$1 \cdot 10^2$	4.4
$2 \cdot 10^2$	3.8
$5 \cdot 10^2$	3.2
$1 \cdot 10^3$	2.8

Tab. 18.4 Fattore qualità dei neutroni in funzione dell'energia

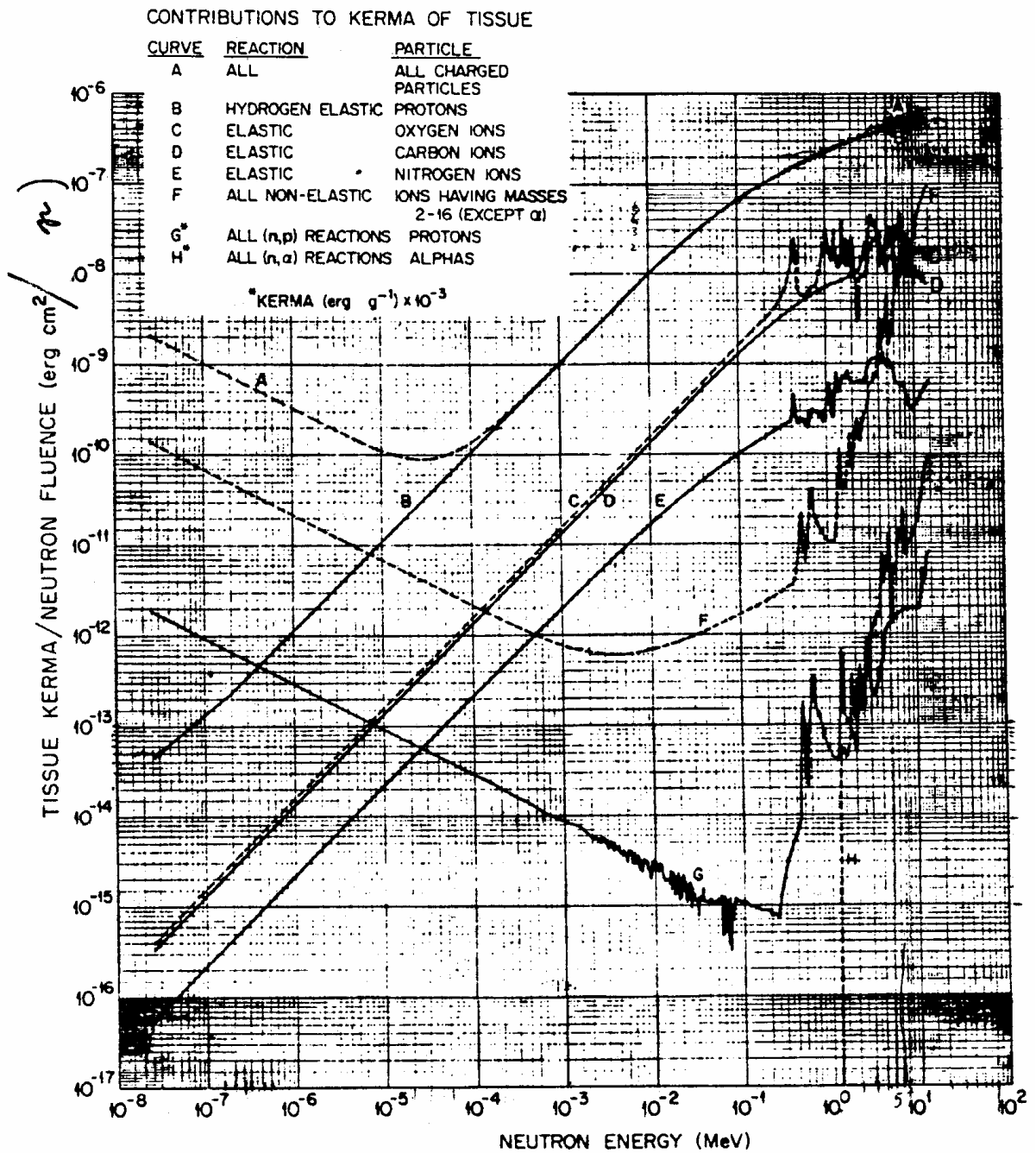


Fig. 18.8 k/Φ kerma al tessuto per unità di fluenza neutronica

Il grafico di figura 18.9 invece fornisce direttamente, nota l'energia dei neutroni, l'intensità di fluenza (in neutroni $\text{cm}^{-2}\cdot\text{s}^{-1}$) corrispondente ad un equivalente di dose H di 1 mrem/h. Se si conosce la vera intensità di fluenza si può determinare il corrispondente valore di H .

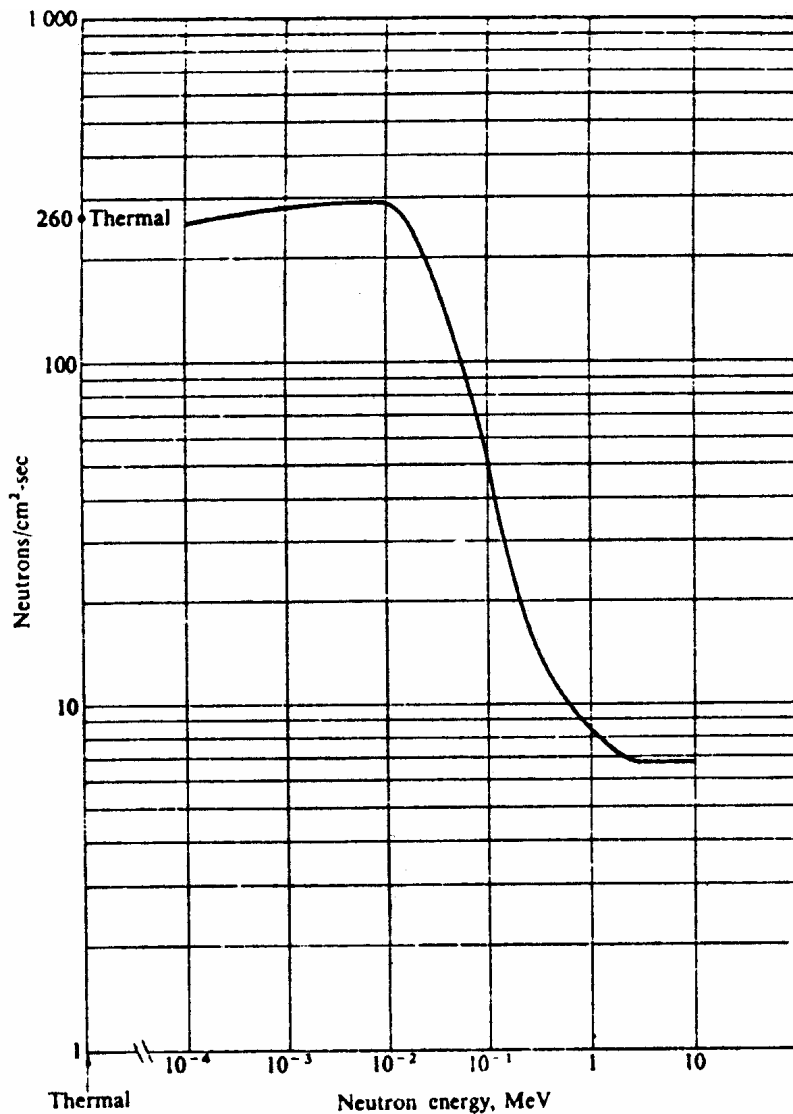


Fig. 18.9 Intensità di fluena neutronica corrispondente ad $\dot{H} = 1$ mrem/h

7.12 Effetto delle radiazioni sull'uomo. Le principali sorgenti di radiazione

Negli ultimi anni è stato compiuto un considerevole sforzo per determinare gli effetti delle radiazioni sul corpo umano. Poiché non è possibile ovviamente effettuare esperimenti diretti sulla popolazione, la attuale conoscenza degli effetti delle radiazioni è basata sui dati raccolti in occasione di incidenti (Chernobyl per esempio), sui dati che provengono da studi epidemiologici effettuati sui sopravvissuti al bombardamento di Hiroshima e sulle popolazioni esposte alle esplosioni nucleari effettuate a scopi militari, su studi ed esperimenti effettuati su animali da laboratorio. Lo stato attuale di conoscenza in questo campo può essere riassunto come segue:

- esiste una informazione ben documentata sugli effetti di esposizione acuta (cioè limitata nel tempo) ad alte dosi;
- poiché gli effetti, se davvero esistono, sono estremamente rari, esiste una limitata conoscenza per quanto concerne:
 - dosi acute non troppo elevate e non ripetute;
 - basse dosi acute ripetute occasionalmente;
 - bassissime dosi croniche.

Le assunzioni conservative che vengono fatte nel campo della radioprotezione sono le seguenti:

- esiste una relazione lineare dose-effetto per qualsiasi esposizione, da quelle acute a quelle croniche, indipendentemente dalla intensità della dose ricevuta: il danno è proporzionale alla dose integrale assorbita;
- Non vi è alcuna soglia sulla dose da radiazione, al di sopra della quale l'effetto si manifesta, ma al di sotto no;
- tutte le dosi assorbite da un organo sono completamente additive, indipendentemente dal ritmo di assunzione e dagli intervalli temporali tra una assunzione e le successive;
- non vi è alcun meccanismo di recupero o riparo biologico alla radiazioni.

Noi sappiamo che nessuna delle affermazioni precedenti è strettamente corretta, ma esse tuttavia formano un base conservativa su cui stabilire degli standard di radioprotezione. Abbiamo già detto che esistono organismi di controllo, il più importante dei quali è lo ICRP (International Commission on Radiation Protection) che periodicamente stabiliscono gli standard di radioprotezione a cui attenersi. Questi sono basati sul bilancio esistente tra rischi e benefici che derivano dall'uso pacifico dell'energia nucleare.

Prima di esaminare i principi generali del sistema di limitazione delle dosi raccomandato dall'ICRP, ricordiamo le varie sorgenti cui l'uomo è abitualmente esposto:

- sorgenti naturali (raggi cosmici, radionuclidi cosmogenici, radionuclidi primordiali);
- sorgenti naturali modificate dalla tecnologia (materiale da costruzione, viaggi in aereo ad alta quota, combustione del carbon fossile, ecc.);
- sorgenti di alcuni prodotti di consumo (orologi luminescenti, apparecchi televisivi, talune protesi dentarie, taluni vetri per lenti, ecc.);
- sorgenti impiegate in medicina (tubi a raggi X, acceleratori, radioisotopi per diagnostica, radiofarmaci, ecc.);
- sorgenti di ricadute di bombe atomiche (fallout);
- sorgenti associate con la produzione di energia nucleare (estrazione e ritrattamento del combustibile, rilasci delle centrali, riprocessamento del combustibile, rifiuti, ecc.);
- sorgenti presenti sui luoghi di lavoro.

Tab. 8.I. Equivalenti annuali di dose efficace dovuti al fondo naturale nelle aree «normali» (dati tratti da UNSCEAR88).

Sorgente	Equivalente di dose efficace (mSv/anno)		
	Irradiazione esterna	Irradiazione interna	Totale
Raggi cosmici			
Componente dirett. ionizz.	0.30		0.30
Neutroni	0.055		0.055
Radionuclidi cosmogenici		0.015	0.015
Radionuclidi primordiali			
K-40	0.15	0.18	0.33
Rb-87		0.006	0.006
U-238 (serie)	0.10	1.24	1.34
Th-232 (serie)	0.16	0.18	0.34
TOTALE (arrotondato)	0.8	1.6	2.4

Tab. 18.5 Equivalente di dose annuale dovuto al fondo naturale

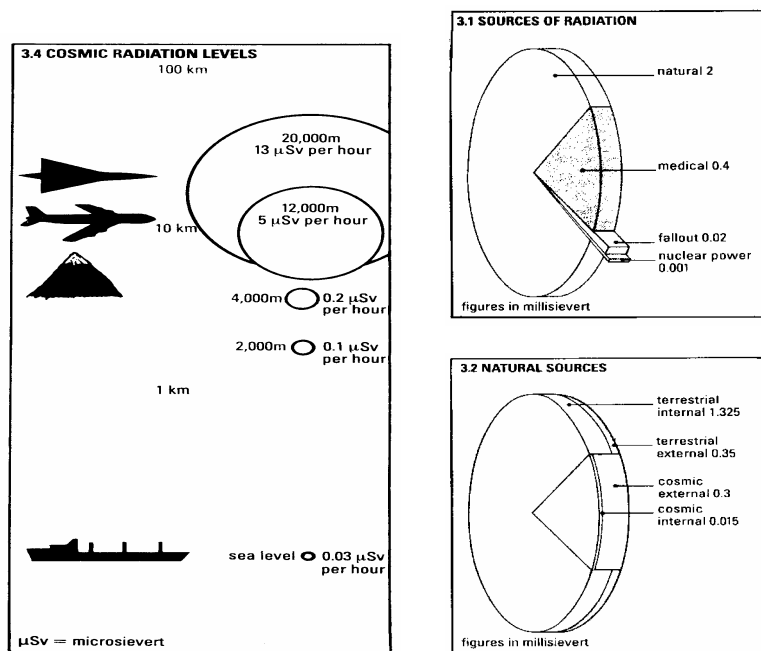


Fig. 18.10 Il fondo delle radiazioni naturali in varie situazioni

Nelle categorie sopra elencate si identificano radionuclidi che danno luogo ad irradiazione esterna ed altri che originano invece irradiazione interna.

La più importante fonte di esposizione per gli esseri umani è certamente il fondo naturale, il cui contributo medio (che varia comunque considerevolmente da luogo a luogo) vale 2.4 mSv/anno (vedi tab. 18.5)

La seconda sorgente di irradiazione della popolazione per ordine di importanza è costituita dalle applicazioni mediche (diagnostica e terapia). A parte le dosi ricevute dai pazienti sottoposti a radioterapia, un contributo notevole

all'equivalente di dose globale deriva, specie nei paesi industrializzati, dalle pratiche radiografiche (vedi tabella 18.6)

Tab. 8.II. Dosi ricevute nei più comuni esami radiografici in vari organi protezionisticamente significativi, secondo calcoli per un fantoccio antropomorfo da 70 kg (dati tratti da ICPR82b).

Esame	Dose nell'organo (mGy)					
	Tiroide	Midollo osseo attivo	Polmone	Gonadi		Mammella
				♂	♀	
Torace	0.065	0.04 (0.03)	0.19 (0.20)	-	-	0.14
Cranio	2.22	0.31	0.02	-	-	-
Rachide cervicale	4.04	0.11	0.14	-	-	-
Costole	1.54	0.49 (0.42)	3.24 (2.96)	-	0.004	4.11
Spalla (una proiezione)	0.58	0.06	0.39 (0.27)	-	-	0.77
Rachide dorsale	0.75	0.43 (0.32)	2.63 (2.65)	-	0.006	2.76
Colecistogramma	0.01	0.66	1.76	-	0.06	-
Rachide lombare	0.003	1.26	1.33	0.07	4.05	-
Porzione sup. tratto G-I	0.07	1.17 (1.14)	5.32 (4.76)	0.004	0.45	0.53
Rene, uretere, vescica	-	0.48	0.12	0.16	2.12	-
Clisma	0.002	2.98	0.48	0.58	7.87	-
Rachide lombosacrale	-	2.24	0.35	0.43	6.40	-
Pielografia intravenosa	-	1.16	0.35	0.49	6.36	-
Bacino	-	0.27	0.011	0.57	1.48	-
Anca (una proiezione)	-	0.17	-	3.68	0.78	-
Rachide in toto (chiroprassi)	2.71	0.35	1.49 (1.17)	0.10	1.00	2.34
Mammografia						
(1) Xeroradiografia	-	(-)	(-)	-	-	7.66
(2) Pellicola-schermo	-	(-)	(-)	-	-	2.12

(-) Trascurabile rispetto agli altri organi.
I dati tra parentesi si riferiscono alla donna se diversi da quelli per l'uomo.

Tab. 18.5 Equivalente di dose associato ai principali esami radiografici

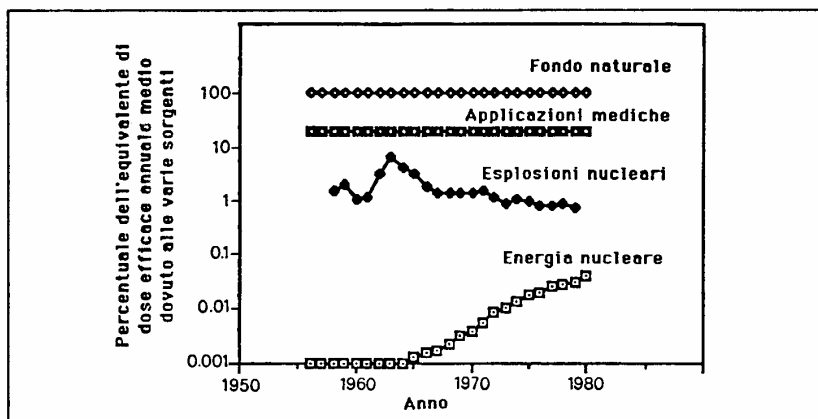


Figura 8.1. Andamento nel tempo dell'equivalente di dose efficace annuale dovuto alle più importanti sorgenti di radiazioni cui è esposta la popolazione mondiale avendo posto uguale a 100 l'esposizione media alle sorgenti naturali (sulla base dei dati UNSCEAR82).

Fig. 18.11 Evoluzione temporale dei più importanti contributi alla dose collettiva

Tutte le altre sorgenti elencate contribuiscono in modo più modesto alle dosi collettive individuali. Nel grafico di figura 18.11 è riportata l'evoluzione nel tempo delle più importanti di esse.

18.13 Le raccomandazioni dell' ICRP

L'ICRP costruisce tutto il suo edificio protezionistico sull'ipotesi di una relazione di tipo lineare senza soglia tra effetti stocastici indotti e dose ricevuta. Tale relazione viene ritenuta cautelativa. Sulla base di questa assunzione è stato ricavato un indice di rischio globale di $1.65 \cdot 10^{-2}$ eventi gravi per Sv ricevuto, separabile nei due contributi di $1.25 \cdot 10^{-2} \text{ Sv}^{-1}$ per la cancerogenesi e $0.4 \cdot 10^{-2} \text{ Sv}^{-1}$ per gli effetti ereditari nelle prime due generazioni. Va purtroppo comunque aggiunto che una recente rideterminazione delle dosi ricevute dai sopravvissuti di Hiroshima e Nagasaki e le conseguenti rivalutazioni delle stime di rischio per l'induzione della leucemia e degli altri tumori portano ad ipotizzare fattori di rischio sostanzialmente più elevati di quelli adottati dalla ICRP.

Il sistema di limitazione delle dosi si fonda sui seguenti tre fondamentali principi:

- a) nessuna attività umana deve essere accolta a meno che la sua introduzione produca un beneficio netto e dimostrabile;
- b) ogni esposizione alle radiazioni deve essere tenuta tanto bassa quanto è ragionevolmente ottenibile in base a considerazioni sociali ed economiche (principio "ALARA", dall'inglese: As Low As Reasonably Achievable);
- c) l'equivalente di dose ai singoli individui non deve superare i limiti raccomandati.

I tre principi devono essere applicati in sequenza: si passa cioè al secondo quando si sia verificato il primo, e al terzo quando si sia verificato anche il secondo.

18.14 Norme di legge

La legislazione italiana in merito di radioprotezione si rifà alle norme sancite dalla Unione Europea, la quale a sua volta ha fatto proprie le raccomandazioni dell'ICRP. Vediamone i punti salienti.

La popolazione è divisa in due categorie: coloro che per motivi professionali sono potenzialmente esposti al rischio delle radiazioni ionizzanti, e le persone del pubblico (cioè tutti gli altri). A loro volta i lavoratori esposti sono divisi in due categorie: A e B a seconda del livello potenziale di rischio. Il limite di equivalente di dose per esposizione globale per i lavoratori esposti è stabilito in 100 mSv in cinque anni solari consecutivi qualsiasi, con l'ulteriore condizione che non venga superato il limite di 50 mSv in un anno solare.

Una possibile "storia dosimetrica" è riportata nel grafico di figura 18.12, dove si vede che il ritmo medio di acquisizione di dose può essere appunto quello di 100 mSv in cinque anni ma la pendenza massima non supera i 50 mSv/anno.

Il limite di equivalente di dose per le persone del pubblico è fissato per legge al valore di 1 mSv per anno solare. Si noti come tale valore sia ovviamente

confrontabile con l'equivalente di dose annuo dovuto al fondo naturale, pari a 2.4 mSv.

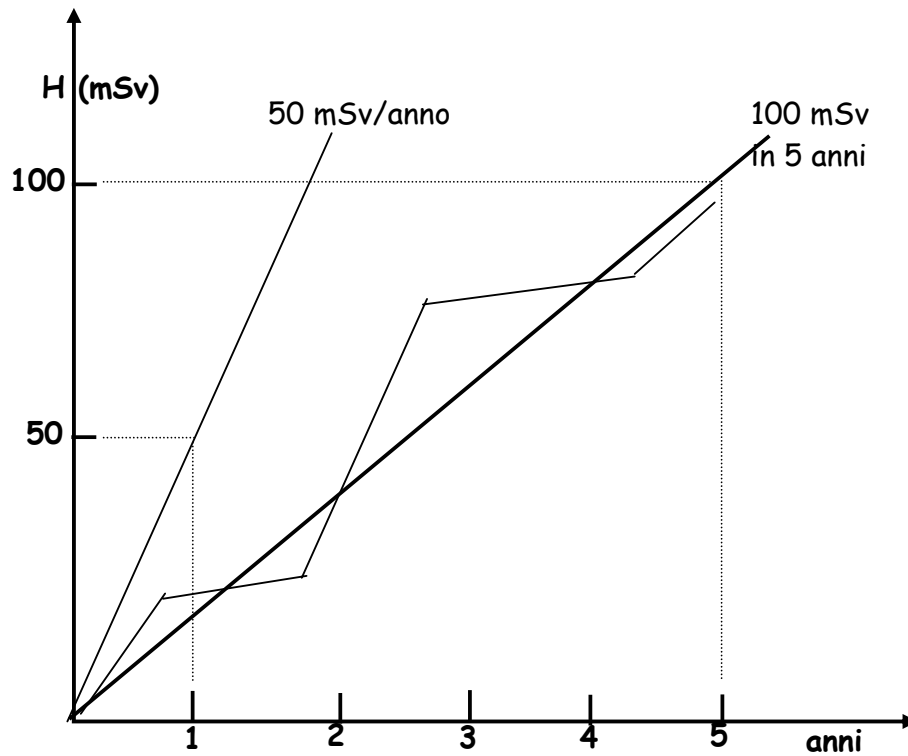


Fig. 18.12 esempio di profilo temporale di dose per un lavoratore professionalmente esposto

Esercizio 1

Si abbia un fascio parallelo di elettroni monoenergetici. L'energia cinetica degli elettroni è pari a $E_c = 0.4 \text{ MeV}$ ed il flusso vale $\Phi = 10^8 \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}$. calcolare \dot{D} e \dot{H} in acqua.

Dal grafico di figura 18.13 si ricava che per $E_c = 0.4 \text{ MeV}$ un flusso di elettroni $\Phi^* = 20 \text{ elettroni cm}^{-2}\text{s}^{-1}$ corrisponde ad un valore $\dot{H}^* = 2.5 \text{ mrem/h}$. Pertanto:

$$\dot{H} = \dot{H}^* \frac{\Phi}{\Phi^*} = 1.25 \cdot 10^7 \text{ mrem/h} = 1.25 \cdot 10^4 \text{ rem/h} = 1.25 \cdot 10^2 \text{ Sv/h} = 35 \text{ mSv/s.}$$

Naturalmente, poiché per elettroni da 0.4 MeV $Q=1$ di ha: $\dot{D} = \dot{H} = 35 \text{ mGy/s}$.

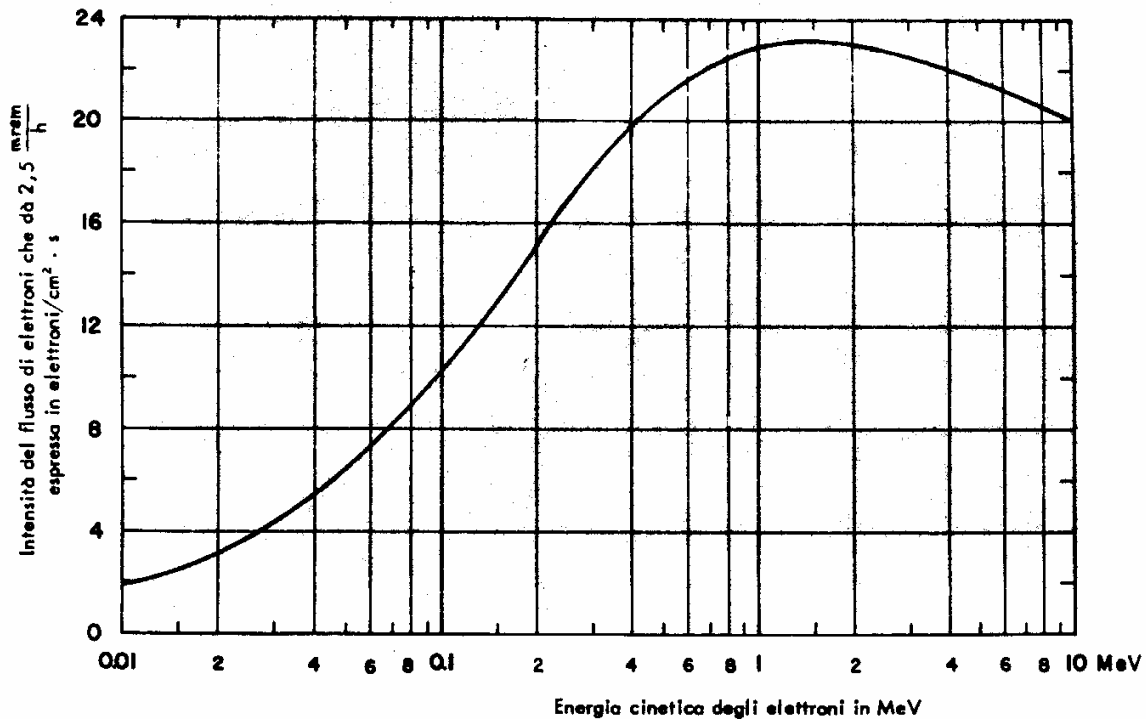


Fig. 18.13 intensità di fluenza di elettroni corrispondente a 2.5 mrem/h

Esercizio 2

Calcolare \dot{D} e \dot{H} in aria, acqua e tessuto per un fascio di fotoni monoenergetico di energia $E_\gamma = 3 \text{ MeV}$ e intensità di flusso $\Phi = 10^7 \text{ fotoni cm}^{-2}\text{s}^{-1}$

Ricordando la figura 18.3 che riportiamo qui sotto, si ricava che, per $E_\gamma = 3 \text{ MeV}$, 240 fotoni $\text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}$ contribuiscono ad una intensità di esposizione di 1 mR/h

Pertanto, nel nostro caso, avremo:

$$\dot{X} = \frac{10^7}{2.4 \cdot 10^2} = 4.2 \cdot 10^4 \text{ mR/h}$$

Ricordiamo che per un materiale M qualsiasi possiamo scrivere la relazione

$$\dot{D}_M (\text{mrad/h}) = \frac{\mu_{en}(M)}{\mu_{en}(\text{aria})} \cdot \dot{D}_{\text{aria}} (\text{mR/h}) = 0.874 \cdot \frac{\mu_{en}(M)}{\mu_{en}(\text{aria})} \cdot \dot{X} (\text{mR/h})$$

che possiamo riscrivere come:

$$\dot{D}_M (\text{mrad/h}) = f_M \cdot \dot{X} (\text{mR/h})$$

dove $f_M = 0.874 \cdot \frac{\mu_{en}(M)}{\mu_{en}(\text{aria})}$ contiene tutta la dipendenza dal materiale.

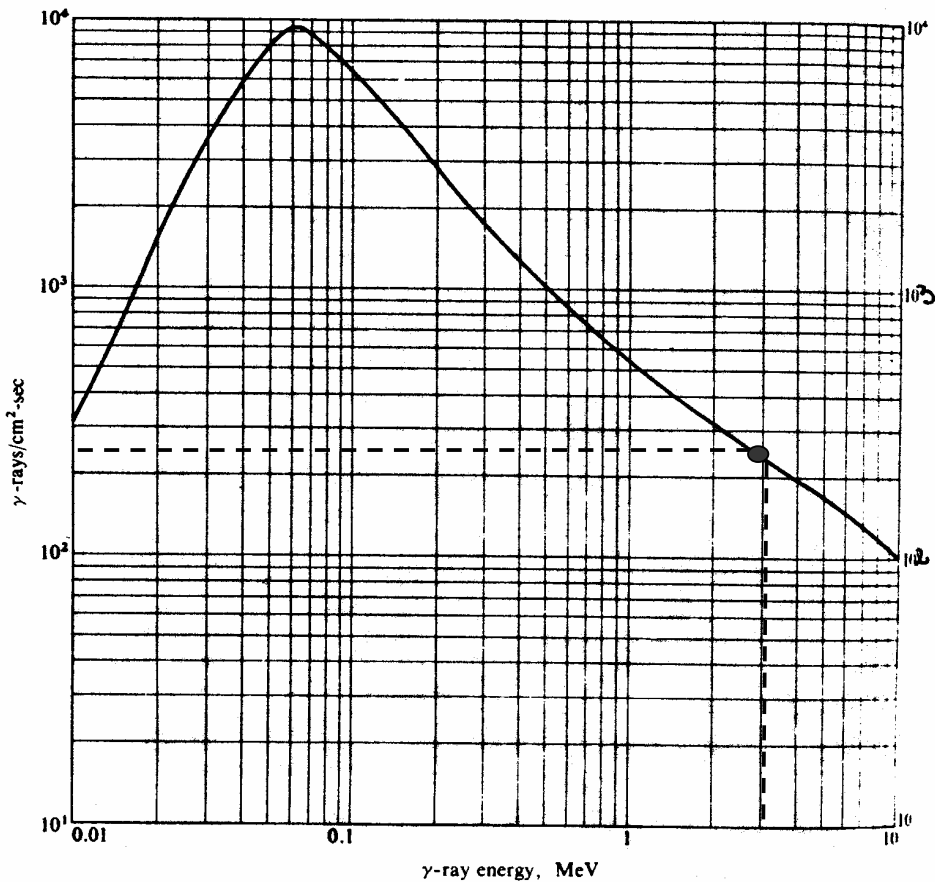


Fig. 18.14 intensità di fluena di fotoni ($\text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}$) di energia E_γ corrispondente ad una intensità di Esposizione pari ad 1 mR/h

Nella tabella 18.6 sono riportati i valori del coefficiente f nel caso di acqua, osso e muscolo in funzione dell'energia dei fotoni.

Pertanto risulta:

$$\dot{D}_{\text{aria}} = 0.87 \cdot 4.2 \cdot 10^4 \text{ mrad/h} = 36.5 \text{ rad/h} = 0.1 \text{ mGy/s}$$

$$\dot{D}_{\text{tessuto}} = 0.96 \cdot 4.2 \cdot 10^4 \text{ mrad/h} = 40 \text{ rad/h} = 0.111 \text{ mGy/s}$$

$$\dot{D}_{\text{acqua}} = 0.97 \cdot 4.2 \cdot 10^4 \text{ mrad/h} = 41 \text{ rad/h} = 0.114 \text{ mGy/s}$$

Esercizio 3

Una sorgente di fotoni di energia $E_\gamma = 0.04 \text{ MeV}$ ha una attività $a = 100 \text{ Ci}$. Calcolare l'intensità di esposizione e l'intensità di dose in aria, muscolo e grasso ad un metro di distanza dalla sorgente. Ricordiamo la relazione:

$$\dot{X} = 0.0659 \cdot \left(\frac{\mu_{\text{en}}}{\rho} \right) E_\gamma \phi_\gamma, \text{ dove } \dot{X} \text{ è espresso in mR/h quando l'energia è data in MeV,}$$

il coefficiente di assorbimento massico in cm^2/g ed il flusso in $\text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}$.

$$\phi_\gamma = \frac{a}{4\pi d^2} = 2.94 \cdot 10^7 \text{ fotoni cm}^{-2}\text{s}^{-1}.$$

$$\left(\frac{\mu_{en}}{\rho}\right)_{aria} = 6.83 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^2/\text{g} \text{ per fotoni di } 40 \text{ keV.}$$

$$\text{Sostituendo: } \dot{X} = 0.0659 \cdot \left(\frac{\mu_{en}}{\rho}\right) E_{\gamma} \varphi_{\gamma} = 5.29 \cdot 10^3 \text{ mR/h} = 5.29 \text{ R/h}$$

E_{γ} (MeV)	f_{acqua}	f_{osso}	$f_{muscolo}$
0.010	0.92	3.68	0.93
0.015	0.89	4.00	0.92
0.020	0.93	4.27	0.92
0.030	0.87	4.43	0.91
0.040	0.88	4.13	0.92
0.050	0.99	3.61	0.93
0.060	0.91	2.94	0.93
0.080	0.94	1.93	0.94
0.10	0.95	1.47	0.95
0.15	0.97	1.08	0.96
0.2	0.98	0.93	0.97
0.3	0.97	0.94	0.96
0.4	0.97	0.93	0.96
0.5	0.97	0.93	0.96
0.6	0.97	0.93	0.96
0.8	0.97	0.92	0.96
1.0	0.97	0.92	0.96
1.5	0.97	0.92	0.96
2.0	0.97	0.92	0.96
3.0	0.97	0.92	0.96

Tab. 18.6

Dal grafico di figura 18.4 qui sopra riportato, si ricava immediatamente:

$$\dot{D}_{aria} = 0.87 \cdot \dot{X}_{aria} \text{ (mR/h)} = 4.63 \text{ rad/h} = 46.3 \text{ mGy/h}$$

$$\dot{D}_{tessuto} = 0.90 \cdot \dot{X}_{aria} \text{ (mR/h)} = 4.77 \text{ rad/h} = 47.7 \text{ mGy/s}$$

$$\dot{D}_{grasso} = 0.45 \cdot \dot{X}_{aria} \text{ (mR/h)} = 2.38 \text{ rad/h} = 23.8 \text{ mGy/s}$$

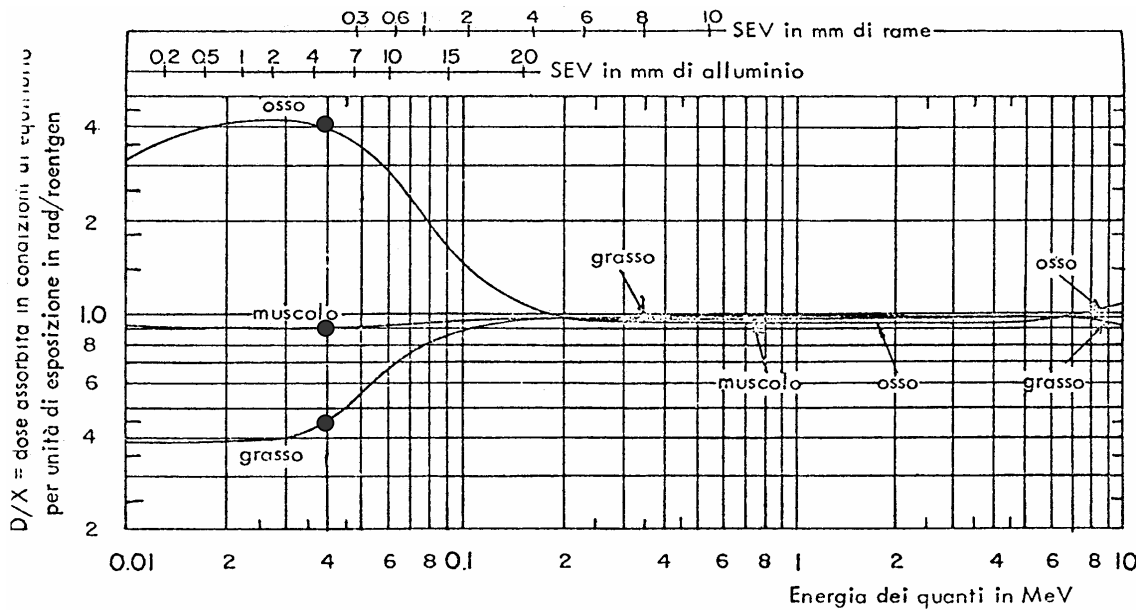


Fig. 18.15 Andamento di f_M per i principali tessuti organici in funzione

Esercizio 4

Si abbia una sorgente di ^{60}Co di attività $a = 1 \text{ Ci}$. Calcolare \dot{X} a $d = 5 \text{ m}$ di distanza. Calcolare inoltre, alla stessa distanza, \dot{D} in aria, acqua e osso. Occorre tener conto della \dot{D} prodotta dagli elettroni del decadimento beta del ^{60}Co ?

$$\dot{X} = \frac{\Gamma \cdot a}{d^2}$$

La costante gamma specifica del ^{60}Co vale: $\Gamma = 1.30 \frac{\text{R m}^2}{\text{h Ci}}$

Sostituendo si ricava: $\dot{X} = 52 \text{ mR/h}$

Pertanto:

$$\dot{D}_{\text{aria}} = 0.87 \cdot \dot{X}_{\text{aria}} (\text{mR/h}) = 45.2 \text{ mrad/h} = 0.452 \text{ mGy/h}$$

$$\dot{D}_{\text{acqua}} = 0.97 \cdot \dot{X}_{\text{aria}} (\text{mR/h}) = 50.4 \text{ mrad/h} = 0.504 \text{ mGy/h}$$

$$\dot{D}_{\text{osso}} = 0.92 \cdot \dot{X}_{\text{aria}} (\text{mR/h}) = 47.8 \text{ mrad/h} = 0.478 \text{ mGy/h}$$

Invece di usare la costante Γ avremmo potuto far il calcolo per esteso. Attenzione in questo caso: il ^{60}Co emette due fotoni per decadimento di energie rispettivamente 1.17 e 1.33 MeV. Nel calcolo del flusso bisogna quindi moltiplicare per due l'attività della sorgente. Quanto all'energia, si può considerare che i due fotoni abbiano entrambi la stessa energia media, ossia 1.25 MeV.

Per quanto riguarda la dose dovuta agli elettroni, questi ultimi vengono assorbiti lungo il tragitto: sono infatti elettroni con $E_{\text{max}} = 0.32 \text{ MeV}$ che hanno un range in aria pari a $2.6 \cdot 10^{-3} \text{ g/cm}^2$ (pari a 2 centimetri). Essi non contribuiscono pertanto alla dose.

Esercizio 5

Una sorgente di neutroni ha una energia $E_1 = 0.1$ MeV ed una intensità $I = 10^7$ neutroni al secondo. Calcolare l'intensità di kerma a 1 metro, l'intensità di dose assorbita in condizioni di equilibrio e l'intensità di equivalente di dose in tessuto biologico. Ripetere il calcolo per neutroni di energia $E_2 = 0.7$ MeV.

Dal grafico di figura 18.8 ricaviamo:

$$\text{per } E_1 = 0.1 \text{ MeV: } \text{kerma}/\Phi = 6 \cdot 10^{-8} \text{ erg cm}^2 \text{ g}^{-1} = 6 \cdot 10^{-10} \text{ rad cm}^2$$

$$\text{per } E_2 = 0.7 \text{ MeV: } \text{kerma}/\Phi = 2 \cdot 10^{-7} \text{ erg cm}^2 \text{ g}^{-1} = 2 \cdot 10^{-9} \text{ rad cm}^2$$

Il flusso ad un metro dalla sorgente di neutroni vale:

$$\Phi = \frac{I}{4\pi d^2} = 79.6 \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}$$

Il kerma allora vale:

$$\text{kerma} = \Phi \cdot 6 \cdot 10^{-10} \text{ rad/s} = 4.8 \cdot 10^{-8} \text{ rad/s} = 0.17 \text{ mrad/h} = 47.2 \text{ } \mu\text{Gy/s} \quad (E_1 = 0.1 \text{ MeV})$$

$$\text{kerma} = \Phi \cdot 2 \cdot 10^{-9} \text{ rad/s} = 1.6 \cdot 10^{-7} \text{ rad/s} = 0.58 \text{ mrad/h} = 161 \text{ } \mu\text{Gy/s} \quad (E_2 = 0.7 \text{ MeV})$$

In condizioni di equilibrio elettronico si ha che $\dot{D} \equiv \text{kerma}$

Quanto all'intensità di equivalente di dose, sappiamo che: $\dot{H} = \dot{D}Q$

Dove Q è il fattore qualità e vale in questo caso 10.

$$\dot{H} = \dot{D}Q = 1.7 \text{ mrem/h} = 472 \text{ } \mu\text{Sv/s} \quad (E_1 = 0.1 \text{ MeV})$$

$$\dot{H} = \dot{D}Q = 5.8 \text{ mrem/h} = 1610 \text{ } \mu\text{Sv/s} \quad (E_2 = 0.7 \text{ MeV})$$

Esercizio 6

Un uomo viene investito da un flusso di 10^8 neutroni cm^{-2} di energia compresi tra 5 e 10 MeV. Calcolare la dose ricevuta.

Ricordando il grafico di figura 18.9 (riportato qui sotto) si vede che un flusso di 6.8 neutroni $\text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}$ di energia tra 5 e 10 MeV corrisponde ad un equivalente di dose di 1 mrem/h, corrispondenti a $2.78 \cdot 10^{-7}$ rem/s.

Eliminando il tempo, un flusso integrato $\Phi^* = 6.8$ neutroni cm^{-2} produce un equivalente di dose $H^* = 2.78 \cdot 10^{-7}$ rem. Nel nostro caso:

$$H = H^* \frac{\Phi}{\Phi^*} = 2.78 \cdot 10^{-7} \frac{10^8}{6.8} = 4.1 \text{ rem} = 41 \text{ mSv}$$

Analogo risultato si sarebbe ottenuto ragionando in termini di kerma ed utilizzando la figura 18.8.

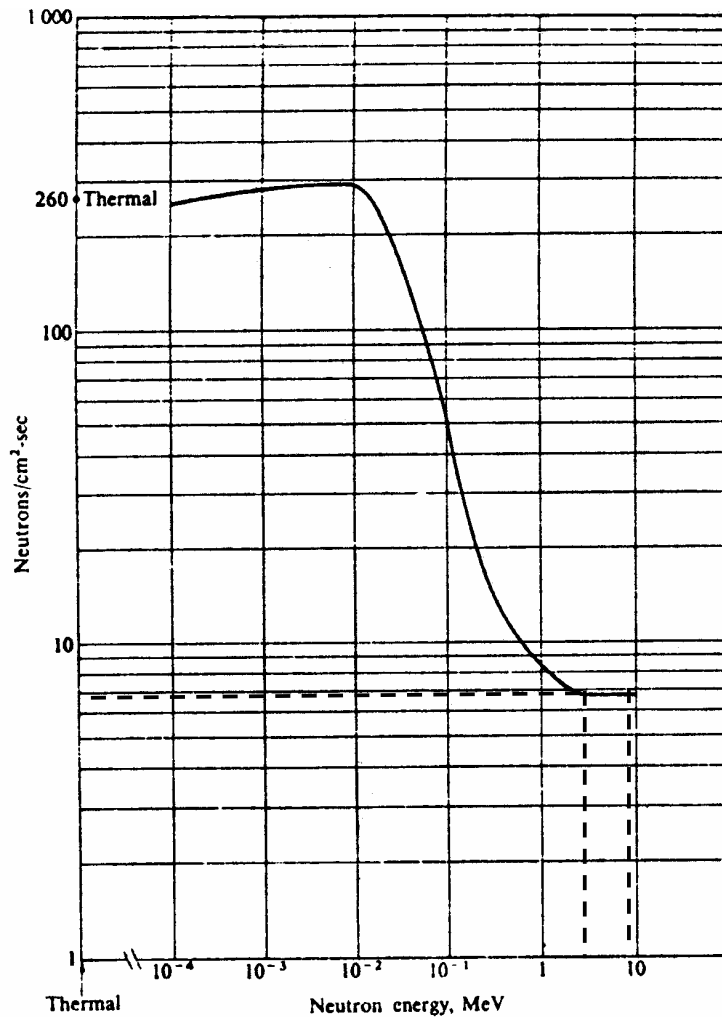


Fig. 18.16 Intensità di fluensa neutronica corrispondente ad $\dot{H} = 1$

Esercizio 7

Una sorgente da 1 Curie di $^{226}\text{Ra-Be}$ produce 10^8 neutroni al secondo dalla reazione:
 $\alpha + {}^9\text{Be} \rightarrow {}^{12}\text{C} + n$

L'energia dei neutroni è compresa tra 1 e 13 MeV. La sorgente mette anche raggi gamma di energia media pari ad un MeV ed il numero medio di fotoni per neutrone prodotto vale 350. Un lavoratore per spostare la sorgente usa un'asta così da mantenere la sorgente ad una distanza media $d = 2.5$ m dal corpo. Sapendo che l'operazione di spostamento dura un minuto, valutare l'equivalente di dose assorbita dal lavoratore.

Dobbiamo calcolare: $H_{\text{tot}} = (\dot{H}_\gamma + \dot{H}_n) \cdot \Delta t$

Le intensità di flusso di neutroni e fotoni sono le seguenti:

$$\phi_n = \frac{10^8}{4\pi 250^2} = 130 \frac{n}{\text{cm}^2 \text{ s}} \quad \phi_\gamma = 350 \cdot \phi_n = 4.5 \cdot 10^4 \frac{\gamma}{\text{cm}^2 \text{ s}}$$

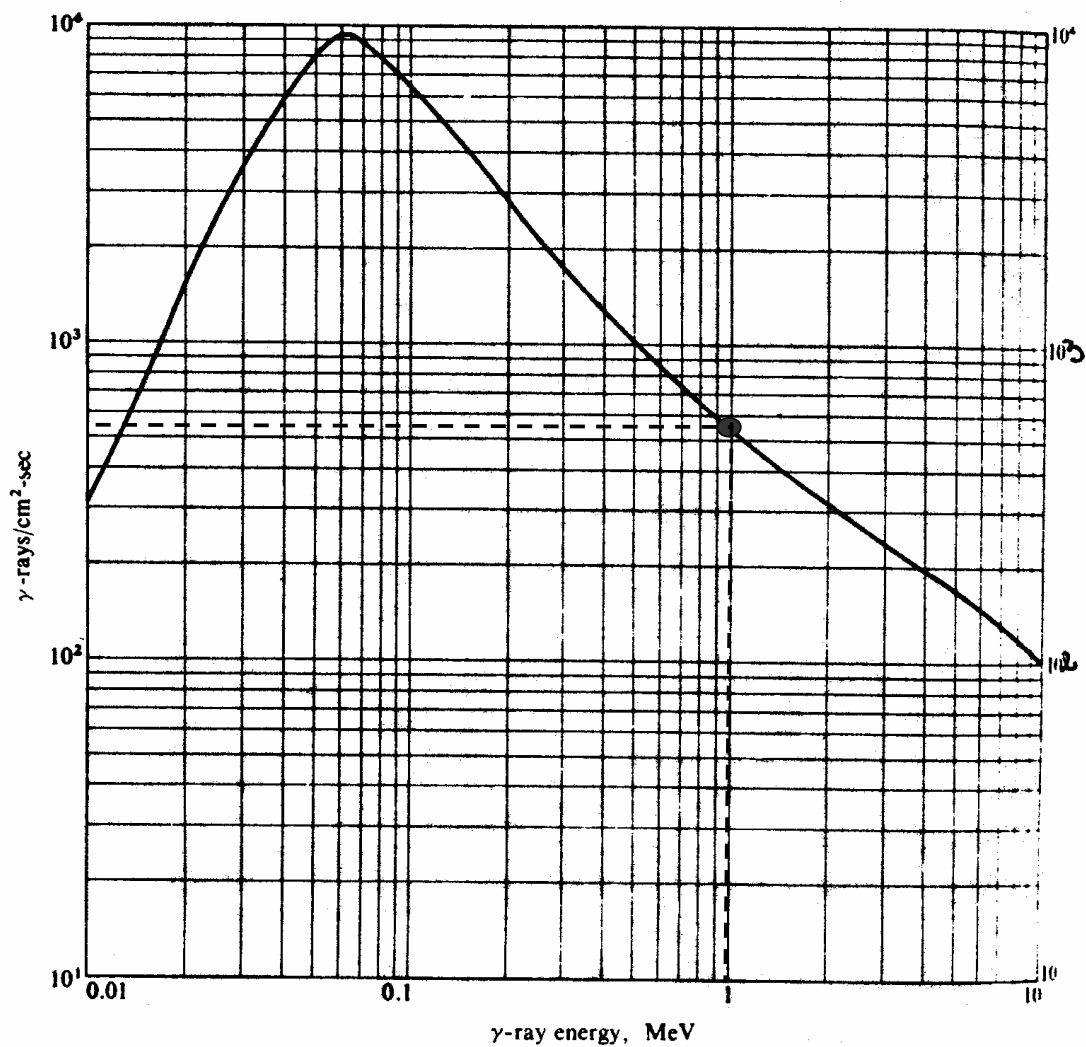


Fig. 18.17 intensità di fluenza di fotoni ($\text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}$) di energia E_γ corrispondente ad una intensità di Esposizione pari ad 1 mR/h

Dal grafico di figura 18.17 si deduce che $\dot{X}^* = 1 \text{ mR/h}$ è prodotto da $\dot{\phi}_\gamma^* = 550$ fotoni $\text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}$ da 1 MeV. Pertanto l'intensità di esposizione nel nostro caso è:

$$\dot{X} = \dot{X}^* \frac{\phi_\gamma}{\phi_\gamma^*} = 80 \text{ mR/h} \quad \dot{D}_\gamma = 0.874 \cdot \dot{X} = 70 \text{ mrad/h} \quad \dot{H}_\gamma = \dot{D}_\gamma \cdot Q = 70 \text{ mrem/h}$$

$$H_\gamma = \dot{H}_\gamma \cdot \Delta t = 70/60 = 1.165 \text{ mrem}$$

Per quanto riguarda la dose da neutroni, si procede come segue:

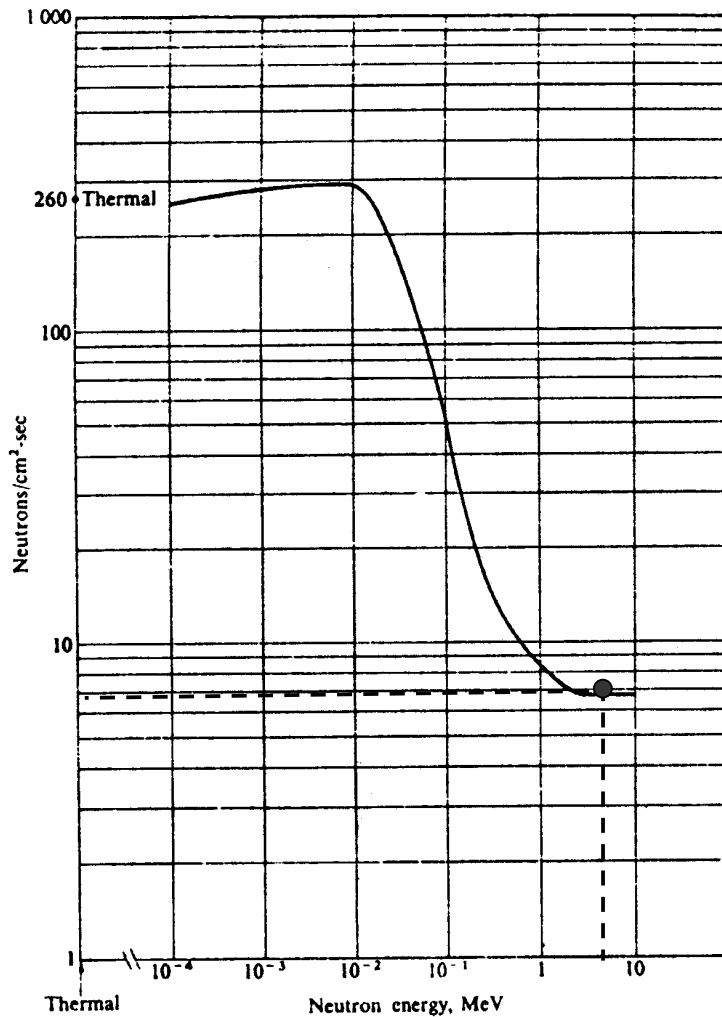


Fig. 18.18 Intensità di fluenza neutronica corrispondente ad $\dot{H} = 1$ mrem/h

Dal grafico di figura 18.18 si ricava che un flusso di 6.8 neutroni $\text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}$ di energia 5 MeV corrisponde ad un equivalente di dose di 1 mrem/h,

Nel nostro caso specifico l'intensità di equivalente di dose si ricava dalla solita relazione:

$$\dot{H}_n = \dot{H}_n^* \frac{\varphi_n}{\varphi_n^*} = 1 \frac{130}{6.8} = 19 \text{ mrem/h}$$

$$H_n = \dot{H}_n \cdot \Delta t = 19/60 = 0.32 \text{ mrem}$$

L'equivalente di dose totale risulta :

$$H_{\text{tot}} = H_\gamma + H_n = (1.16 + 0.32) \text{ mrem} = 1.48 \text{ mrem} = 0.0148 \text{ mSv}$$

Anche in questo caso si può verificare che si ottiene lo stesso risultato utilizzando il grafico del kerma.

Esercizio 8

Calcolare \dot{D} e \dot{H} dell'esercizio 1 usando la formula analitica dell'intensità di dose per particelle cariche:

$$\dot{D} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{dE}{dx} \right) \cdot \frac{d\Phi}{dt} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{dE}{dx} \right) \cdot \varphi$$

e confrontare i risultati con i due metodi.

Per elettroni in acqua si ricava che: $\left(\frac{1}{\rho} \frac{dE}{dx} \right)_{\text{acqua}} = 2.1 \text{ MeV cm}^2 \text{ g}^{-1} = 3.36 \cdot 10^{-14} \text{ J m}^2$

kg^{-1} .

Quanto al flusso:

$$\varphi = 10^8 \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1} = 10^{12} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1}$$

Pertanto:

$$\dot{D} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{dE}{dx} \right) \cdot \frac{d\Phi}{dt} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{dE}{dx} \right) \cdot \varphi = 3.36 \cdot 10^{-2} \text{ J kg}^{-1}/\text{s} = 3.36 \cdot 10^{-2} \text{ Gy/s} = 33.6 \text{ mGy/s}$$

$$\dot{H} = \dot{D}Q = 33.6 \text{ mSv/s}$$

da confrontare con il valore di 35 mSv/s ottenuto graficamente nell'esercizio 1.

Capitolo 18

Elementi di dosimetria delle radiazioni

18.1 La scoperta dei danni da radiazione. Cenni storici

Da quando le radiazioni ionizzanti sono presenti nei reattori e virtualmente in ogni apparato che utilizza l'energia nucleare, i progettisti di questi sistemi devono includere nei relativi progetti le schermature e la protezione dalla radiazioni sia per il personale addetto al loro funzionamento che per la popolazione nel suo insieme. La sorveglianza e il monitoraggio continuo dei livelli di radiazione sono responsabilità dei fisici sanitari, che devono garantire la sicurezza degli operatori e del pubblico in modo che nessuno riceva una dose pericolosa o non necessaria per esposizione alle radiazioni. I criteri per il progetto delle schermature e l'applicazione delle misure di sicurezza sono basate sulle conoscenze aggiornate dei rischi dovuti alle radiazioni ionizzanti e degli effetti che esse provocano sull'uomo. Vale la pena di osservare che nel corso degli anni, con l'aumentare delle conoscenze in questo campo, la "pericolosità" delle radiazioni è andata aumentando e le norme di sicurezza adottate su scala mondiale sono diventate sempre più restrittive.

Il genere umano è da sempre esposto a varie forme di radiazione naturale costituite, come già visto, dai raggi cosmici e da tutti gli elementi radioattivi naturali (^{40}K , gas Radon, Uranio, torio, Radio, ecc. ecc.). Comunque i livelli di radiazione naturali sono troppo deboli per mettere in luce gli effetti dannosi delle radiazioni, che non divennero evidenti prima della fine dell'800, quando in seguito alla scoperta dei raggi X da parte di Roentgen e della radioattività da parte di Bequerel furono disponibili intense sorgenti di radiazione. Non era ancora passato un mese dall'annuncio della scoperta dei raggi X da parte di Roentgen (gennaio 1896) che un costruttore e sperimentatore di tubi sotto vuoto mostrò lesioni alla cute e alle mani che oggi indicherebbero come dermatite subacuta da raggi X. Quelle lesioni erano il risultato di esposizioni ad alte dosi avvenute manipolando apparecchi a raggi X, prima ancora del riconoscimento dei raggi X da parte di Roentgen. Le osservazioni cliniche di questo genere si moltiplicarono rapidamente. Nel 1901 Bequerel mostrò eritema della cute in corrispondenza della tasca del vestito nella quale aveva tenuto per qualche tempo una fiala di vetro contenente sali di Radio. Poco dopo Pierre Curie si provocò intenzionalmente un eritema da Radio sulla cute del braccio ed ebbe l'idea che le radiazioni potessero avere proprietà terapeutiche. Molti malcapitati ricevettero come ricostituente iniezioni di materiali contenenti Radio e Torio e furono successivamente colpiti da tumore. Nel 1903 fu scoperto che l'esposizione ai raggi X poteva indurre sterilità negli animali da laboratorio; pochi anni dopo fu annunciato che gli embrioni di uova di rospo fertilizzate con sperma irradiato con raggi X presentavano anomalie. Nel 1904 furono segnalate le prime anemie e le prime leucemie indotte da raggi X e già nel 1902 si constatò che un carcinoma cutaneo si era sviluppato su precedente dermatite da raggi. A proposito

della correlazione tra esposizione alle radiazioni ed insorgenza di cancro, già nel 1911 furono messi in evidenza 94 casi di tumori indotti da raggi X, 50 dei quali in radiologi. Nel 1922 fu stimato che almeno 100 radiologi morirono come risultato di cancro indotto da radiazioni.

Così entro circa dieci anni dalla scoperta di Roentgen e Bequerel una gran parte delle patologie da dosi elevate ed intense di esposizione a radiazioni ionizzanti era stata riconosciuta e sommariamente descritta.

Le lesioni da incorporazione di sostanze radioattive furono scoperte più tardi, attorno agli anni '20 quando si manifestarono necrosi e tumori ossei al mascellare di operaie che durante la prima guerra mondiale erano state addette a dipingere le lancette ed il quadrante di orologi luminescenti con vernici contenenti sali di Radio: esse avevano ingerito le vernici facendo la punta ai piccoli pennelli inumidendoli con le labbra, in un gesto frequentemente ripetuto durante il lavoro. Inoltre si notò che i minatori che lavoravano nelle miniere di cobalto della Sassonia e nelle miniere di peblenda in Cecoslovacchia, entrambe contenenti grosse percentuali di uranio, soffrivano di cancro ai polmoni con una percentuale trenta volte più elevata che il resto della popolazione: oggi è noto che questi lavoratori erano vittime di esposizione interna al gas Radon ed ai suoi figli, prodotti di decadimento dell'uranio: la concentrazione di Radon emesso dalle pareti dei tunnel nell'aria respirata, soprattutto a causa della scarsa ventilazione, è estremamente elevata in miniera. Oggi per legge è imposta una ventilazione forzata delle miniere e turni di lavoro limitati per i minatori.

Un altro genere di effetti cominciò ad essere noto verso la fine degli anni '20: durante i suoi studi di genetica Muller mostrò che raggi X e raggi gamma producono mutazioni genetiche e cromosomiche nel moscerino dell'aceto, mutazioni che vengono trasmesse ai discendenti secondo le leggi dell'ereditarietà biologica.

La radioprotezione comunque si occupò in maniera rilevante degli effetti genetici solo dopo la seconda guerra mondiale, quando questi furono considerati come i più gravi ed insidiosi dell'esposizione alle radiazioni. In questi anni viene approfondito anche il capitolo dei cosiddetti "effetti tardivi" (costituiti in gran parte da tumori maligni) che compaiono in una piccola frazione delle persone di una popolazione sottoposta a dosi anche non elevate di radiazioni. Alla International Conference on Pacific Uses of Atomic energy (Ginevra, 1955) Tzuzuki riportò la notizia che tra i sopravvissuti di Hiroshima e Nagasaki erano stati osservati circa 200 casi di leucemia, un numero enormemente più alto di quello atteso in base alle caratteristiche endemiche della malattia. Negli anni seguenti fu annunciato l'aumento di frequenza di altre forme tumorali maligni nei sopravvissuti, mentre venivano resi noti i risultati di indagini epidemiologiche sull'incremento di tumori maligni tra i pazienti curati con radiazioni per forme morbose non tumorali. Court, Brown e Dale nel 1957 poterono dimostrare un aumento della frequenza di leucemie nelle cause di morte di pazienti trattati con roentgenterapia per dolori dovuti ad

artrosi vertebrale. A cavallo del 1960, a causa delle ricadute radioattive (fallout) conseguenti alle esplosioni nell'atmosfera di ordigni bellici nucleari di prova iniziò purtroppo anche il fenomeno di piccole dosi annue ricevute costantemente da vastissime popolazioni di interi continenti e si cominciò a parlare di "dose collettiva" ricevuta da un insieme di persone esposte. Già negli anni '50 era stato studiato un altro campo di effetti delle radiazioni: i danni riguardanti lo sviluppo embrionale e fetale. Furono soprattutto le ricerche sistematiche dei coniugi Russel che mostrarono le capacità lesive delle radiazioni sulla organogenesi che si verifica nell'embrione umano nei primi mesi dal concepimento, anche per dosi non elevate. Nasce così una speciale protezione alle donne durante la gravidanza ed in generale alle donne in età fertile.

18.2 Elementi di biologia cellulare

L'effetto delle radiazioni sugli organismi viventi è dovuto alla loro interazione con le molecole contenute nelle cellule di cui è composto l'organismo: diamo qui brevemente e qualitativamente qualche cenno sulla biologia delle cellule (soprattutto umane).

Una persona adulta possiede circa $4 \cdot 10^{13}$ cellule che differiscono tra loro sia per la funzione che per le dimensioni. La maggior parte delle cellule è piccola (avendo dimensioni dell'ordine di 10^{-3} cm), mentre ad esempio le cellule nervose possono arrivare a lunghezze dell'ordine del metro.

Le cellule possono essere divise in due categorie: cellule somatiche e cellule germinali. Quasi tutte le cellule del corpo sono cellule somatiche le quali costituiscono i vari organi, i tessuti e le altre strutture del corpo. Le cellule germinali o gameti funzionano solo nella riproduzione della specie. L'unione tra due gameti di differenti sessi è il punto di partenza per un nuovo individuo della specie. I gameti inoltre portano con sé il patrimonio ereditario della specie. Nella figura 18.1 è riportato lo schema tipico della struttura di una cellula somatica. Come si vede dalla figura la cellula contiene un numero di strutture diversificate, ciascuna delle quali ha una funzione specifica: tali strutture sono chiamate organelli e sono sospese nel citoplasma, una sostanza liquida, trasparente, formata prevalentemente da acqua ma anche da molecole varie ed elettroliti che ha lo scopo di secernere enzimi, controllare i processi di assorbimento e di secrezione della cellula, ecc. ecc.

Le parti principali della cellula sono elencate qui di seguito:

Nucleo: il grande corpo centrale di forma generalmente sferica che è il centro di controllo della cellula. Contiene la cromatina;

Cromatina: materiale genetico della cellula, discusso più avanti;

Nucleoli: corpi sferici (possono essere fino a quattro) situati all'interno del nucleo. Essi sono importanti nel metabolismo di certe sostanze chimiche;

Reticolo Endoplasmatico: è una complessa rete di tubercoli che serve al trasporto dei materiali all'interno della cellula. Esso è anche una sorgente di importanti enzimi metabolici;

Apparato del Golgi: un organello le cui funzioni non sono ancora del tutto state spiegate. Esso apparentemente concentra e modifica certe sostanze chimiche;

Lisosomi e Perossisomi: organelli che contengono enzimi per la produzione di vari prodotti chimici;

Mitocondri: sono piccoli orfanelli presenti a migliaia nella cellula e responsabili del suo metabolismo;

Centrosoma: questa struttura contiene due centrioli, che hanno un ruolo fondamentale nella mitosi della cellula;

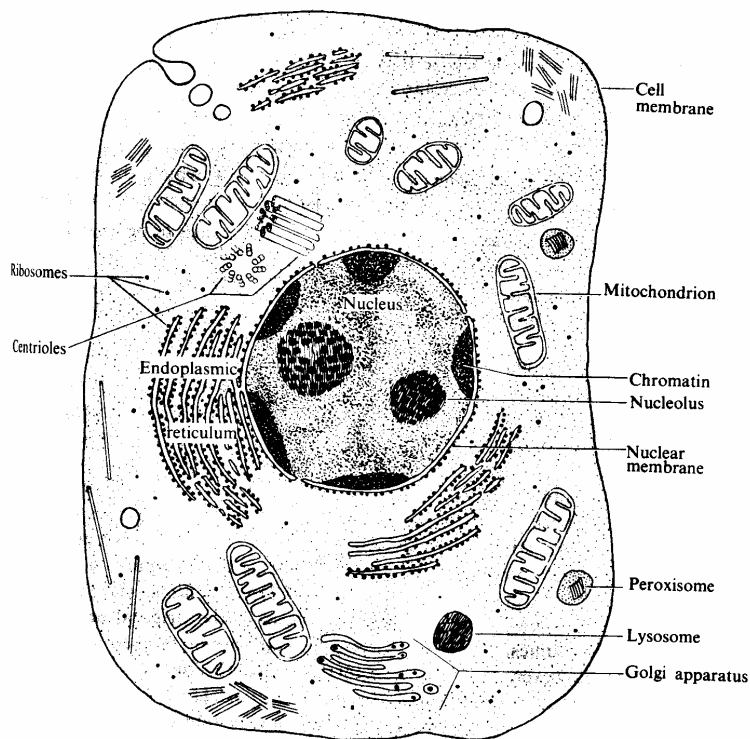


Fig. 18.1 La cellula e di suoi componenti principali

Ribosomi: sono localizzati nel reticolo endoplasmatico, sulla superficie del nucleo e nel citoplasma. Sono i centri di produzione delle proteine.

La cromatina è definita come tale soltanto durante il periodo quiescente della cellula, quando cioè non si sta dividendo. In questo stadio appare come una massa confusa di trecce di molecole di acido desossiribonucleico (DNA) e di proteine. La cromatina controlla la sintesi delle proteine che danno alla cellula le sue caratteristiche distintive. Quando inizia la mitosi queste trecce vengono districate

e si attorcigliano in un numero fisso di avvolgimenti chiamati cromosomi. Il numero dei cromosomi varia da specie a specie. Nell'uomo vi sono 46 cromosomi in ogni cellula eccetto che nelle cellule germinali che ne contengono 23, cioè la esatta metà. Nella mitosi ciascun cromosoma duplica esattamente se stesso, in modo che le nuove cellule formate contengono ancora 46 cromosomi. Poiché il DNA cromosomico controlla la produzione di proteine da parte della cellula, le due nuove cellule sono esatte repliche della cellula originaria. Dopo la mitosi i cromosomi si disattorcigliano e tornano alla loro forma filamentosa. La struttura delle cellule germinali è molto diversa da quella delle cellule somatiche: vi sono cellule germinali diverse per i due sessi e nella riproduzione ciascuna di loro porta i propri 23 cromosomi per dare origine allo zigote, la prima cellula del nuovo individuo, anch'esso contenente 46 cromosomi. La mitosi dello zigote produce l'accrescimento dell'individuo appena generato. Per molti anni si pensò e che le caratteristiche dell'ereditarietà dipendessero dalle azioni dei geni, descritti come particelle individuali situate lungo i cromosomi. Oggi si sa che i geni sono in pratica segmenti delle molecole del DNA che forniscono il codice specifico che controlla la sintesi delle proteine. Tuttavia il termine è ancora usato e i cambiamenti nei cromosomi che risultano in nuove caratteristiche ereditabili sono chiamate mutazioni genetiche.

18.3 Effetto biologico delle radiazioni

Quando una particella ionizzante interagisce con le molecole di un tessuto organico, essa perde energia attraverso interazioni di tipo elettrico con gli elettroni degli atomi. Anche particelle non direttamente ionizzanti come fotoni o neutroni interagiscono con la materia attraverso cessione di energia agli elettroni degli atomi. Quando un elettrone viene strappato ad un atomo, lo ionizza. Inoltre, a causa della energia cinetica acquistata, lungo il suo percorso interagisce e ionizza altri atomi del tessuto. Questi ioni, estremamente instabili, si combinano con gli altri atomi e molecole del tessuto dando luogo ad una vera e propria reazione a catena. A seguito di questo fenomeno vengono create nuove molecole, differenti da quelle originarie di cui è composto il tessuto, e vengono messi in moto dei radicali liberi. Questi ultimi possono interagire tra loro o con altre molecole e, attraverso processi che tutt'oggi non sono ben noti, possono indurre cambiamenti biologicamente significativi nelle molecole stesse che possono essere causa di un loro malfunzionamento. Questi cambiamenti, che si manifestano nel giro di pochi millesimi di secondo successivi all'irraggiamento, possono uccidere le cellule o alterarle al punto di generare l'insorgenza di tumori o mutazioni genetiche, a seconda che le cellule colpite sono somatiche o germinali.

Sintetizzando, vi sono due meccanismi fondamentali mediante i quali la radiazione può danneggiare le cellule: effetto diretto ed effetto indiretto. Nel primo caso la radiazione può portare alla rottura di una molecola a seguito del meccanismo di ionizzazione. Nel secondo caso invece la radiazione, sempre a causa di ionizzazione,

può produrre nuovi elementi chimici come il radicale O^+ o il radicale OH^- che interagiscono chimicamente con la cellula dando luogo a nuove alterazioni.

Per quanto detto, l'effetto biologico delle radiazioni non è sostanzialmente diverso da un qualsiasi altro effetto chimico. Il risultato della trasformazione chimica dipende dalla molecola sulla quale la radiazione ha agito. Se ad esempio la molecola fa parte di un mitocondrio, essendo presenti nella cellula moltissimi di questi oggetti, il malfunzionamento di uno di essi non pregiudica il funzionamento dell'intero sistema cellulare. Se invece la radiazione distrugge direttamente o indirettamente una molecola di DNA in un cromosoma, il risultato è una mutazione. Se questa mutazione avviene in una cellula somatica di un individuo adulto, non si ha alcun effetto macroscopico, a meno che il numero di molecole di DNA danneggiate non sia enorme (il ruolo del DNA è la produzione di proteine necessarie al funzionamento e alla vita delle cellule): semplicemente la cellula non è più in grado di riprodursi e muore. Se invece la mutazione avviene in una cellula germinale, la cellula in questione in genere non è più in grado di essere fertilizzata (questo è in fondo un meccanismo di autodifesa) ma se lo è, la mutazione si trasferisce allo zigote e alla progenie. Un altro effetto della radiazione sulle cellule somatiche è l'insorgenza del cancro, che possiamo schematizzare come una divisione rapidissima ed incontrollata delle cellule. Anche se l'origine del cancro a tutt'oggi non è nota, l'ipotesi più accettata è che sia dovuto ad un virus che è normalmente presente ed inattivo nelle cellule, ma che ad un certo punto diventa attivo distorcendo il normale processo di mitosi. Vi sono migliaia di prodotti chimici oggi riconosciuti responsabili dell'insorgenza del cancro, detti pertanto cancerogeni: non sorprende quindi che anche le radiazioni possano avere questo effetto. L'aspetto inusuale di questo tipo di danno somatico è che può manifestarsi molto tempo dopo che la radiazione ha agito, potendo addirittura iniziare dopo che le cellule si sono rinnovate per molte generazioni.

Poiché le cellule differiscono sia nella composizione che per il metabolismo ad esse associato, il loro comportamento (ed il danno subito) nei confronti delle radiazioni è diverso da tipo a tipo.

Consideriamo per esempio l'irradiazione dell'intestino. Le pareti dell'intestino, a continuo contatto con le scorie dei cibi e delle bevande, devono essere periodicamente rinnovate mediante frequenti processi di mitosi. Come effetto dell'esposizione alle radiazioni, per dosi relativamente basse la riproduzione è rallentata ma non si ha alcun effetto grave. Se però la dose è superiore ad un valore di soglia, la superficie dell'intestino non è più in grado di riprodursi e rinnovarsi in tempo e si hanno quindi lesioni ai tessuti, tali che i fluidi contenuti nell'intestino possono fuoriuscire: batteri ed altri materiali tossici entrano in circolo nel sangue e inducono gravi infezioni in tutto il corpo. A questo proposito aggiungiamo che da tutta una serie di osservazioni è noto che la radiosensibilità delle cellule è direttamente proporzionale alla loro velocità di riproduzione: esse infatti sono

particolarmente vulnerabili proprio durante il processo di mitosi. Per questo motivo il midollo osseo, i tessuti linfatici e gli organi di riproduzione sono tra i più radiosensibili mentre il muscolo, le ossa ed il sistema nervoso sono tra i meno radiosensibili. Va però detto che le cellule nervose per esempio, proprio a causa della lentezza con la quale si rinnovano, se danneggiate non vengono più riparate.

18.4 Effetti su particolari organi

Midollo osseo e sangue. All'interno delle ossa si trova il midollo che può essere di due tipi: giallo, che serve per l'accumulo dei grassi, e rosso che è deputato alla formazione del sangue. Il sangue è composto di tre tipi principali di cellule: gli eritrociti (globuli rossi), i leucociti (globuli bianchi) e le piastrine. I globuli rossi sono i responsabili della alimentazione e ossigenazione delle altre cellule del corpo e alla rimozione dei prodotti di rifiuto. I globuli bianchi hanno azione di difesa contro le infezioni e le piastrine hanno azione coagulante. In caso di irraggiamento i primi ad essere danneggiati sono i globuli bianchi, che diminuiscono in numero (leucopenia). In caso di forte irraggiamento si ha anche una riduzione di piastrine (emorragie) e successivamente di globuli rossi (anemia). Se non si è verificato contemporaneamente un grave danno al midollo osseo, è possibile un recupero da parte dell'organismo in quanto il midollo osseo può produrre nuove cellule che sostituiscono quelle distrutte. In caso contrario il danno sarà permanente ed ovviamente irreversibile.

Sistema linfatico. Il sistema linfatico è costituito da una rete fittissima di capillari all'interno dei tessuti, nei quali scorre un fluido (linfa) simile al plasma ma con minore contenuto proteico. Nella linfa si raccolgono i prodotti di rifiuto dei tessuti che vengono convogliati verso le ghiandole (linfonodi) dove sono eliminati per filtrazione: la linfa ripulita passa di nuovo nel sangue. La milza ha la funzione principale di eliminare per filtrazione le cellule morte del sangue e produrre leucociti.

Gli effetti di irraggiamento si manifestano con infezione dei linfonodi e danneggiamento dei linfociti

Apparato digerente. Per apparato digerente si intende quel complesso di organi che vanno dalla bocca all'intestino. Le cellule localizzate sulle pareti secernono sostanze che agiscono sul cibo in modo da renderne possibile l'assorbimento da parte del sangue. L'intestino tenue è abbastanza radiosensibile, lo stomaco e l'esofago lo sono molto meno. I primi effetti del danneggiamento sono secrezione anomala e produzione discontinua di cellule. Le cellule morte possono portare ad occlusioni intestinali. Si possono avere anche ulcerazioni delle pareti con conseguente processo infettivo.

Apparato genitale. Il danneggiamento da radiazioni può avere effetti sia somatici che ereditari. Come effetto somatico si ha la sterilità, permanente o meno (le femmine sono più sensibili dei maschi). Come effetto genetico si possono avere,

come già detto, mutazioni che possono essere trasmesse alla specie nelle generazioni future.

Sistema nervoso. La colonna vertebrale ed i nervi periferici sono più radiosensibile del cervello. L'effetto delle radiazioni sul cervello è di tipo diretto, cioè altera le funzioni piuttosto che la struttura. Per dosi molto elevate si può verificare anche un danno strutturale attraverso una carenza di rifornimento sanguigno (ischemia) conseguente al danno subito dai vasi adduttori.

Tiroide e ghiandole pituitarie e surrenali. Esse regolano il metabolismo basale e sono responsabili del meccanismo della crescita e dello sviluppo del corpo. Il danno alla tiroide o alle altre ghiandole ha quindi conseguenze su tutto l'organismo. La tiroide presenta scarsa radiosensibilità, tranne che allo iodio che, per meccanismi metabolici, si fissa su tale organo.

Occhio. il cristallino è suscettibile di un danno irreversibile conseguente a radiazioni in quanto le sue cellule non si rigenerano. La retina invece è molto meno radiosensibile. Effetto somatico tardivo è la cataratta, che si manifesta in quanto le cellule danneggiate perdono la loro trasparenza e diventando alla fine completamente opache.

Polmoni. I polmoni sono organo costituiti da piccolissime cavità chiamate alveoli, che durante la respirazione si dilatano e si restringono. In danno agli alveoli di regola non avviene per irraggiamento esterno, bensì a seguito di contaminazione interna conseguente ad inalazione di sostanze radioattive (Radon, polveri, vapori) tramite il meccanismo della respirazione. Un danno di questo tipo è detto funzionale e coinvolge tutto l'organismo.

Fegato. Fegato e cistifellea sono poco radiosensibili, pertanto il danneggiamento può essere causato solo da radioisotopi che si concentrano nel fegato (per esempio Au) per irraggiamento interno. Anche in questo caso tutto l'organismo viene coinvolto essendo il danno di tipo funzionale.

Reni. In caso di irradiazione al corpo intero non sembrano sussistere pericoli di gravi alterazioni di funzionamento dei reni.

Cuore e vasi sanguigni. Sono organi molto resistenti alle radiazioni, e possono essere danneggiati solo a seguito di dosi elevatissime.

Cute. I vari strati della pelle mostrano una differente radiosensibilità: il danno è tanto più elevato quanto meno penetranti sono le radiazioni. Di solito comunque la capacità di riparazione del danno nel caso della pelle è elevata. Un leggero danno può portare solo ad un arrossamento, una forte irradiazione può portare invece a neoplasia epiteliale.

Capelli. L'irradiazione può portare ad una perdita temporanea dei capelli, che dopo poche settimane ricominciano a crescere, spesso con caratteristiche diverse.

Ossa. Le cellule delle ossa sono relativamente poco radiosensibili. Alte dosi possono portare ad osteoporosi. Alcuni radioisotopi come lo Stronzio ed il Plutonio, se

introdotti nell'organismo si fissano nel midollo e nel tessuto osseo: in tal caso il danno può essere molto maggiore, con l'insorgenza di leucemia o di osteoneoplasia.

18.5 Elementi di dosimetria delle radiazioni

Tutti gli effetti ed i danni biologici (di origine fisica o chimica) indotti dalle radiazioni direttamente o indirettamente ionizzanti si manifestano quando avviene una cessione di energia alla materia. Per questo motivo si introduce una grandezza, la dose assorbita, che, come vedremo più avanti, coincide sostanzialmente con l'energia assorbita nel mezzo irradiato per unità di massa. Allo scopo di descrivere le varie fasi di trasferimento di energia dalle radiazioni alla materia sono state introdotte anche alcune grandezze fisiche che vengono denominate "grandezze dosimetriche". Per descrivere invece il campo di radiazione sono state introdotte le "grandezze radiometriche". Vediamo adesso le definizioni e le proprietà fondamentali delle principali grandezze fisiche usate, nonché le unità di misura adottate da Sistema Internazionale SI. Poiché però tali unità sono state introdotte soltanto di recente, presenteremo anche le vecchie unità, il cui uso è tuttora molto diffuso (e ancora lo sarà probabilmente per parecchi anni).

Attività

L'attività di una sorgente è definita, come già sappiamo, come il numero di disintegrazioni per unità di tempo:

$$a = \frac{dN}{dt} \quad a = N \cdot \lambda$$

dove N è il numero di nuclidi presenti nella sorgente e λ la sua costante di decadimento

l'unità di misura è il Becquerel (simbolo Bq)

$$1 \text{ Bq} = 1 \text{ s}^{-1}$$

la vecchia unità di misura era il Curie (simbolo Ci)

$$1 \text{ Ci} = 3.7 \cdot 10^{10} \text{ disintegrazioni per secondo} = 3.7 \cdot 10^{10} \text{ Bq}$$

Attività specifica

E' definita come il numero di disintegrazioni per unità di tempo e per unità di massa

$$a_m = \frac{d^2 N}{dt dm}$$

Si misura in Bq/kg, ma unità altrettanto usate sono il Bq/g o il Ci/g.

Per un dato nuclide allo stato puro si ha:

$$a_m = \lambda \cdot N_0 / A$$

dove N_0 è al solito il numero di Avogadro ed A peso atomico.

Fluenza (o flusso) di radiazione

E' definito come il numero di particelle che attraversa una sezione unitaria.

$$\Phi = \frac{dN}{da}$$

Si esprime in particelle per metro quadro e la sua unità di misura è: m^{-2}

Intensità di fluena (o intensità di flusso) di radiazione

E' definito come il numero di particelle che attraversa una sezione unitaria nell'unità di tempo:

$$\Phi = \varphi = \frac{d^2 N}{da dt}$$

Si esprime in particelle per metro quadro per secondo, l'unità di misura è: $m^{-2}s^{-1}$

Fluena (o flusso) di energia

E' definito come l'energia totale che attraversa una sezione unitaria.

$$\Psi = \frac{dE}{da}$$

dove dE rappresenta l'energia totale trasportata dalla radiazione, esclusa l'energia a riposo delle particelle che attraversano la sezione da.

Si esprime in Joule per metro quadro e la sua unità di misura è: $J \cdot m^{-2}$

Intensità di fluena (o intensità di flusso) di energia

E' definito come l'energia totale che attraversa una sezione unitaria nell'unità di tempo

$$\dot{\Psi} = \psi = \frac{d^2 E}{da dt}$$

dove dE rappresenta l'energia totale trasportata dalla radiazione, esclusa l'energia a riposo delle particelle che attraversano la sezione da.

Si esprime in Joule per metro quadro per secondo, oppure in Watt per metro quadro e la sua unità di misura è: $W \cdot m^{-2}$.

18.6 Grandezze dosimetriche.

Vediamo ora di definire alcune grandezze dosimetriche che ci saranno utili nel seguito per quantificare i rischi dovuti alle radiazioni ionizzanti e fare calcoli di radioprotezione.

I processi di ionizzazione ed eccitazione degli atomi e delle molecole associati al passaggio delle radiazioni ionizzanti nella materia sono all'origine degli effetti indotti osservati nei mezzi attraversati. Nel caso dell'organismo vivente il trasferimento di energia dalle particelle ionizzanti ai vari tessuti ed organi irradiati può concludersi con la manifestazione di un certo effetto biologica. Poiché tutti gli effetti fisici, chimici e di conseguenza anche biologici, indotti dalle radiazioni si manifestano soltanto quando avviene una cessione di energia alla materia, si è tentato di risolvere il problema nel modo più elementare mediante l'introduzione di una quantità, la dose assorbita, che coincide praticamente con l'energia assorbita per unità di massa del mezzo irradiato. La misura o il calcolo della dose assorbita costituiscono il principale obiettivo della dosimetria. Allo scopo di descrivere le varie fasi dei processi di trasferimento di energia delle particelle alla materia sono state introdotte in dosimetria altre grandezze fisiche, comunemente dette grandezze dosimetriche, che vedremo nel seguito.

Tutte le misure delle grandezze dosimetriche devono essere effettuate in particolari condizioni sperimentali: deve essere rispettata cioè la condizione di equilibrio di radiazione. Si parla di equilibrio di radiazione in un certo punto di un mezzo irradiato quando il valore dell'energia radiante che entra in un volumetto infinitesimo centrato attorno al punto è uguale a quello dell'energia radiante che ne esce. La condizione di equilibrio di radiazione è fondamentale per quanto illustrato in figura 18.2.

Una misura della dose assorbita in P viene eseguita con uno strumento il cui volume sensibile ha necessariamente dimensioni finite e non deve perturbare il campo di radiazione che sta misurando. Questo avviene solo se in media l'energia depositata all'interno del volumetto da parte di particelle secondarie generate al di fuori del volumetto è compensata dall'energia che particelle generate all'interno del volumetto depositano all'esterno. In caso contrario la lettura dello strumento fornisce evidentemente un valore errato, che non corrisponde alla dose dovuta al campo radiante imperturbato attorno al punto P.

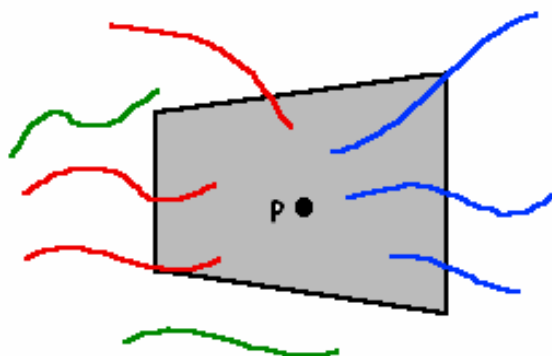


Fig. 18.2 schematizzazione della condizione di equilibrio elettronico

18.7 Esposizione

L'esposizione è la più antica delle grandezze dosimetriche e fu a suo tempo introdotta per descrivere la capacità dei raggi X di produrre ionizzazione in aria. Essa è definita come:

$$X = \frac{dQ}{dm}$$

dove dQ è il valore assoluto della carica totale degli ioni di uno stesso segno prodotti in aria quando tutti gli elettroni liberati dai fotoni nell'elemento di massa dm sono completamente fermati in aria. L'Esposizione è definita solo per fotoni, non per particelle cariche o neutroni. Nel SI l'unità di misura dell'Esposizione è il $C \cdot kg^{-1}$. Questa unità è tuttavia scarsamente usata in pratica, dove si preferisce servirsi ancora della vecchia unità, il Roentgen (simbolo R) il cui valore esatto è:

$$1R = 2.58 \cdot 10^{-4} C \cdot kg^{-1}$$

L'intensità di esposizione è a sua volta definita come:

$$\dot{X} = \frac{dX}{dt}$$

e si esprime in $A \cdot kg^{-1}$ nel SI, ma più comunemente in $R \cdot s^{-1}$ oppure in $R \cdot h^{-1}$ con i suoi sottomultipli il più usato dei quali è il $mR \cdot h^{-1}$.

Quando si effettuano misure di esposizione è sempre necessario che nel volume di misura siano verificate le condizioni di equilibrio delle particelle cariche. Siccome tali condizioni si riescono in pratica ad ottenere solo per fotoni di energia non troppo elevata (il range degli elettroni secondari aumenta con l'energia dei fotoni), è fissato convenzionalmente a 3 MeV la massima energia di fotone per la quale ha senso parlare di esposizione. L'esposizione è quindi una grandezza utilizzabile in un ambito assai limitato, riguardando solo un tipo di radiazione (raggi X e fotoni) per di più in un range ristretto di energia.

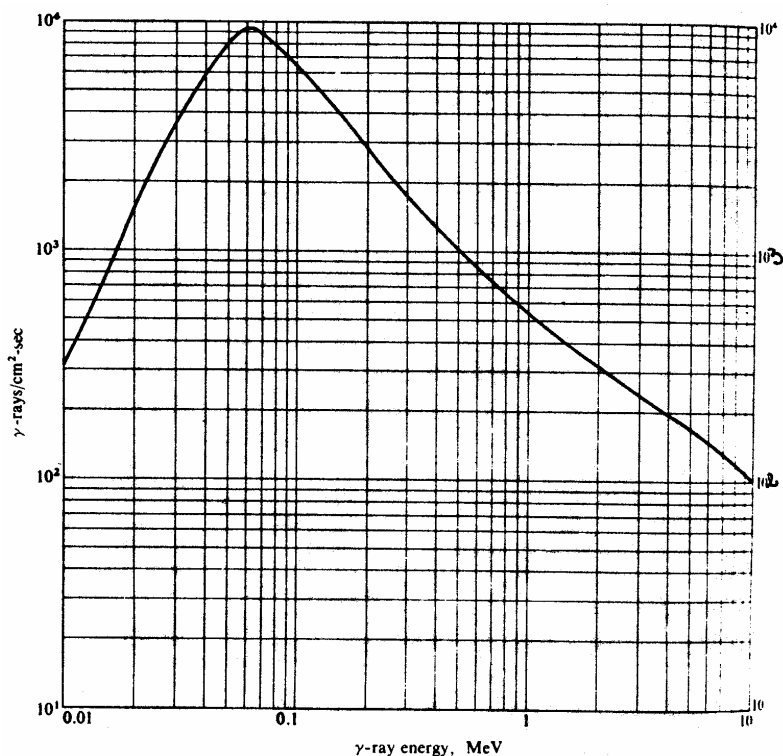


Fig. 18.3 intensità di fluenza di fotoni ($cm^{-2} \cdot s^{-1}$) di energia E_{γ} corrispondente ad una intensità di Esposizione pari ad 1 mR/h

Tuttavia, a causa della sua enorme diffusione, dovuta ad abitudini ormai radicate tra gli operatori di radioprotezione e alla semplicità concettuale della strumentazione di misura, l'Esposizione è una delle grandezze dosimetriche più

utilizzate. Supponiamo di avere un fascio di fotoni di fluena $\Phi = \frac{dN}{da}$ e di energia

$h\nu$. Vediamo di ricavare l'Esposizione $X = \frac{dQ}{dm}$

$dm = \rho \cdot dV = \rho \cdot da \cdot dx$, essendo a l'area del fascio e x lo spessore del volume d'aria.

Se immaginiamo che nel volumetto dm interagiscano dN fotoni e che ciascuno depositi una energia dE , la carica dQ generata è data da:

$$dQ = e \cdot dN \cdot dE/w$$

dove dE rappresenta l'energia impartita dal fascio di fotoni agli elettroni secondari e w l'energia media spesa per ionizzare una molecola d'aria

$$\text{Sostituendo: } X = \frac{dQ}{dm} = \frac{1}{\rho} \frac{e}{w} \frac{dN dE}{da dx}$$

Ma, per definizione di coefficiente di assorbimento μ_{en} : $E(x) = E_0 \cdot e^{-\mu_{en}x}$

$$\left| \frac{dE}{dx} \right| = \mu_{en} E_0 \cdot e^{-\mu_{en}x} = \mu_{en} E$$

Notando infine che $\Phi = \frac{dN}{da}$, alla fine possiamo scrivere:

$$X = \frac{dQ}{dm} = \frac{e}{w} \left(\frac{\mu_{en}}{\rho} \right) E \Phi \quad \text{e derivando rispetto al tempo:}$$

$$\dot{X} = \frac{e}{w} \left(\frac{\mu_{en}}{\rho} \right) h\nu \frac{d\Phi}{dt} = \frac{e}{w} \left(\frac{\mu_{en}}{\rho} \right) E \varphi$$

dove φ è il numero di fotoni per unità di tempo e di superficie.

In base a questa relazione è stata ricavata la curva riportata in figura 18.3

Essa rappresenta, per varie energie il numero di fotoni per cm^2 e per secondo (intensità di fluena) necessario per ottenere l'Esposizione di 1 mR/h

Poiché $w_{aria} = 34 \text{ eV}$ ed $e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, se esprimiamo l'energia dei fotoni in MeV, la fluena in $cm^{-2} \cdot s^{-1}$ e il coefficiente di assorbimento massico in cm^2/g , si ottiene la seguente utile relazione:

$$\dot{X} = 0.0659 \cdot \left(\frac{\mu_{en}}{\rho} \right) E_{\gamma} \varphi_{\gamma} \quad [\text{mR/h}]$$

Un caso particolare è costituito dalle sorgenti gamma. In questo caso si fa uso della cosiddetta costante gamma specifica Γ , definita tramite la seguente relazione:

$$\dot{X} = \Gamma \cdot \frac{A}{d^2}$$

dove A è l'attività della sorgente e d la distanza dalla sorgente. l'intensità di esposizione \dot{X} risulta infatti proporzionale all'attività ed inversamente proporzionale alla distanza. La costante Γ , caratteristica per ogni radionuclide, si esprime in $R \cdot m^2 \cdot h^{-1} \cdot Ci^{-1}$ oppure in $R \cdot m^2 \cdot h^{-1} \cdot Bq^{-1}$. In tabella 18.1 sono riportati i valori della costante Γ per i principali radionuclidi espressi nelle nuove (SI) e vecchie unità di misura.

Si verifica facilmente che, per un certo radionuclide emettitore di fotoni di energie E_i (MeV), ciascuna con probabilità p_i , il valore di Γ è dato dalla relazione:

$$\Gamma = 19.54 \cdot \sum_i \left(\frac{\mu_{en}}{\rho} \right)_i p_i E_i$$

dove il coefficiente di assorbimento massico espresso in cm^2g^{-1} .

Tabella 2.II – Costante gamma specifica Γ per alcuni radionuclidi

Radio-nuclide	Tempo di dimezzamento	Energia dei fotoni (MeV)	Probabilità di emissione	$\Gamma \left(10^{-18} \frac{\text{Cm}^2}{\text{kg s Bq}} \right)$	$\Gamma \left(\frac{\text{Rm}^2}{\text{hCi}} \right)$																																																										
22-Na	2,6 anni	0,511	1,800	2,30	1,192																																																										
		1,275	1,000			41-A	1,83 ore	1,293	0,990	1,27	0,660	54-Mn	297 giorni	0,835	1,000	0,90	0,468	60-Co	5,23 anni	1,173	1,000	2,50	1,298	1,332	1,000	85-Kr	10,15 anni	0,514	0,0041	0,0023	0,0012	137-Cs	29,9 anni	0,662	0,858	0,62	0,323	113-Xe	5,36 giorni	0,081	0,370	0,027	0,0142	198-Au	2,70 giorni	0,412	0,950	0,44	0,231	0,676	0,010	1,088	0,002	226-Ra	1608 anni	0,186	0,040	0,0073	0,0038	0,260	0,00007	226-Ra + prodotti di decadimento (incapsulato con 0,5 mm di platino)	
41-A	1,83 ore	1,293	0,990	1,27	0,660																																																										
54-Mn	297 giorni	0,835	1,000	0,90	0,468																																																										
60-Co	5,23 anni	1,173	1,000	2,50	1,298																																																										
		1,332	1,000			85-Kr	10,15 anni	0,514	0,0041	0,0023	0,0012	137-Cs	29,9 anni	0,662	0,858	0,62	0,323	113-Xe	5,36 giorni	0,081	0,370	0,027	0,0142	198-Au	2,70 giorni	0,412	0,950	0,44	0,231	0,676	0,010	1,088	0,002	226-Ra	1608 anni	0,186	0,040	0,0073	0,0038	0,260	0,00007	226-Ra + prodotti di decadimento (incapsulato con 0,5 mm di platino)				1,59	0,825 $\left(\frac{\text{Rm}^2}{\text{hg}} \right)$																
85-Kr	10,15 anni	0,514	0,0041	0,0023	0,0012																																																										
137-Cs	29,9 anni	0,662	0,858	0,62	0,323																																																										
113-Xe	5,36 giorni	0,081	0,370	0,027	0,0142																																																										
198-Au	2,70 giorni	0,412	0,950	0,44	0,231																																																										
		0,676	0,010																																																												
		1,088	0,002																																																												
226-Ra	1608 anni	0,186	0,040	0,0073	0,0038																																																										
		0,260	0,00007																																																												
226-Ra + prodotti di decadimento (incapsulato con 0,5 mm di platino)				1,59	0,825 $\left(\frac{\text{Rm}^2}{\text{hg}} \right)$																																																										

Tab. 18.1 La costante Γ per i principali radionuclidi

18.8 Dose assorbita

Questa è la più importante grandezza dosimetrica. Essa è definita come segue:

$$D = \frac{d\varepsilon}{dm}$$

dove dm è la massa di materia alla quale la radiazione cede l'energia $d\varepsilon$.

ε rappresenta la grandezza l'energia media impartita, definita come segue. Se consideriamo un volumetto di un mezzo irradiato da particelle direttamente o indirettamente ionizzanti che lo attraversano, abbiamo: $\varepsilon = R_{in} - R_{out} + \Sigma Q$

dove R_{in} rappresenta l'energia radiante incidente nel volume considerato, cioè la somma di tutte le energie (escluse quelle di quiete) di tutte le particelle direttamente ed indirettamente ionizzanti che entrano nel volume considerato, R_{out}

rappresenta l'energia radiante uscente dal volume considerato, cioè la somma di tutte le energie (escluse quelle di quiete) di tutte le particelle direttamente ed indirettamente ionizzanti che ne escono, e ΣQ la somma di tutte le energie liberate, diminuita della somma di tutte le energie consumate in ogni trasformazione di nuclei e particelle elementari avvenuta in tale volume (in pratica ΣQ rappresenta l'energia spesa per aumentare la massa del sistema). L'energia impartita è una grandezza stocastica, soggetta a fluttuazioni casuali ed ha quindi senso considerarne il valor medio.

Accanto alla dose assorbita si definisce l'intensità di dose assorbita:

$$\dot{D} = \frac{dD}{dt}$$

Nel SI la dose assorbita si misura in gray (Gy), dove $1\text{Gy} = 1\text{J/kg}$ e l'intensità di dose in Gy/s. Tuttavia ancora molto usata è la vecchia unità di misura, il rad. Il rad era definito pari a 100 erg/g , pertanto:

$$1\text{ rad} = 10^2\text{ erg/g} = 10^{-2}\text{ Gy} \quad \text{e viceversa} \quad 1\text{ Gy} = 10^2\text{ rad}$$

Senza scendere nei dettagli, vediamo come si calcola la dose assorbita nel caso di particelle cariche (non elettroni, in quanto le perdite di energia per irraggiamento complicano il calcolo della energia depositata) e di fotoni in due semplicissimi esempi, cioè nel caso di fluenze uniformi di particelle monocromatiche. L'elemento di massa dm si può al solito esprimere nel seguente modo: $dm = \rho \cdot dV = \rho \cdot da \cdot dx$

Nel caso di particelle cariche, nel volumetto incidono dN/da particelle per unità di superficie, ciascuna di energia E . Ognuna di esse depositerà in media nello spessore dx una energia pari a $dE = \frac{dE}{dx} dx$.

Pertanto l'energia totale $d\varepsilon$ depositata dal fascio di particelle sarà data da:

$$d\varepsilon = dE \cdot dN$$

e in conclusione:

$$D = \frac{d\varepsilon}{dm} = \frac{dE dN}{\rho dx da} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{dE}{dx} \right) \cdot \Phi; \quad \dot{D} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{dE}{dx} \right) \cdot \frac{d\Phi}{dt} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{dE}{dx} \right) \cdot \dot{\Phi}$$

Nel caso di fotoni monocromatici di energia E_γ si ha ancora che: $d\varepsilon = dE \cdot dN$

dove questa volta: $dE = \mu_{en} \cdot E_\gamma \cdot dx$. Sostituendo si ottiene:

$$D = \frac{d\varepsilon}{dm} = \frac{dE dN}{\rho dx da} = \frac{\mu_{en} E_\gamma dN}{\rho da} = \left(\frac{\mu_{en}}{\rho} \right) E_\gamma \Phi; \quad \dot{D} = \left(\frac{\mu_{en}}{\rho} \right) E_\gamma \frac{d\Phi}{dt} = \left(\frac{\mu_{en}}{\rho} \right) E_\gamma \dot{\Phi}$$

numericamente, se esprimiamo Φ in cm^{-2} , $\dot{\Phi}$ in $\text{cm}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$ ed E in MeV, abbiamo:

$$D = 1.6 \cdot 10^{-10} \left(\frac{\mu_{en}}{\rho} \right) E_\gamma \Phi_\gamma \text{ [Gy]}; \quad D = 1.6 \cdot 10^{-8} \left(\frac{\mu_{en}}{\rho} \right) E_\gamma \Phi_\gamma \text{ [rad]}$$

$$\dot{D} = 5.76 \cdot 10^{-4} \left(\frac{\mu_{en}}{\rho} \right) E_\gamma \dot{\Phi}_\gamma \text{ [mGy/h]}; \quad \dot{D} = 5.76 \cdot 10^{-2} \left(\frac{\mu_{en}}{\rho} \right) E_\gamma \dot{\Phi}_\gamma \text{ [mrad/h]}$$

Se le particelle incidenti non sono monocromatiche si avrà rispettivamente:

$$D = \frac{d\varepsilon}{dm} = \int_{\text{spettro}} \left(\frac{1}{\rho} \frac{dE}{dx} \right) \cdot \frac{d\Phi}{dE} dE \quad \text{per particelle cariche}$$

$$D = \frac{d\varepsilon}{dm} = \int_{\text{spettro}} \left(\frac{\mu_{en}}{\rho} \right) E \cdot \frac{d\Phi}{dE} dE \quad \text{per fotoni.}$$

Relazione tra Esposizione e dose assorbita

In aria la relazione è molto semplice. Infatti, essendo:

$$D_{\text{aria}} = \left(\frac{\mu_{en}}{\rho} \right)_{\text{aria}} E_{\gamma} \Phi \quad e \quad X = \frac{e}{w_{\text{aria}}} \left(\frac{\mu_{en}}{\rho} \right)_{\text{aria}} E_{\gamma} \Phi, \quad \text{si ha:}$$

$$X = \frac{e}{w_{\text{aria}}} \cdot D_{\text{aria}}, \quad \text{ossia:} \quad D_{\text{aria}} = \frac{w_{\text{aria}}}{e} \cdot X$$

Poiché $w_{\text{aria}} = 34 \text{ eV}$ ed $e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, numericamente si ha che:

$$1R \Leftrightarrow 0.87 \text{ rad} \quad \text{o anche:} \quad 1R \Leftrightarrow 8.7 \cdot 10^{-3} \text{ Gy} = 8.7 \text{ mGy}$$

Allora:

$$D_{\text{aria}} [\text{Gy}] = 8.74 \cdot 10^{-3} \cdot X [R] \quad D_{\text{aria}} [\text{rad}] = 0.874 \cdot X [R]$$

$$\dot{D}_{\text{aria}} [\text{mGy/h}] = 8.74 \cdot 10^{-3} \cdot X [\text{mR/h}] \quad \dot{D}_{\text{aria}} [\text{mrad/h}] = 0.874 \cdot X [\text{mR/h}]$$

Se si ha lo stesso fascio in due mezzi diversi:

$$D_1 = \left(\frac{\mu_{en}}{\rho} \right)_1 E_{\gamma} \Phi \quad D_2 = \left(\frac{\mu_{en}}{\rho} \right)_2 E_{\gamma} \Phi \quad \text{e quindi:}$$

$$D_2 = D_1 \frac{(\mu_{en}/\rho)_2}{(\mu_{en}/\rho)_1}$$

Quest'ultima relazione è utilissima quando, da una misura di Esposizione (necessariamente in aria) si vuol passare ad una misura di dose in un materiale M qualsiasi:

$$D_M = D_{\text{aria}} \frac{(\mu_{en}/\rho)_M}{(\mu_{en}/\rho)_{\text{aria}}} = X \frac{w_{\text{aria}}}{e} \frac{(\mu_{en}/\rho)_M}{(\mu_{en}/\rho)_{\text{aria}}}$$

Numericamente:

$$D_M [\text{Gy}] = 8.74 \cdot 10^{-3} \frac{(\mu_{en}/\rho)_M}{(\mu_{en}/\rho)_{\text{aria}}} \cdot X [R]$$

$$D_M [\text{rad}] = 0.874 \cdot \frac{(\mu_{en}/\rho)_M}{(\mu_{en}/\rho)_{\text{aria}}} \cdot X [R]$$

con le analoghe relazioni per le intensità di dose. In generale si può scrivere:

In generale si può scrivere:

$$D_M = f_M \cdot X \quad e \quad \dot{D}_M = f_M \cdot \dot{X}$$

dove in f_M è contenuta tutta la dipendenza dal materiale. In figura 18.4 è riportato il grafico della grandezza (vedi anche, per un maggior dettaglio, tab. 18.6)

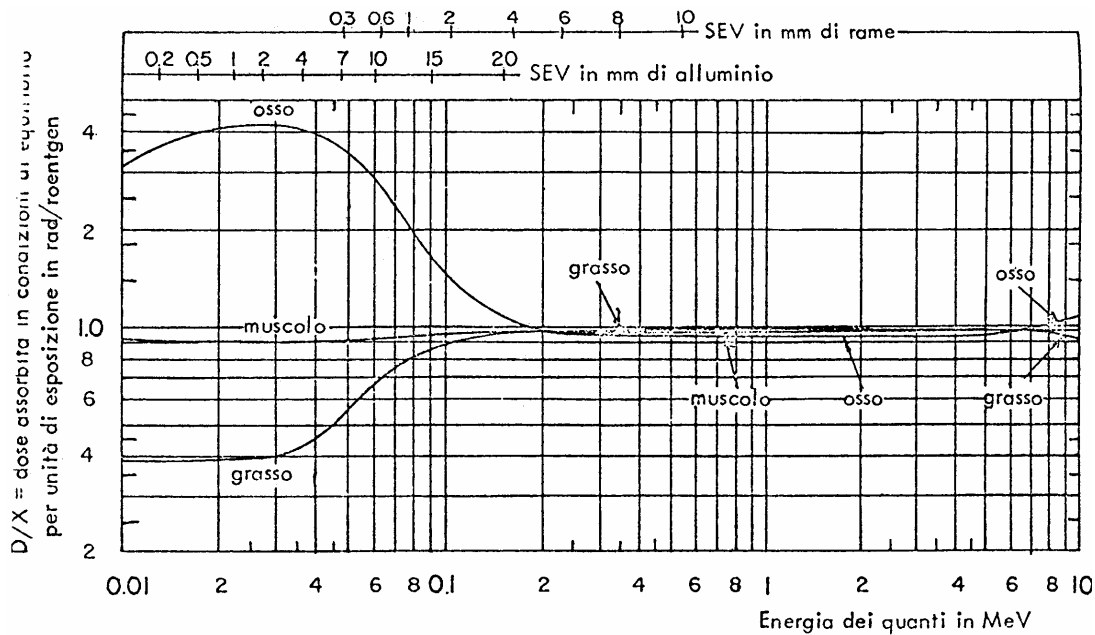


Fig. 18.4 Andamento di f_M per i principali tessuti organici in funzione dell'energia

18.9 Il Kerma

Il processo di trasferimento di energia al mezzo da parte delle radiazioni indirettamente ionizzanti avviene sostanzialmente in due fasi successive. Nella prima la radiazione primaria mette in moto i secondari carichi. Nella seconda questi ultimi depositano l'energia attraverso le collisioni che subiscono nel mezzo. La dose assorbita è stata introdotta per tener conto dell'effetto finale di questi processi. Per descrivere invece solo la prima fase si introduce un'altra grandezza, il kerma, il cui nome significa "kinetic energy released in matter". Il kerma è definito come:

$$K = \frac{dE_{tr}}{dm} \quad (\text{e la relativa intensità di kerma come: } \dot{K} = \frac{dK}{dt})$$

dove dE_{tr} è la somma di tutte le energie cinetiche iniziali di tutte le particelle cariche prodotte da particelle indirettamente ionizzanti in un volumetto di massa dm . Nel termine dE_{tr} è anche compresa l'energia che le particelle cariche secondarie irradiano sotto forma di bremsstrahlung.

Abbiamo in questa sede introdotto il kerma essenzialmente perché rappresenta una utile grandezza che descrive il campo di radiazione neutronico. Le interazioni dei neutroni con la materia in letteratura sono descritte in termini appunto di kerma. Senza scendere in maggior dettaglio aggiungiamo solo che, in condizioni di equilibrio di radiazione, risulta: $K = D$

Ossia il kerma coincide con la dose assorbita. Noi nel seguito assumeremo valida questa relazione e quindi dedurremo la dose assorbita (soprattutto per i neutroni) dal valore del kerma.

Nei grafici di figura 18.5 è riportata schematicamente la relazione tra Esposizione, kerma e dose assorbita nel caso di fotoni in funzione della profondità nel tessuto:

nella figura di sinistra si trascura l'attenuazione del fascio nel mezzo, mentre in quella di destra se ne tiene conto. Dopo una zona iniziale nella quale, in mancanza di equilibrio di radiazione, kerma e dose assorbita sono notevolmente diversi, le due grandezze essenzialmente coincidono. Da notare che la zona di non equilibrio, indicate nelle figure con il termine "buildup", è dell'ordine del range delle particelle cariche secondarie prodotte dai fotoni incidenti e vale quindi, al più, qualche millimetro.

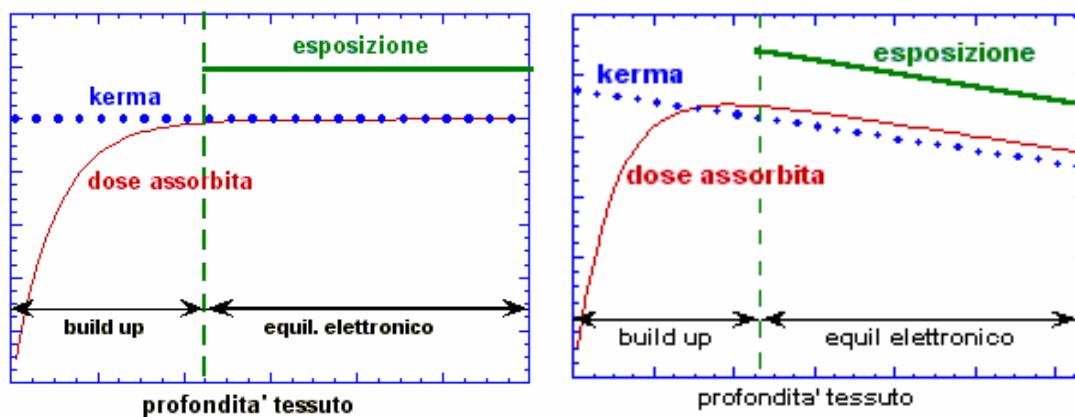


Fig. 18.5 relazione tra Esposizione, kerma e dose assorbita nel caso di fotoni

18.10 Gli indicatori del rischio da radiazioni ionizzanti

Finora abbiamo definito e descritto le grandezze dosimetriche in forma del tutto generale, senza mai tentare di legare la dose assorbita all'eventuale danno biologico ad essa associato. Abbiamo anche visto all'inizio di questo capitolo come l'esposizione alle radiazioni ionizzanti comporti rischi di effetti sanitari per gli esseri viventi: dobbiamo quindi definire una grandezza dosimetrica che in qualche modo sia rappresentativa di questi rischi. Gli effetti sanitari indotti sull'uomo vengono distinti in effetti somatici ed effetti genetici, a seconda che si manifestino sull'individuo esposto o sui suoi discendenti. Gran parte degli effetti somatici sono di tipo non stocastico. La loro gravità è in relazione alla dose assorbita nell'organo o tessuto di interesse e per ciascun effetto esiste un valore di soglia della dose assorbita soltanto superato il quale esso si manifesta. I valori delle dosi corrispondenti alle varie soglie sono sempre piuttosto elevati e conosciuti in genere con accettabile accuratezza. Tutti gli effetti genetici ed i più importanti effetti somatici (leucemia, carcinogenesi) hanno invece un carattere stocastico. Essi sono cioè caratterizzati da una probabilità di accadimento funzione della dose ricevuta, e dall'assenza di un valore di soglia sotto il quale l'effetto non si manifesta. Allo scopo di assicurare la protezione degli individui esposti, della loro progenie e del genere umano nel suo insieme dagli eventuali danni che potrebbero derivare dallo svolgimento delle attività con rischio da radiazioni ionizzanti si è

andata sviluppando, parallelamente all'uso delle tecnologie nucleari, una disciplina relativamente nuova, la radioprotezione. Un ruolo fondamentale nella formulazione dei principi generali cui si ispira la radioprotezione viene svolto dalla "International Commission on Radiation Protection", l'ICRP, un Organismo sovranazionale sorto in occasione del II congresso Internazionale di Radiologia tenutosi a Stoccolma nel 1928. L'autorevolezza di questa Organizzazione è tale che le legislazioni di tutti i Paesi del mondo finiscono sempre con l'adeguarsi alle sue raccomandazioni. Anche le Direttive della Comunità Europea sono formulate sulla base delle periodiche raccomandazioni dell'ICRP.

18.11 Equivalente di dose

Nessuna delle grandezze dosimetriche presentate finora (dose assorbita, kerma, esposizione) è per sua natura idonea ad interpretare in modo completo gli effetti provocati dal trasferimento di energia dalle radiazioni ionizzanti alla materia vivente. Esse non consentono di tener conto della diversità degli effetti biologici indotti da radiazioni di diversa qualità. La più importante delle grandezze radioprotezionistiche è l'equivalente di dose, per mezzo del quale la dose assorbita viene ponderata con un opportuno fattore correttivo per tener conto della qualità della radiazione. L'equivalente di dose, H , in un certo punto di un tessuto irradiato è definito come:

$$H = D \cdot Q \quad \dot{H} = \frac{dH}{dt} = \dot{D} \cdot Q$$

Dove D è la dose assorbita e Q il fattore qualità della radiazione. Il fattore qualità serve a tener conto della distribuzione dell'energia assorbita a livello microscopico ed è quindi il parametro per mezzo del quale si prende in considerazione la diversa qualità della radiazione. Poiché tale distribuzione dipende dalla natura e dalla velocità delle particelle cariche che liberano la dose, essa può essere caratterizzata attraverso la grandezza fisica denominata LET

Il LET (Linear Energy Transfer) è definito soltanto per particelle cariche e rappresenta l'energia dE dissipata dalle particelle nel tratto $d\ell$ mediante collisioni che comportano trasferimenti di energia inferiori ad un determinato valore prefissato Δ .

Si scrive pertanto:

$$L_{\Delta} = \left(\frac{dE}{d\ell} \right)_{\Delta}$$

Ovviamente se si prendono in considerazione tutte le perdite di energia possibili da parte della particella, Δ coincide con l'energia cinetica della particella: il LET si indica (impropriamente) con il simbolo L_{∞} e coincide con il potere frenante lineare da collisione di una particella carica:

$$L_{\infty} = \left(\frac{dE}{dx} \right)_{\text{coll}}$$

finora l'ICRP ha raccomandato i valori di Q servendosi del LET e, più precisamente del L_{∞} in acqua. I valori numerici prescelti sono riportati nella tabella 18.2 che segue:

L_{∞} in acqua (keV· μm^{-1})	Q
< 3.5	1
7	2
23	5
53	10
>175	20

Tab. 18.2

Per valori intermedi i dati possono essere interpolati come riportato nel grafico di figura 18.6

Nel caso in cui le cessioni di energia avvengano con un certo spettro di valori di L_{∞} , in luogo di Q si dovrà calcolare un opportuno valore efficace \bar{Q} dato da:

$$\bar{Q} = \frac{1}{D} \int Q(L_{\infty}) \cdot D(L_{\infty}) dL_{\infty}$$

Tipo di radiazione	\bar{Q}
Raggi X, raggi gamma ed elettroni	1
Neutroni, protoni e particelle con Z=1 e massa M >1 amu	10
particelle alfa, particelle con Z>2	20

Tab 18.3

Una difficoltà pratica nell'applicazione del calcolo integrale sta nel fatto che solo raramente sono disponibili informazioni sulla distribuzione della dose assorbita in funzione del L_{∞} .

In questo caso sono di aiuto la tabella ed i grafici sotto riportati nelle figure 18.7 e 18.8

L'unità di misura dell'equivalente di dose è il Sievert (Sv): $1 \text{ Sv} = 1 \text{ Gy} \cdot Q$

La vecchia unità era il rem: $1 \text{ rem} = 1 \text{ rad} \cdot Q$

In pratica per l'equivalente di dose valgono le stesse relazioni trovate per la dose assorbita se il valore di quest'ultima è moltiplicato per il fattore qualità Q

Il calcolo dell'equivalente di dose da neutroni è estremamente complicato e ci si rifà alla tabella 18.4 e all'utilizzo di grafici.

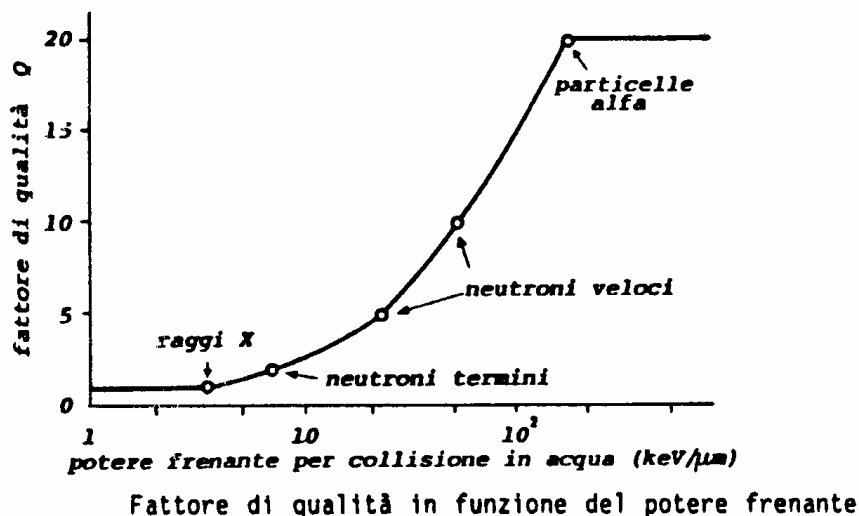


Fig. 18.6 relazione tra potere frenante e fattore qualità Q per varie radiazioni

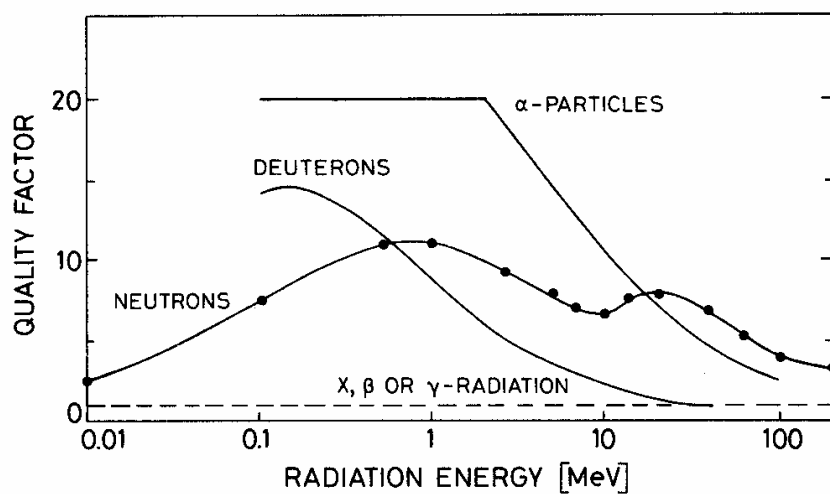


Fig. 18.7 Fattore qualità Q per varie radiazioni in funzione dell'energia

In figura 18.8 è riportato il kerma in tessuto biologico in funzione dell'energia per unità di fluensa dei neutroni. Se ipotizziamo (e in questa sede non possiamo fare altrimenti) di essere in condizioni di equilibrio della radiazione, sappiamo che il kerma coincide con la dose assorbita e quindi $D = K$. L'equivalente di dose risulterà allora: $H = D \cdot Q = K \cdot Q$. Nota l'intensità di fluensa Φ dei neutroni, per ottenere l'intensità di equivalente di dose è sufficiente moltiplicare per Φ il valore del kerma unitario dato dalla figura 18.8.

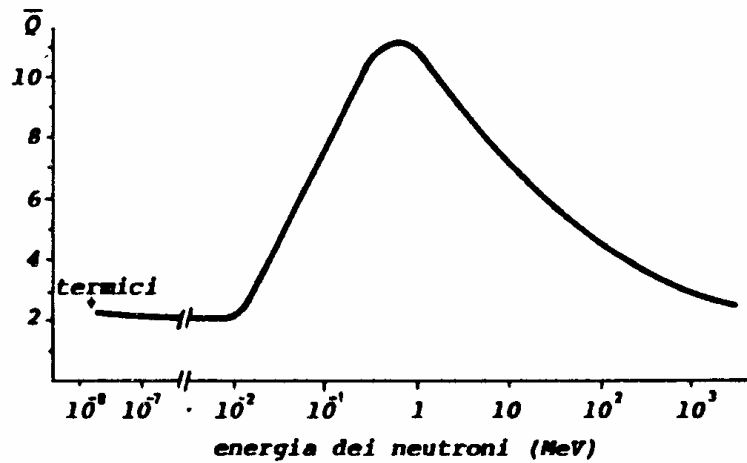


Figura 3. Fattori di qualità efficaci per i neutroni, raccomandati dalla ICRP.

Fig. 18.7 Fattore qualità Q per neutroni in funzione dell'energia

Tab. 6.III. Fattore di qualità efficace per i neutroni di varie energie (dati tratti da ICRP71).

<i>Energia dei neutroni (MeV)</i>	<i>Fattore di qualità efficace</i>
$2.5 \cdot 10^{-8}$ (termici)	2.3
da $1 \cdot 10^{-7}$ a $1 \cdot 10^{-2}$	2
$1 \cdot 10^{-1}$	7.4
$5 \cdot 10^{-1}$	11
1	10.6
2	9.3
5	7.8
10	6.8
20	6.0
50	5.0
$1 \cdot 10^2$	4.4
$2 \cdot 10^2$	3.8
$5 \cdot 10^2$	3.2
$1 \cdot 10^3$	2.8

Tab. 18.4 Fattore qualità dei neutroni in funzione dell'energia

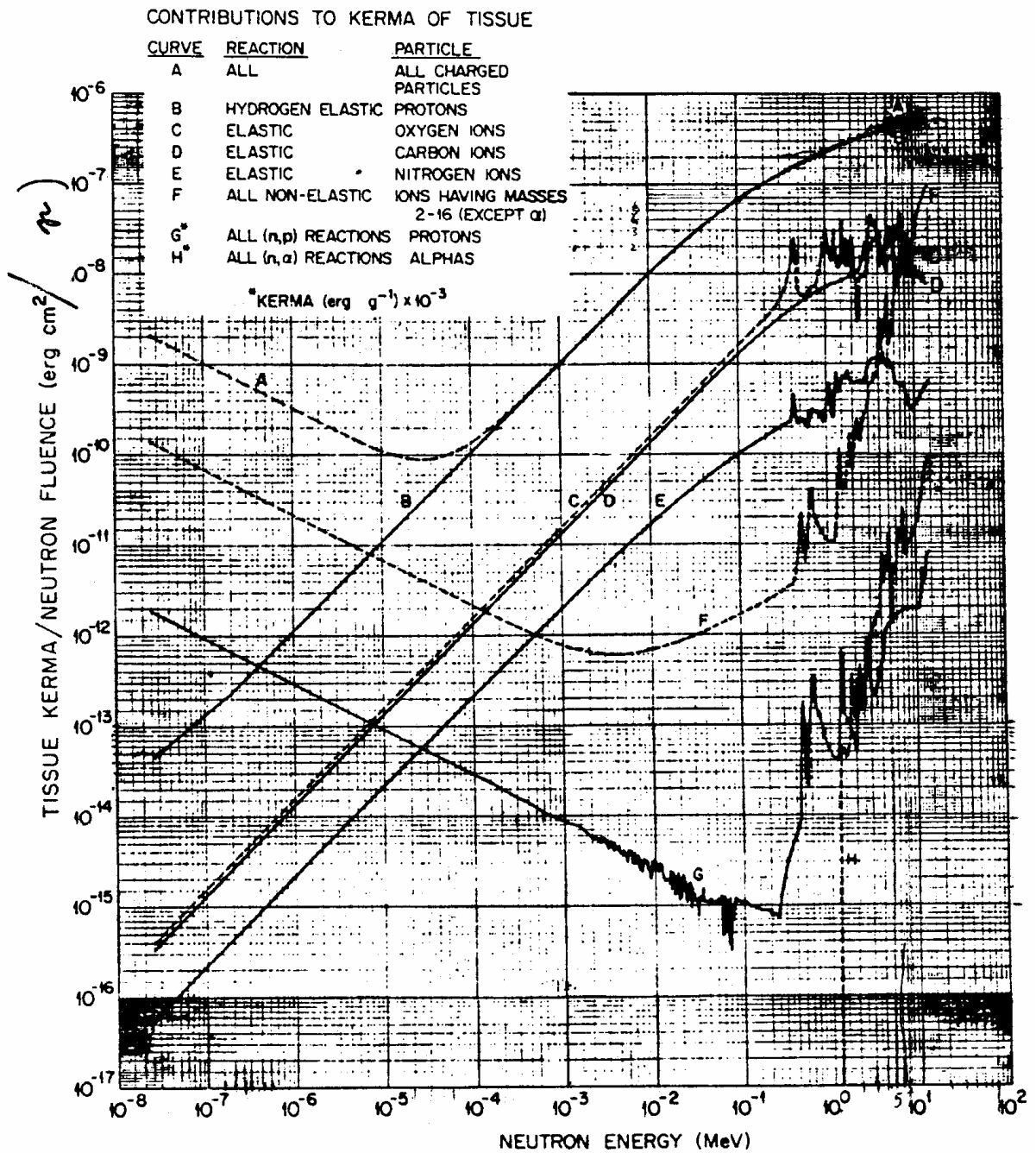


Fig. 18.8 k/Φ kerma al tessuto per unità di fluenza neutronica

Il grafico di figura 18.9 invece fornisce direttamente, nota l'energia dei neutroni, l'intensità di fluenza (in neutroni $\text{cm}^{-2}\cdot\text{s}^{-1}$) corrispondente ad un equivalente di dose H di 1 mrem/h. Se si conosce la vera intensità di fluenza si può determinare il corrispondente valore di H .

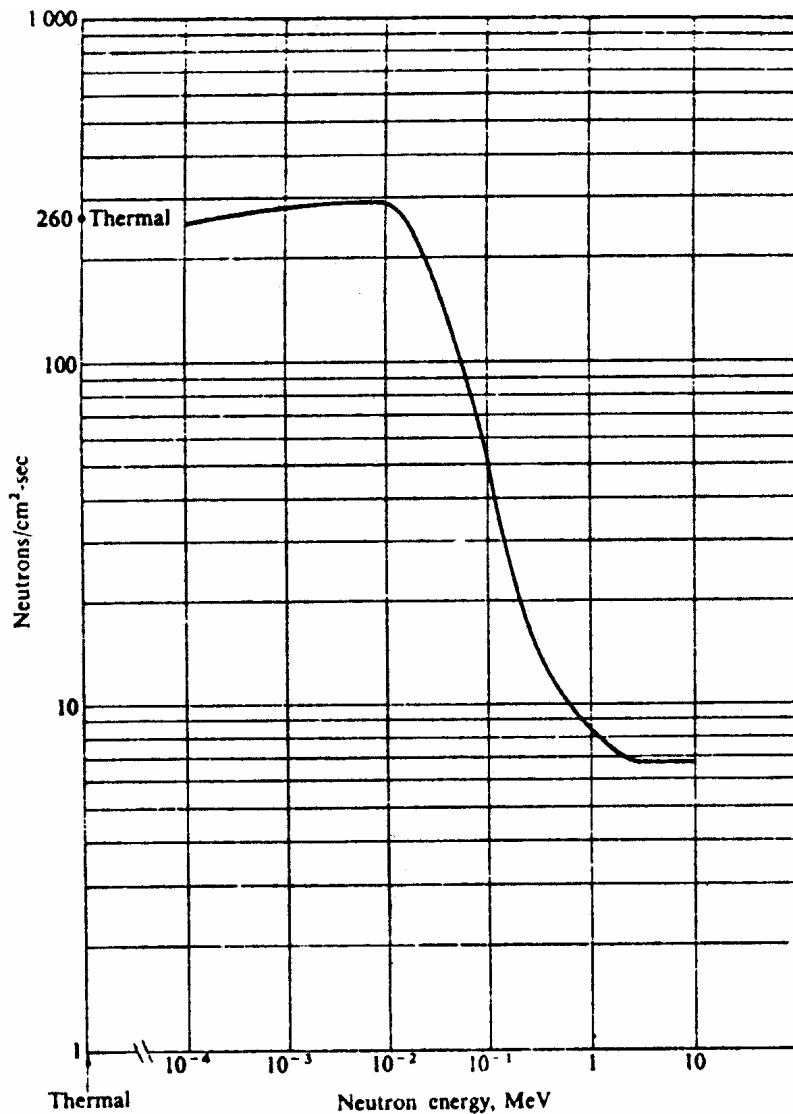


Fig. 18.9 Intensità di fluenza neutronica corrispondente ad $\dot{H} = 1$ mrem/h

7.12 Effetto delle radiazioni sull'uomo. Le principali sorgenti di radiazione

Negli ultimi anni è stato compiuto un considerevole sforzo per determinare gli effetti delle radiazioni sul corpo umano. Poiché non è possibile ovviamente effettuare esperimenti diretti sulla popolazione, la attuale conoscenza degli effetti delle radiazioni è basata sui dati raccolti in occasione di incidenti (Chernobyl per esempio), sui dati che provengono da studi epidemiologici effettuati sui sopravvissuti al bombardamento di Hiroshima e sulle popolazioni esposte alle esplosioni nucleari effettuate a scopi militari, su studi ed esperimenti effettuati su animali da laboratorio. Lo stato attuale di conoscenza in questo campo può essere riassunto come segue:

- esiste una informazione ben documentata sugli effetti di esposizione acuta (cioè limitata nel tempo) ad alte dosi;
- poiché gli effetti, se davvero esistono, sono estremamente rari, esiste una limitata conoscenza per quanto concerne:
 - dosi acute non troppo elevate e non ripetute;
 - basse dosi acute ripetute occasionalmente;
 - bassissime dosi croniche.

Le assunzioni conservative che vengono fatte nel campo della radioprotezione sono le seguenti:

- esiste una relazione lineare dose-effetto per qualsiasi esposizione, da quelle acute a quelle croniche, indipendentemente dalla intensità della dose ricevuta: il danno è proporzionale alla dose integrale assorbita;
- Non vi è alcuna soglia sulla dose da radiazione, al di sopra della quale l'effetto si manifesta, ma al di sotto no;
- tutte le dosi assorbite da un organo sono completamente additive, indipendentemente dal ritmo di assunzione e dagli intervalli temporali tra una assunzione e le successive;
- non vi è alcun meccanismo di recupero o riparo biologico alla radiazioni.

Noi sappiamo che nessuna delle affermazioni precedenti è strettamente corretta, ma esse tuttavia formano un base conservativa su cui stabilire degli standard di radioprotezione. Abbiamo già detto che esistono organismi di controllo, il più importante dei quali è lo ICRP (International Commission on Radiation Protection) che periodicamente stabiliscono gli standard di radioprotezione a cui attenersi. Questi sono basati sul bilancio esistente tra rischi e benefici che derivano dall'uso pacifico dell'energia nucleare.

Prima di esaminare i principi generali del sistema di limitazione delle dosi raccomandato dall'ICRP, ricordiamo le varie sorgenti cui l'uomo è abitualmente esposto:

- sorgenti naturali (raggi cosmici, radionuclidi cosmogenici, radionuclidi primordiali);
- sorgenti naturali modificate dalla tecnologia (materiale da costruzione, viaggi in aereo ad alta quota, combustione del carbon fossile, ecc.);
- sorgenti di alcuni prodotti di consumo (orologi luminescenti, apparecchi televisivi, talune protesi dentarie, taluni vetri per lenti, ecc.);
- sorgenti impiegate in medicina (tubi a raggi X, acceleratori, radioisotopi per diagnostica, radiofarmaci, ecc.);
- sorgenti di ricadute di bombe atomiche (fallout);
- sorgenti associate con la produzione di energia nucleare (estrazione e ritrattamento del combustibile, rilasci delle centrali, riprocessamento del combustibile, rifiuti, ecc.);
- sorgenti presenti sui luoghi di lavoro.

Tab. 8.I. Equivalenti annuali di dose efficace dovuti al fondo naturale nelle aree «normali» (dati tratti da UNSCEAR88).

Sorgente	Equivalente di dose efficace (mSv/anno)		
	Irradiazione esterna	Irradiazione interna	Totale
Raggi cosmici			
Componente dirett. ionizz.	0.30		0.30
Neutroni	0.055		0.055
Radionuclidi cosmogenici		0.015	0.015
Radionuclidi primordiali			
K-40	0.15	0.18	0.33
Rb-87		0.006	0.006
U-238 (serie)	0.10	1.24	1.34
Th-232 (serie)	0.16	0.18	0.34
TOTALE (arrotondato)	0.8	1.6	2.4

Tab. 18.5 Equivalente di dose annuale dovuto al fondo naturale

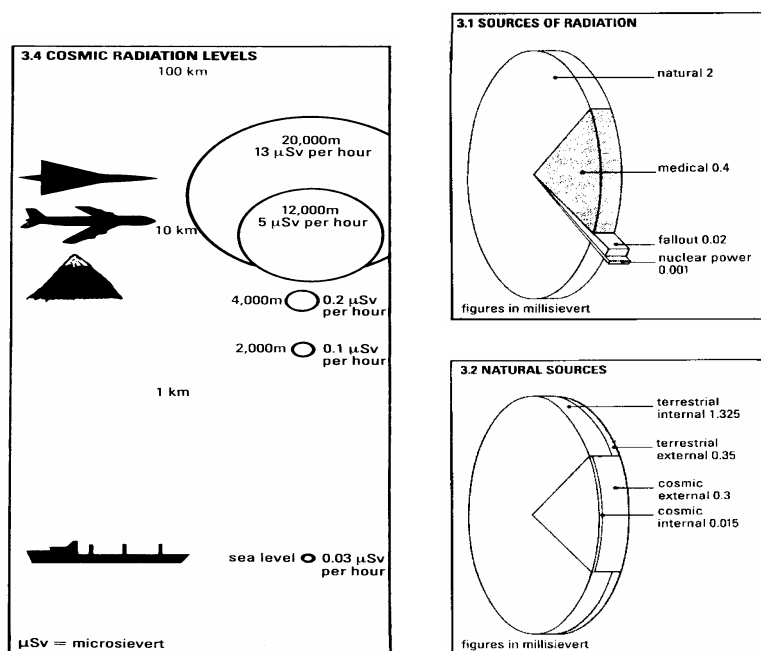


Fig. 18.10 Il fondo delle radiazioni naturali in varie situazioni

Nelle categorie sopra elencate si identificano radionuclidi che danno luogo ad irradiazione esterna ed altri che originano invece irradiazione interna.

La più importante fonte di esposizione per gli esseri umani è certamente il fondo naturale, il cui contributo medio (che varia comunque considerevolmente da luogo a luogo) vale 2.4 mSv/anno (vedi tab. 18.5)

La seconda sorgente di irradiazione della popolazione per ordine di importanza è costituita dalle applicazioni mediche (diagnostica e terapia). A parte le dosi ricevute dai pazienti sottoposti a radioterapia, un contributo notevole

all'equivalente di dose globale deriva, specie nei paesi industrializzati, dalle pratiche radiografiche (vedi tabella 18.6)

Tab. 8.II. Dosi ricevute nei più comuni esami radiografici in vari organi protezionisticamente significativi, secondo calcoli per un fantoccio antropomorfo da 70 kg (dati tratti da ICPR82b).

Esame	Dose nell'organo (mGy)					
	Tiroide	Midollo osseo attivo	Polmone	Gonadi		Mammella
				♂	♀	
Torace	0.065	0.04 (0.03)	0.19 (0.20)	-	-	0.14
Cranio	2.22	0.31	0.02	-	-	-
Rachide cervicale	4.04	0.11	0.14	-	-	-
Costole	1.54	0.49 (0.42)	3.24 (2.96)	-	0.004	4.11
Spalla (una proiezione)	0.58	0.06	0.39 (0.27)	-	-	0.77
Rachide dorsale	0.75	0.43 (0.32)	2.63 (2.65)	-	0.006	2.76
Colecistogramma	0.01	0.66	1.76	-	0.06	-
Rachide lombare	0.003	1.26	1.33	0.07	4.05	-
Porzione sup. tratto G-I	0.07	1.17 (1.14)	5.32 (4.76)	0.004	0.45	0.53
Rene, uretere, vescica	-	0.48	0.12	0.16	2.12	-
Clisma	0.002	2.98	0.48	0.58	7.87	-
Rachide lombosacrale	-	2.24	0.35	0.43	6.40	-
Pielografia intravenosa	-	1.16	0.35	0.49	6.36	-
Bacino	-	0.27	0.011	0.57	1.48	-
Anca (una proiezione)	-	0.17	-	3.68	0.78	-
Rachide in toto (chiroprassi)	2.71	0.35	1.49 (1.17)	0.10	1.00	2.34
Mammografia						
(1) Xeroradiografia	-	(-)	(-)	-	-	7.66
(2) Pellicola-schermo	-	(-)	(-)	-	-	2.12

(-) Trascurabile rispetto agli altri organi.

I dati tra parentesi si riferiscono alla donna se diversi da quelli per l'uomo.

Tab. 18.5 Equivalente di dose associato ai principali esami radiografici

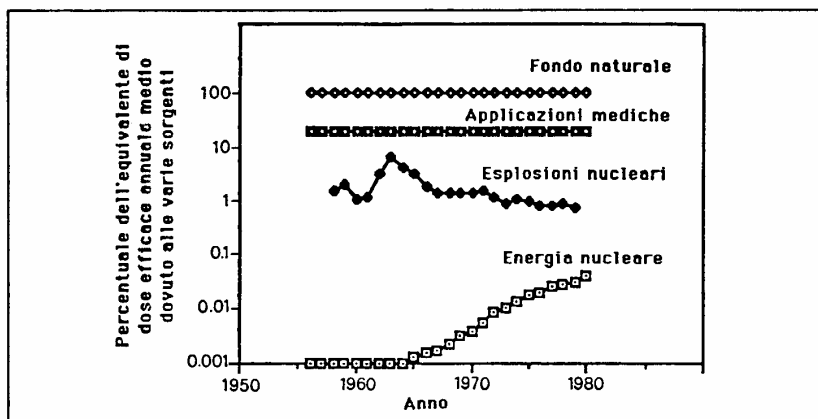


Figura 8.1. Andamento nel tempo dell'equivalente di dose efficace annuale dovuto alle più importanti sorgenti di radiazioni cui è esposta la popolazione mondiale avendo posto uguale a 100 l'esposizione media alle sorgenti naturali (sulla base dei dati UNSCEAR82).

Fig. 18.11 Evoluzione temporale dei più importanti contributi alla dose collettiva

Tutte le altre sorgenti elencate contribuiscono in modo più modesto alle dosi collettive individuali. Nel grafico di figura 18.11 è riportata l'evoluzione nel tempo delle più importanti di esse.

18.13 Le raccomandazioni dell' ICRP

L'ICRP costruisce tutto il suo edificio protezionistico sull'ipotesi di una relazione di tipo lineare senza soglia tra effetti stocastici indotti e dose ricevuta. Tale relazione viene ritenuta cautelativa. Sulla base di questa assunzione è stato ricavato un indice di rischio globale di $1.65 \cdot 10^{-2}$ eventi gravi per Sv ricevuto, separabile nei due contributi di $1.25 \cdot 10^{-2} \text{ Sv}^{-1}$ per la cancerogenesi e $0.4 \cdot 10^{-2} \text{ Sv}^{-1}$ per gli effetti ereditari nelle prime due generazioni. Va purtroppo comunque aggiunto che una recente rideterminazione delle dosi ricevute dai sopravvissuti di Hiroshima e Nagasaki e le conseguenti rivalutazioni delle stime di rischio per l'induzione della leucemia e degli altri tumori portano ad ipotizzare fattori di rischio sostanzialmente più elevati di quelli adottati dalla ICRP.

Il sistema di limitazione delle dosi si fonda sui seguenti tre fondamentali principi:

- a) nessuna attività umana deve essere accolta a meno che la sua introduzione produca un beneficio netto e dimostrabile;
- b) ogni esposizione alle radiazioni deve essere tenuta tanto bassa quanto è ragionevolmente ottenibile in base a considerazioni sociali ed economiche (principio "ALARA", dall'inglese: As Low As Reasonably Achievable);
- c) l'equivalente di dose ai singoli individui non deve superare i limiti raccomandati.

I tre principi devono essere applicati in sequenza: si passa cioè al secondo quando si sia verificato il primo, e al terzo quando si sia verificato anche il secondo.

18.14 Norme di legge

La legislazione italiana in merito di radioprotezione si rifà alle norme sancite dalla Unione Europea, la quale a sua volta ha fatto proprie le raccomandazioni dell'ICRP. Vediamone i punti salienti.

La popolazione è divisa in due categorie: coloro che per motivi professionali sono potenzialmente esposti al rischio delle radiazioni ionizzanti, e le persone del pubblico (cioè tutti gli altri). A loro volta i lavoratori esposti sono divisi in due categorie: A e B a seconda del livello potenziale di rischio. Il limite di equivalente di dose per esposizione globale per i lavoratori esposti è stabilito in 100 mSv in cinque anni solari consecutivi qualsiasi, con l'ulteriore condizione che non venga superato il limite di 50 mSv in un anno solare.

Una possibile "storia dosimetrica" è riportata nel grafico di figura 18.12, dove si vede che il ritmo medio di acquisizione di dose può essere appunto quello di 100 mSv in cinque anni ma la pendenza massima non supera i 50 mSv/anno.

Il limite di equivalente di dose per le persone del pubblico è fissato per legge al valore di 1 mSv per anno solare. Si noti come tale valore sia ovviamente

confrontabile con l'equivalente di dose annuo dovuto al fondo naturale, pari a 2.4 mSv.

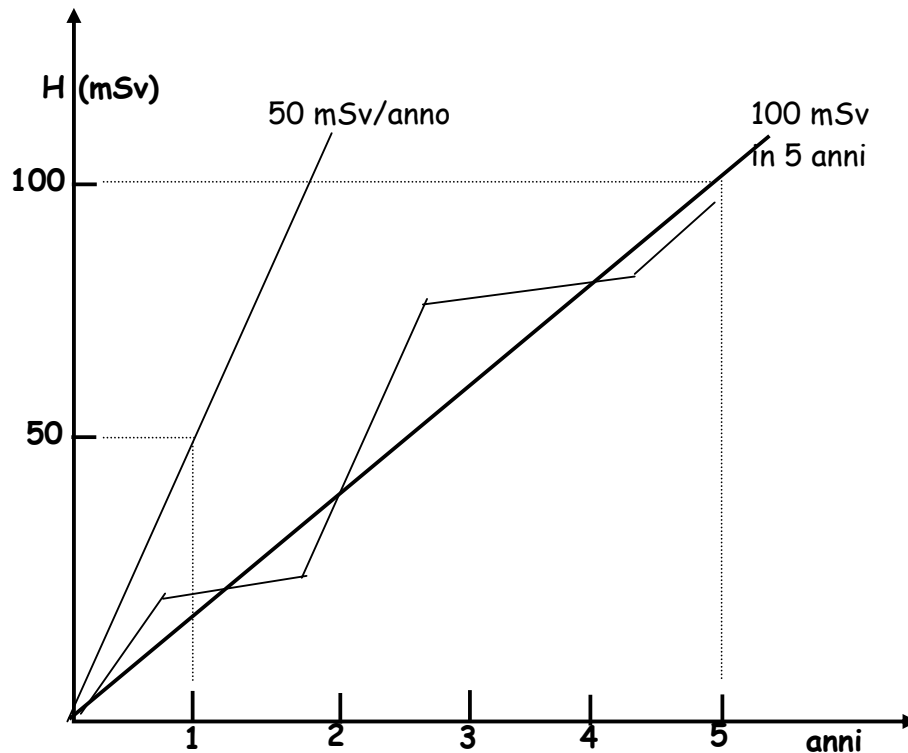


Fig. 18.12 esempio di profilo temporale di dose per un lavoratore professionalmente esposto

Esercizio 1

Si abbia un fascio parallelo di elettroni monoenergetici. L'energia cinetica degli elettroni è pari a $E_c = 0.4 \text{ MeV}$ ed il flusso vale $\Phi = 10^8 \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}$. calcolare \dot{D} e \dot{H} in acqua.

Dal grafico di figura 18.13 si ricava che per $E_c = 0.4 \text{ MeV}$ un flusso di elettroni $\Phi^* = 20 \text{ elettroni cm}^{-2}\text{s}^{-1}$ corrisponde ad un valore $\dot{H}^* = 2.5 \text{ mrem/h}$. Pertanto:

$$\dot{H} = \dot{H}^* \frac{\Phi}{\Phi^*} = 1.25 \cdot 10^7 \text{ mrem/h} = 1.25 \cdot 10^4 \text{ rem/h} = 1.25 \cdot 10^2 \text{ Sv/h} = 35 \text{ mSv/s.}$$

Naturalmente, poiché per elettroni da 0.4 MeV $Q=1$ di ha: $\dot{D} = \dot{H} = 35 \text{ mGy/s}$.

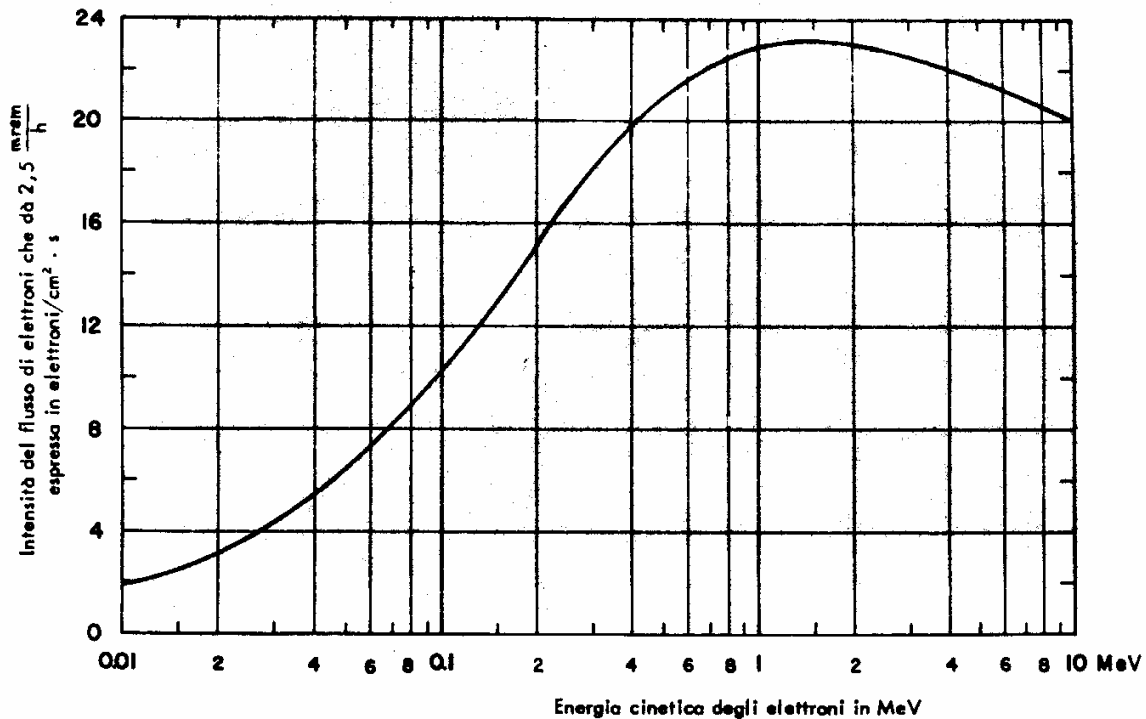


Fig. 18.13 intensità di fluenza di elettroni corrispondente a 2.5 mrem/h

Esercizio 2

Calcolare \dot{D} e \dot{H} in aria, acqua e tessuto per un fascio di fotoni monoenergetico di energia $E_\gamma = 3 \text{ MeV}$ e intensità di flusso $\Phi = 10^7 \text{ fotoni cm}^{-2}\text{s}^{-1}$

Ricordando la figura 18.3 che riportiamo qui sotto, si ricava che, per $E_\gamma = 3 \text{ MeV}$, 240 fotoni $\text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}$ contribuiscono ad una intensità di esposizione di 1 mR/h

Pertanto, nel nostro caso, avremo:

$$\dot{X} = \frac{10^7}{2.4 \cdot 10^2} = 4.2 \cdot 10^4 \text{ mR/h}$$

Ricordiamo che per un materiale M qualsiasi possiamo scrivere la relazione

$$\dot{D}_M (\text{mrad/h}) = \frac{\mu_{en}(M)}{\mu_{en}(\text{aria})} \cdot \dot{D}_{\text{aria}} (\text{mR/h}) = 0.874 \cdot \frac{\mu_{en}(M)}{\mu_{en}(\text{aria})} \cdot \dot{X} (\text{mR/h})$$

che possiamo riscrivere come:

$$\dot{D}_M (\text{mrad/h}) = f_M \cdot \dot{X} (\text{mR/h})$$

dove $f_M = 0.874 \cdot \frac{\mu_{en}(M)}{\mu_{en}(\text{aria})}$ contiene tutta la dipendenza dal materiale.

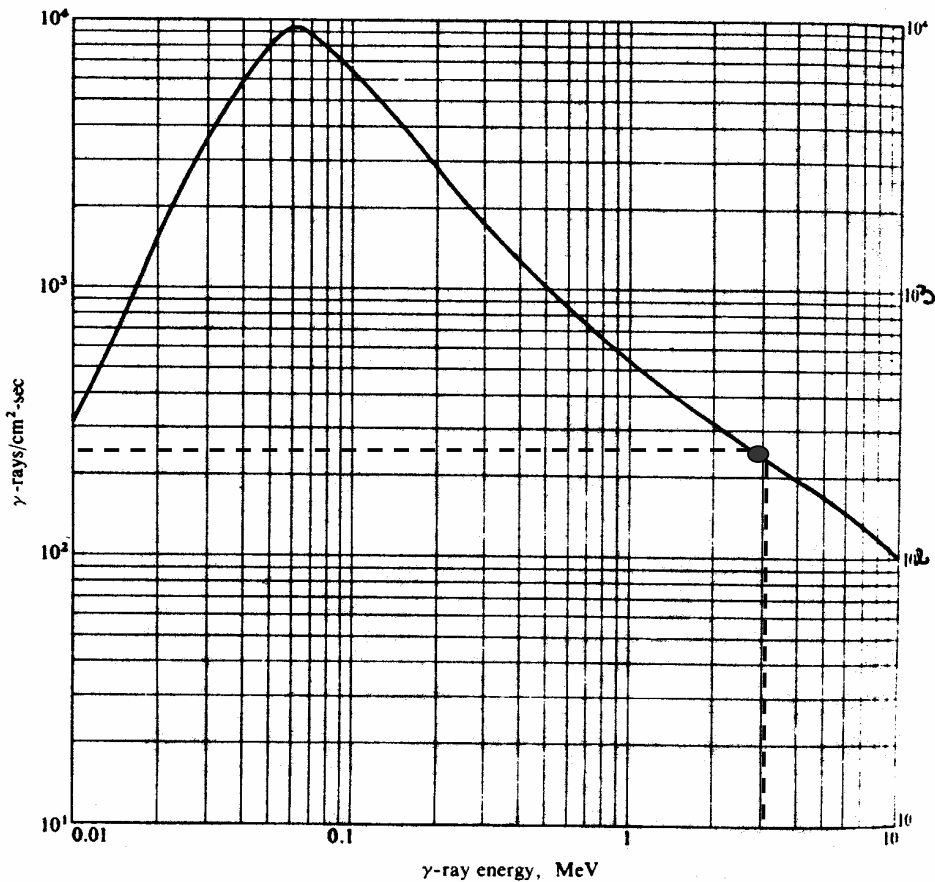


Fig. 18.14 intensità di fluena di fotoni ($\text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}$) di energia E_γ corrispondente ad una intensità di Esposizione pari ad 1 mR/h

Nella tabella 18.6 sono riportati i valori del coefficiente f nel caso di acqua, osso e muscolo in funzione dell'energia dei fotoni.

Pertanto risulta:

$$\dot{D}_{\text{aria}} = 0.87 \cdot 4.2 \cdot 10^4 \text{ mrad/h} = 36.5 \text{ rad/h} = 0.1 \text{ mGy/s}$$

$$\dot{D}_{\text{tessuto}} = 0.96 \cdot 4.2 \cdot 10^4 \text{ mrad/h} = 40 \text{ rad/h} = 0.111 \text{ mGy/s}$$

$$\dot{D}_{\text{acqua}} = 0.97 \cdot 4.2 \cdot 10^4 \text{ mrad/h} = 41 \text{ rad/h} = 0.114 \text{ mGy/s}$$

Esercizio 3

Una sorgente di fotoni di energia $E_\gamma = 0.04 \text{ MeV}$ ha una attività $a = 100 \text{ Ci}$. Calcolare l'intensità di esposizione e l'intensità di dose in aria, muscolo e grasso ad un metro di distanza dalla sorgente. Ricordiamo la relazione:

$$\dot{X} = 0.0659 \cdot \left(\frac{\mu_{\text{en}}}{\rho} \right) E_\gamma \phi_\gamma, \text{ dove } \dot{X} \text{ è espresso in mR/h quando l'energia è data in MeV,}$$

il coefficiente di assorbimento massico in cm^2/g ed il flusso in $\text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}$.

$$\phi_\gamma = \frac{a}{4\pi d^2} = 2.94 \cdot 10^7 \text{ fotoni cm}^{-2}\text{s}^{-1}.$$

$$\left(\frac{\mu_{en}}{\rho}\right)_{aria} = 6.83 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^2/\text{g} \text{ per fotoni di } 40 \text{ keV.}$$

$$\text{Sostituendo: } \dot{X} = 0.0659 \cdot \left(\frac{\mu_{en}}{\rho}\right) E_{\gamma} \varphi_{\gamma} = 5.29 \cdot 10^3 \text{ mR/h} = 5.29 \text{ R/h}$$

E_{γ} (MeV)	f_{acqua}	f_{osso}	$f_{muscolo}$
0.010	0.92	3.68	0.93
0.015	0.89	4.00	0.92
0.020	0.93	4.27	0.92
0.030	0.87	4.43	0.91
0.040	0.88	4.13	0.92
0.050	0.99	3.61	0.93
0.060	0.91	2.94	0.93
0.080	0.94	1.93	0.94
0.10	0.95	1.47	0.95
0.15	0.97	1.08	0.96
0.2	0.98	0.93	0.97
0.3	0.97	0.94	0.96
0.4	0.97	0.93	0.96
0.5	0.97	0.93	0.96
0.6	0.97	0.93	0.96
0.8	0.97	0.92	0.96
1.0	0.97	0.92	0.96
1.5	0.97	0.92	0.96
2.0	0.97	0.92	0.96
3.0	0.97	0.92	0.96

Tab. 18.6

Dal grafico di figura 18.4 qui sopra riportato, si ricava immediatamente:

$$\dot{D}_{aria} = 0.87 \cdot \dot{X}_{aria} (\text{mR/h}) = 4.63 \text{ rad/h} = 46.3 \text{ mGy/h}$$

$$\dot{D}_{tessuto} = 0.90 \cdot \dot{X}_{aria} (\text{mR/h}) = 4.77 \text{ rad/h} = 47.7 \text{ mGy/s}$$

$$\dot{D}_{grasso} = 0.45 \cdot \dot{X}_{aria} (\text{mR/h}) = 2.38 \text{ rad/h} = 23.8 \text{ mGy/s}$$

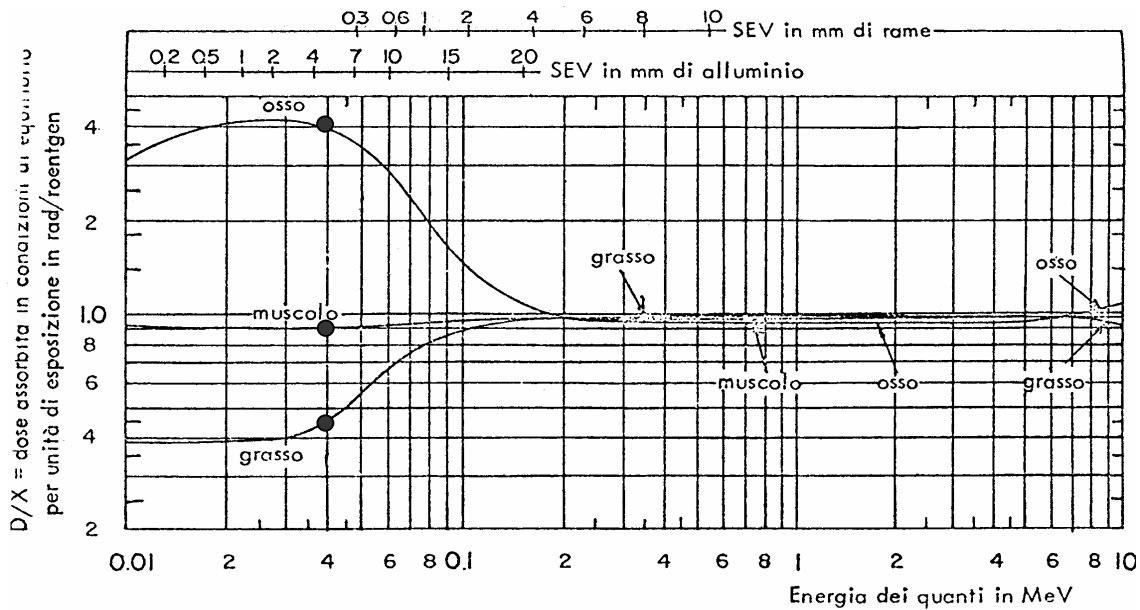


Fig. 18.15 Andamento di f_M per i principali tessuti organici in funzione

Esercizio 4

Si abbia una sorgente di ^{60}Co di attività $a = 1 \text{ Ci}$. Calcolare \dot{X} a $d = 5 \text{ m}$ di distanza. Calcolare inoltre, alla stessa distanza, \dot{D} in aria, acqua e osso. Occorre tener conto della \dot{D} prodotta dagli elettroni del decadimento beta del ^{60}Co ?

$$\dot{X} = \frac{\Gamma \cdot a}{d^2}$$

La costante gamma specifica del ^{60}Co vale: $\Gamma = 1.30 \frac{\text{R m}^2}{\text{h Ci}}$

Sostituendo si ricava: $\dot{X} = 52 \text{ mR/h}$

Pertanto:

$$\dot{D}_{\text{aria}} = 0.87 \cdot \dot{X}_{\text{aria}} (\text{mR/h}) = 45.2 \text{ mrad/h} = 0.452 \text{ mGy/h}$$

$$\dot{D}_{\text{acqua}} = 0.97 \cdot \dot{X}_{\text{aria}} (\text{mR/h}) = 50.4 \text{ mrad/h} = 0.504 \text{ mGy/h}$$

$$\dot{D}_{\text{osso}} = 0.92 \cdot \dot{X}_{\text{aria}} (\text{mR/h}) = 47.8 \text{ mrad/h} = 0.478 \text{ mGy/h}$$

Invece di usare la costante Γ avremmo potuto far il calcolo per esteso. Attenzione in questo caso: il ^{60}Co emette due fotoni per decadimento di energie rispettivamente 1.17 e 1.33 MeV. Nel calcolo del flusso bisogna quindi moltiplicare per due l'attività della sorgente. Quanto all'energia, si può considerare che i due fotoni abbiano entrambi la stessa energia media, ossia 1.25 MeV.

Per quanto riguarda la dose dovuta agli elettroni, questi ultimi vengono assorbiti lungo il tragitto: sono infatti elettroni con $E_{\text{max}} = 0.32 \text{ MeV}$ che hanno un range in aria pari a $2.6 \cdot 10^{-3} \text{ g/cm}^2$ (pari a 2 centimetri). Essi non contribuiscono pertanto alla dose.

Esercizio 5

Una sorgente di neutroni ha una energia $E_1 = 0.1$ MeV ed una intensità $I = 10^7$ neutroni al secondo. Calcolare l'intensità di kerma a 1 metro, l'intensità di dose assorbita in condizioni di equilibrio e l'intensità di equivalente di dose in tessuto biologico. Ripetere il calcolo per neutroni di energia $E_2 = 0.7$ MeV.

Dal grafico di figura 18.8 ricaviamo:

$$\text{per } E_1 = 0.1 \text{ MeV: } \text{kerma}/\Phi = 6 \cdot 10^{-8} \text{ erg cm}^2 \text{ g}^{-1} = 6 \cdot 10^{-10} \text{ rad cm}^2$$

$$\text{per } E_2 = 0.7 \text{ MeV: } \text{kerma}/\Phi = 2 \cdot 10^{-7} \text{ erg cm}^2 \text{ g}^{-1} = 2 \cdot 10^{-9} \text{ rad cm}^2$$

Il flusso ad un metro dalla sorgente di neutroni vale:

$$\Phi = \frac{I}{4\pi d^2} = 79.6 \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}$$

Il kerma allora vale:

$$\text{kerma} = \Phi \cdot 6 \cdot 10^{-10} \text{ rad/s} = 4.8 \cdot 10^{-8} \text{ rad/s} = 0.17 \text{ mrad/h} = 47.2 \text{ } \mu\text{Gy/s} \quad (E_1 = 0.1 \text{ MeV})$$

$$\text{kerma} = \Phi \cdot 2 \cdot 10^{-9} \text{ rad/s} = 1.6 \cdot 10^{-7} \text{ rad/s} = 0.58 \text{ mrad/h} = 161 \text{ } \mu\text{Gy/s} \quad (E_2 = 0.7 \text{ MeV})$$

In condizioni di equilibrio elettronico si ha che $\dot{D} \equiv \text{kerma}$

Quanto all'intensità di equivalente di dose, sappiamo che: $\dot{H} = \dot{D}Q$

Dove Q è il fattore qualità e vale in questo caso 10.

$$\dot{H} = \dot{D}Q = 1.7 \text{ mrem/h} = 472 \text{ } \mu\text{Sv/s} \quad (E_1 = 0.1 \text{ MeV})$$

$$\dot{H} = \dot{D}Q = 5.8 \text{ mrem/h} = 1610 \text{ } \mu\text{Sv/s} \quad (E_2 = 0.7 \text{ MeV})$$

Esercizio 6

Un uomo viene investito da un flusso di 10^8 neutroni cm^{-2} di energia compresi tra 5 e 10 MeV. Calcolare la dose ricevuta.

Ricordando il grafico di figura 18.9 (riportato qui sotto) si vede che un flusso di 6.8 neutroni $\text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}$ di energia tra 5 e 10 MeV corrisponde ad un equivalente di dose di 1 mrem/h, corrispondenti a $2.78 \cdot 10^{-7}$ rem/s.

Eliminando il tempo, un flusso integrato $\Phi^* = 6.8$ neutroni cm^{-2} produce un equivalente di dose $H^* = 2.78 \cdot 10^{-7}$ rem. Nel nostro caso:

$$H = H^* \frac{\Phi}{\Phi^*} = 2.78 \cdot 10^{-7} \frac{10^8}{6.8} = 4.1 \text{ rem} = 41 \text{ mSv}$$

Analogo risultato si sarebbe ottenuto ragionando in termini di kerma ed utilizzando la figura 18.8.

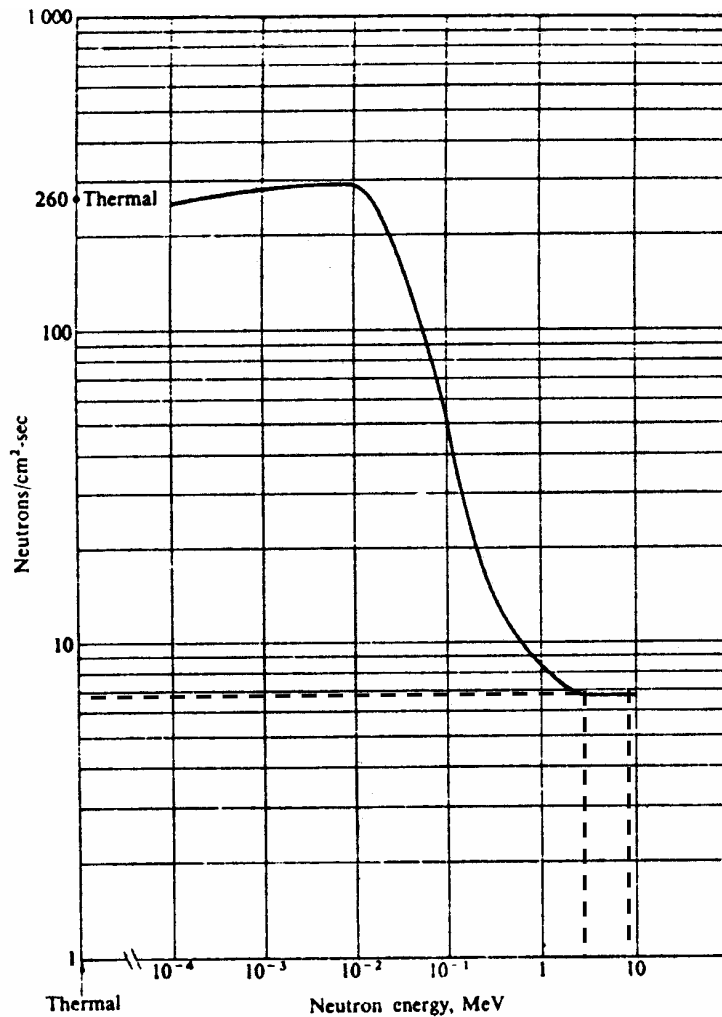


Fig. 18.16 Intensità di fluensa neutronica corrispondente ad $\dot{H} = 1$

Esercizio 7

Una sorgente da 1 Curie di $^{226}\text{Ra-Be}$ produce 10^8 neutroni al secondo dalla reazione:
 $\alpha + {}^9\text{Be} \rightarrow {}^{12}\text{C} + n$

L'energia dei neutroni è compresa tra 1 e 13 MeV. La sorgente mette anche raggi gamma di energia media pari ad un MeV ed il numero medio di fotoni per neutrone prodotto vale 350. Un lavoratore per spostare la sorgente usa un'asta così da mantenere la sorgente ad una distanza media $d = 2.5$ m dal corpo. Sapendo che l'operazione di spostamento dura un minuto, valutare l'equivalente di dose assorbita dal lavoratore.

Dobbiamo calcolare: $H_{\text{tot}} = (\dot{H}_\gamma + \dot{H}_n) \cdot \Delta t$

Le intensità di flusso di neutroni e fotoni sono le seguenti:

$$\phi_n = \frac{10^8}{4\pi 250^2} = 130 \frac{n}{\text{cm}^2 \text{ s}} \quad \phi_\gamma = 350 \cdot \phi_n = 4.5 \cdot 10^4 \frac{\gamma}{\text{cm}^2 \text{ s}}$$

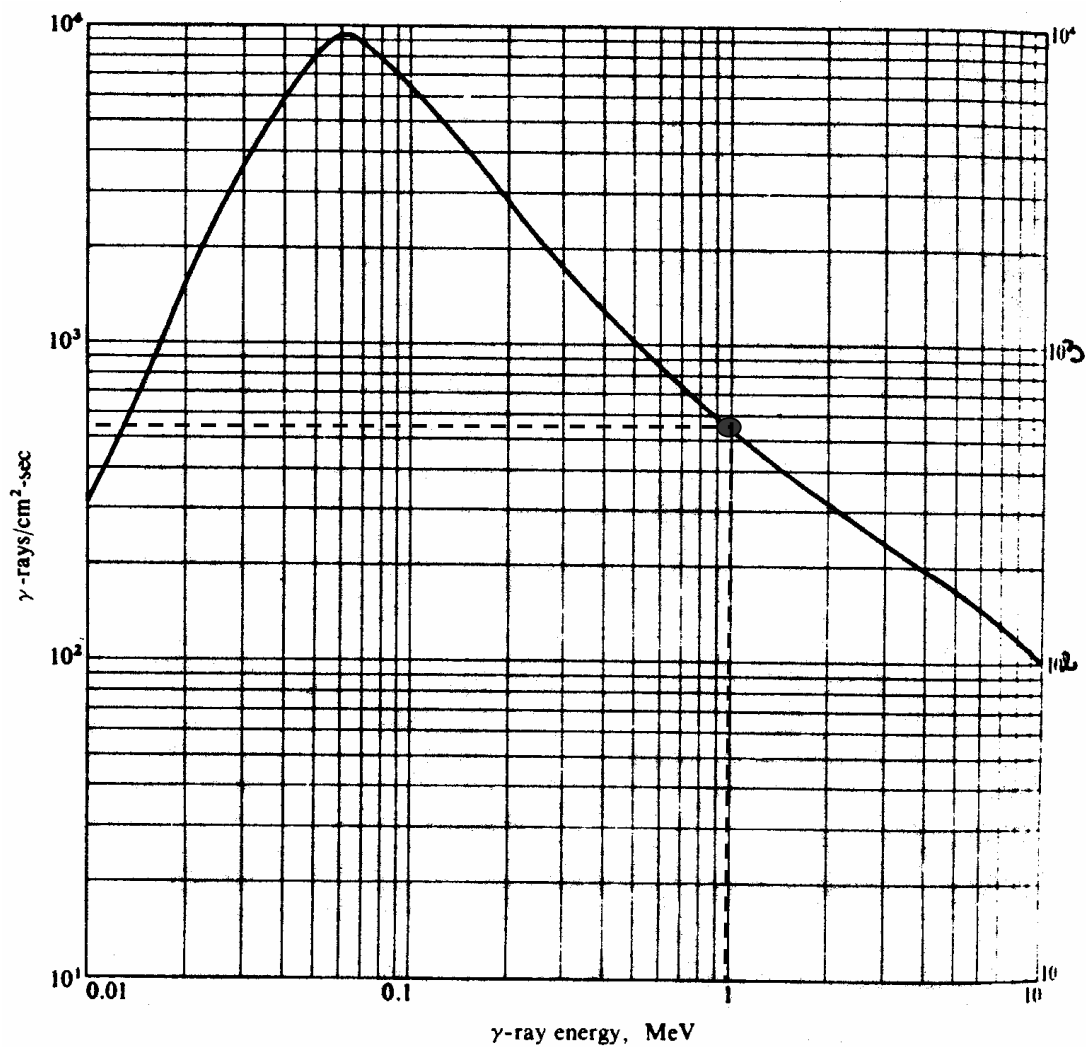


Fig. 18.17 intensità di fluenza di fotoni ($\text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}$) di energia E_γ corrispondente ad una intensità di Esposizione pari ad 1 mR/h

Dal grafico di figura 18.17 si deduce che $\dot{X}^* = 1 \text{ mR/h}$ è prodotto da $\phi_\gamma^* = 550$ fotoni $\text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}$ da 1 MeV. Pertanto l'intensità di esposizione nel nostro caso è:

$$\dot{X} = \dot{X}^* \frac{\phi_\gamma}{\phi_\gamma^*} = 80 \text{ mR/h} \quad \dot{D}_\gamma = 0.874 \cdot \dot{X} = 70 \text{ mrad/h} \quad \dot{H}_\gamma = \dot{D}_\gamma \cdot Q = 70 \text{ mrem/h}$$

$$H_\gamma = \dot{H}_\gamma \cdot \Delta t = 70/60 = 1.165 \text{ mrem}$$

Per quanto riguarda la dose da neutroni, si procede come segue:

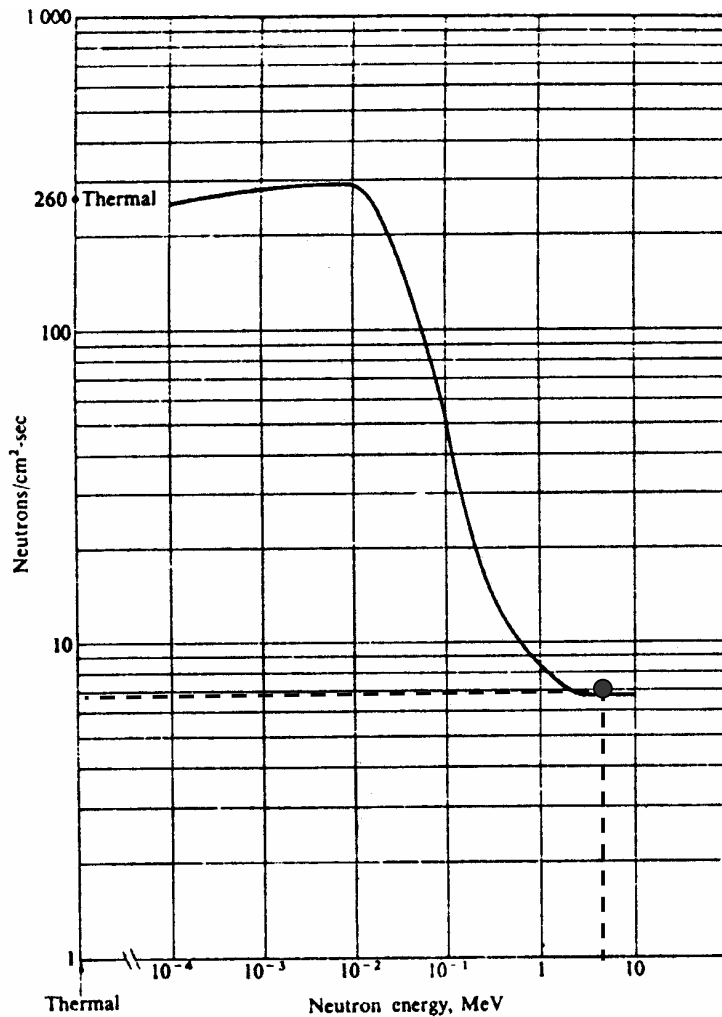


Fig. 18.18 Intensità di fluenza neutronica corrispondente ad $\dot{H} = 1$ mrem/h

Dal grafico di figura 18.18 si ricava che un flusso di 6.8 neutroni $\text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}$ di energia 5 MeV corrisponde ad un equivalente di dose di 1 mrem/h,

Nel nostro caso specifico l'intensità di equivalente di dose si ricava dalla solita relazione:

$$\dot{H}_n = \dot{H}_n^* \frac{\varphi_n}{\varphi_n^*} = 1 \frac{130}{6.8} = 19 \text{ mrem/h}$$

$$H_n = \dot{H}_n \cdot \Delta t = 19/60 = 0.32 \text{ mrem}$$

L'equivalente di dose totale risulta :

$$H_{\text{tot}} = H_\gamma + H_n = (1.16 + 0.32) \text{ mrem} = 1.48 \text{ mrem} = 0.0148 \text{ mSv}$$

Anche in questo caso si può verificare che si ottiene lo stesso risultato utilizzando il grafico del kerma.

Esercizio 8

Calcolare \dot{D} e \dot{H} dell'esercizio 1 usando la formula analitica dell'intensità di dose per particelle cariche:

$$\dot{D} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{dE}{dx} \right) \cdot \frac{d\Phi}{dt} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{dE}{dx} \right) \cdot \varphi$$

e confrontare i risultati con i due metodi.

Per elettroni in acqua si ricava che: $\left(\frac{1}{\rho} \frac{dE}{dx} \right)_{\text{acqua}} = 2.1 \text{ MeV cm}^2 \text{ g}^{-1} = 3.36 \cdot 10^{-14} \text{ J m}^2$

kg^{-1} .

Quanto al flusso:

$$\varphi = 10^8 \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1} = 10^{12} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1}$$

Pertanto:

$$\dot{D} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{dE}{dx} \right) \cdot \frac{d\Phi}{dt} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{dE}{dx} \right) \cdot \varphi = 3.36 \cdot 10^{-2} \text{ J kg}^{-1}/\text{s} = 3.36 \cdot 10^{-2} \text{ Gy/s} = 33.6 \text{ mGy/s}$$

$$\dot{H} = \dot{D}Q = 33.6 \text{ mSv/s}$$

da confrontare con il valore di 35 mSv/s ottenuto graficamente nell'esercizio 1.

Capitolo 19

Schermatura delle radiazioni

19.1 Schermature di particelle cariche

Abbiamo già visto che, a norma di legge, il limite di equivalente di dose per esposizione globale per i lavoratori esposti è stabilito in 100 mSv in cinque anni solari consecutivi qualsiasi, con l'ulteriore condizione che non venga superato il limite di 50 mSv in un anno solare. Per un lavoratore esposto, che trascorra nell'ambiente di lavoro 2000 ore all'anno (50 settimane da 40 ore) il limite orario è quindi pari a 10 μ Sv /h. Il limite di equivalente di dose per le persone del pubblico è fissato, sempre per legge, al valore di 1 mSv per anno solare.

Per diminuire la esposizione alle radiazioni ionizzanti in genere si agisce su tre fattori:

il tempo di esposizione, la distanza dalla sorgente, e la interposizione di una schermatura tra la sorgente ed il luogo che si vuole proteggere. In questo capitolo vedremo brevemente come si progettano le schermature per ridurre del fattore voluto l'esposizione alle radiazioni.

Particelle cariche pesanti

Le radiazioni più facilmente schermabili sono le particelle cariche pesanti: avendo nella materia un percorso definito, è sufficiente scegliere uno spessore di materiale superiore al range della radiazione stessa per assorbirle completamente. Inoltre il range di particelle cariche è in genere estremamente limitato.

Elettroni

Quanto agli elettroni, abbiamo visto che essi possono perdere energia per ionizzazione e per irraggiamento. In questo secondo caso essi producono nel mezzo fotoni, i quali a loro volta contribuiranno alla dose e devono essere quindi assorbiti dalla schermatura. Poiché i fotoni non hanno un range definito ma sono assorbiti esponenzialmente, risulta chiaro che, dal punto di vista matematico, sarebbe necessaria una schermatura di spessore infinito per eliminarli completamente. Poiché ciò non è ovviamente possibile, bisogna dimensionare lo spessore della schermatura in modo che la frazione di fotoni emergenti dia un contributo prefissato alla esposizione e sia tale da non superare i limiti di legge. Sempre a proposito degli elettroni, abbiamo visto che vale la relazione:

$$\frac{\left(\frac{dE}{dx}\right)_{\text{rad}}}{\left(\frac{dE}{dx}\right)_{\text{ion}}} \approx \frac{E \cdot Z}{800}$$

Per diminuire la probabilità di bremsstrahlung conviene quindi usare materiali leggeri (a basso Z). I fotoni prodotti, dei quali si conosce teoricamente flusso e spettro energetico, dovranno poi essere schermati da un secondo strato di schermatura, realizzata ad hoc per la radiazione gamma.

Tratteremo nel seguito con maggior dettaglio le tecniche di schermatura per fotoni e per neutroni (anche i neutroni non hanno un range definito e sono attenuati secondo una legge esponenziale).

I grafici di figure 19.1 e 19.2 riportano l'intensità del flusso di elettroni e particelle beta (in unità $\text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}$) che danno luogo ad una intensità di equivalente di dose di 2.5 mrem/h (pari a 25 $\mu\text{Sv/h}$) in acqua.

19.2 Schermature di fotoni

Consideriamo un fascio di raggi gamma parallelo di flusso Φ_0 ed energia E_0 . L'intensità di esposizione, come abbiamo visto, è data da:

$$\dot{X}_0 = \frac{e}{W_{\text{aria}}} \left(\frac{\mu_{\text{en}}}{\rho} \right)_{\text{aria}} E_0 \Phi_0$$

Se esprimiamo l'energia in MeV, il flusso in $\text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}$ e il coefficiente di assorbimento massico in cm^2/g , si ricava la seguente relazione:

$$\dot{X}_0 = 0.0659 \cdot \left(\frac{\mu_{\text{en}}}{\rho} \right)_{\text{aria}} \cdot E_0 \Phi_0 \text{ [mR/h]}$$

Si può anche scrivere $\dot{X}_0 = C \cdot \Phi_0$, dove $C = 0.0659 \cdot E_0 \cdot \left(\frac{\mu_{\text{en}}}{\rho} \right)_{\text{aria}}$

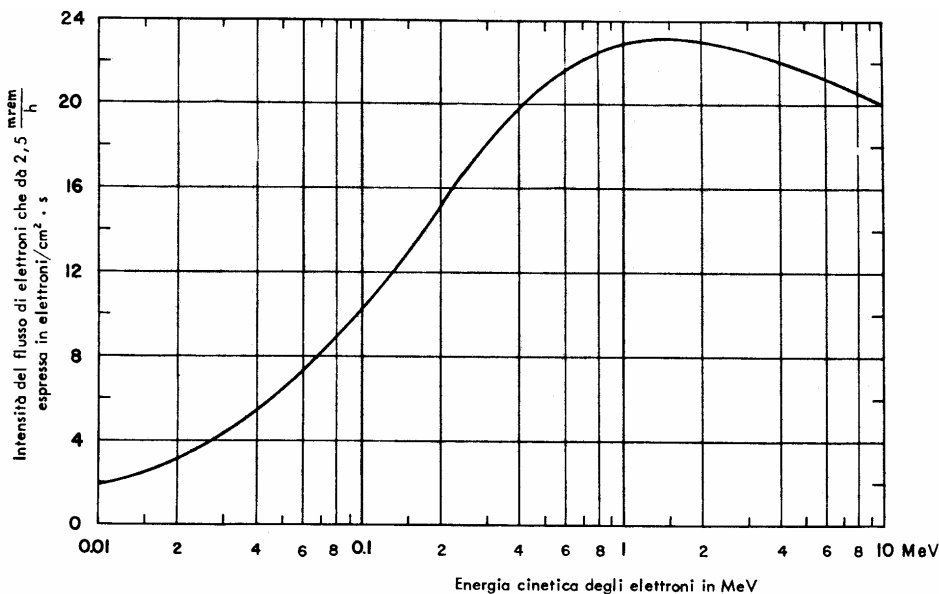


Fig. 19.1 Intensità di fluensa di elettroni corrispondente a $\dot{H} = 2.5 \text{ mrem/h}$

19.3 Il fenomeno del Buildup

Se si interpone un schermo, il calcolo della esposizione risulta più complicato in quanto occorre conoscere il flusso Φ al di là della schermatura a partire da Φ_0

(flusso che vi sarebbe senza schermatura). Sarebbe facile calcolare Φ se ogni volta che un fotone interagisse con la materia sparisse. Allora Φ risulterebbe:

$$\Phi = \Phi_0 \cdot \exp(-\mu \cdot a)$$

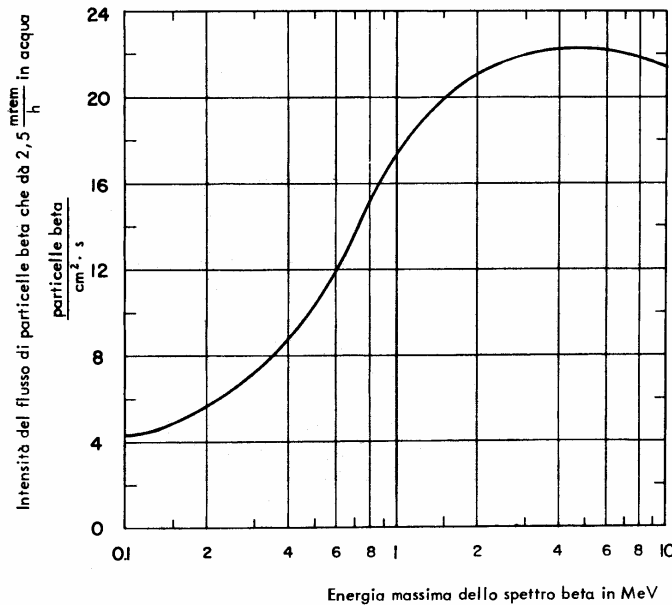


Fig. 19.2 Intensità di fluensa di particelle beta corrispondente a $\dot{H} = 2.5$ mrem/h

dove μ rappresenta il coefficiente di attenuazione totale all'energia E_0 . Come sappiamo però i fotoni non spariscono dopo ogni interazione. Nell'effetto Compton, per esempio, essi sono diffusi e proseguono nella schermatura con una energia minore ed una direzione diversa. E anche nell'effetto fotoelettrico e nella produzione di coppie, sebbene il fotone incidente si annichili, vengono generati raggi X e radiazione di bremsstrahlung, nonché fotoni di annichilazione del positrone. Come risultato di questi effetti, un fascio monoenergetico di fotoni incidente su una schermatura emerge dallo schermo come uno spettro continuo (figura 19.3).

Il picco stretto corrisponde ai fotoni che non hanno interagito nella schermatura ed è ridotto in dimensioni del fattore esponenziale $\exp(-\mu \cdot a)$. La parte continua dello spettro è dovuta in larga parte dall'effetto Compton, con contributi che vengono da effetto fotoelettrico e da radiazione di annichilazione. Il calcolo esatto dello spettro è molto difficile e va ben oltre i nostri scopi: qui è sufficiente dire che questi conti sono stati effettuati per una grande varietà di materiali, di energie di fotoni e di spessori dello schermo. I valori ottenuti di $\Phi(E)$ sono poi stati usati per calcolare l'intensità di esposizione \dot{X} dalla formula:

$$\dot{X} = 0.0659 \cdot \int_0^{E_0} \Phi(E) \cdot E \cdot \left(\frac{\mu_{en}}{\rho} \right)_{aria} dE$$

I risultati del calcolo sono scritti nel seguente modo:

$$\dot{X} = \dot{X}_0 \cdot B_m(\mu a) \cdot e^{-\mu a}$$

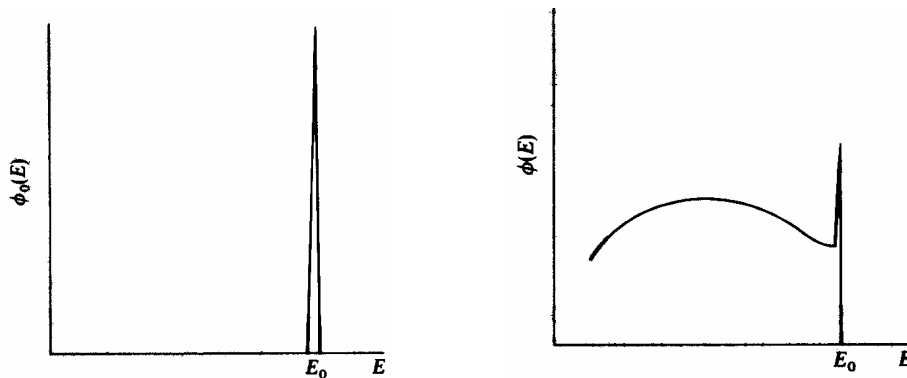


Fig. 19.3 distorsione dello spettro prodotta da una schermatura

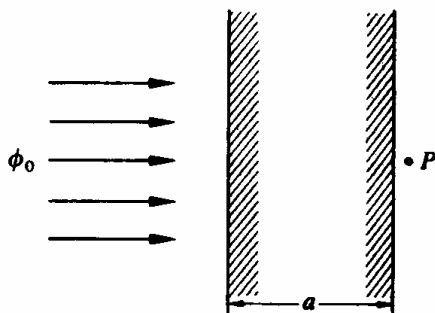


Fig. 19.4 significato di Φ_0 , a e P

Qui \dot{X}_0 rappresenta l'intensità di esposizione in assenza della schermatura, $B_m(\mu a)$ è chiamato il fattore di buildup per un fascio parallelo, e μ è il coefficiente di attenuazione totale all'energia incidente E_0 e a è lo spessore dello schermo. I valori di B_m sono dati nella tabella 19.1 in funzione dell'energia e per diversi materiali. \dot{X} rappresenta l'intensità di esposizione nel punto P della figura 19.4.

Come si osserva, B_m può essere anche molto grande, e questo conferma l'importanza del contributo dei fotoni diffusi nel calcolo delle schermature. Con uno schermo di acqua, per un valore $\mu a = 10$ (dello spessore cioè di 10 cammini liberi medi) e per energie di fotoni $E_\gamma = 2 \text{ MeV}$ si ricava che $B_m = 10$. Questo significa che se trascurassimo l'effetto del buildup sottostimeremmo l'esposizione di un ordine di grandezza. Dal momento che B_m è una funzione continua del numero atomico Z , è possibile interpolare per un materiale non contenuto in tabella. Come abbiamo scritto $\dot{X}_0 = C \cdot \Phi_0$, possiamo scrivere: $\dot{X} = C \cdot \Phi_b$, dove con Φ_b indichiamo il flusso di buildup: $\Phi_b = \Phi_0 \cdot B_m(\mu a) \cdot e^{-\mu a}$

Come ci si aspetta la correzione è massima nelle condizioni nelle quali l'effetto Compton domina sull'effetto fotoelettrico e sulla produzione di coppie.

TABLE 10.1
Exposure buildup factor for plane monidirectional source*

Material	E_0 , MeV	$\mu_0 x$					
		1	2	4	7	10	15
Water	0.5	2.63	4.29	9.05	20.0	35.9	74.9
	1.0	2.26	3.39	6.27	11.5	18.0	30.8
	2.0	1.84	2.63	4.28	6.96	9.87	14.4
	3.0	1.69	2.31	3.57	5.51	7.48	10.8
	4.0	1.58	2.10	3.12	4.63	6.19	8.54
	6.0	1.45	1.86	2.63	3.76	4.86	6.78
	8.0	1.36	1.69	2.30	3.16	4.00	5.47
Iron	0.5	2.07	2.94	4.87	8.31	12.4	20.6
	1.0	1.92	2.74	4.57	7.81	11.6	18.9
	2.0	1.69	2.35	3.76	6.11	8.78	13.7
	3.0	1.58	2.13	3.32	5.26	7.41	11.4
	4.0	1.48	1.90	2.95	4.61	6.46	9.92
	6.0	1.35	1.71	2.48	3.81	5.35	8.39
	8.0	1.27	1.55	2.17	3.27	4.58	7.33
Tin	1.0	1.22	1.44	1.95	2.89	4.07	6.70
	2.0	1.65	2.24	3.40	5.18	7.19	10.5
	4.0	1.58	2.13	3.27	5.12	7.13	11.0
	6.0	1.39	1.80	2.69	4.31	6.30	9.68
	10.0	1.27	1.57	2.27	3.72	5.77	11.0
Lead	0.5	1.16	1.33	1.77	2.81	4.53	9.68
	1.0	1.24	1.39	1.63	1.87	2.08	2.08
	2.0	1.38	1.68	2.18	2.80	3.40	4.20
	3.0	1.40	1.76	2.41	3.36	4.35	5.94
	4.0	1.36	1.71	2.42	3.55	4.82	7.18
	6.0	1.28	1.56	2.18	3.29	4.69	7.70
	8.0	1.19	1.40	1.87	2.97	4.69	9.53
	10.0	1.14	1.30	1.69	2.61	4.18	9.08
Uranium	0.5	1.11	1.24	1.54	2.27	3.54	7.70
	1.0	1.17	1.28	1.45	1.60	1.73	1.73
	2.0	1.30	1.53	1.90	2.32	2.70	3.60
	3.0	1.33	1.62	2.15	2.87	3.56	4.89
	4.0	1.29	1.57	2.13	3.02	3.99	5.94
	6.0	1.25	1.49	2.02	2.94	4.06	6.47
	8.0	1.18	1.37	1.82	2.74	4.12	7.79
	10.0	1.13	1.27	1.61	2.39	3.65	7.36

*From H. Goldstein, *Fundamental Aspects of Reactor Shielding*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1959; now available from Johnson Reprint Corp., New York.

Tab. 19.1 fattore di buildup per sorgenti piane monodirezionali

Finora abbiamo parlato di fasci di fotoni paralleli incidenti su uno schermo piatto. Consideriamo ora il caso di una sorgente puntiforme isotropa che emette S fotoni al secondo, circondata da una schermatura sferica di raggio R . In questo caso l'intensità di esposizione alla superficie dello schermo vale: $\dot{X} = \dot{X}_0 \cdot B_m(\mu R) \cdot e^{-\mu R}$

Qui $B_m(\mu R)$ è il fattore di buildup per sorgenti puntiforme isotrope e \dot{X}_0 l'intensità di esposizione in assenza di schermo:

$$\dot{X}_0 = C \cdot \Phi_0, \text{ dove } \Phi_0 = \frac{S}{4\pi R^2} \text{ e } \Phi_b = \frac{S \cdot B_m(\mu R) \cdot \exp(-\mu R)}{4\pi R^2}$$

La tabella 19.2 si riferisce appunto a $B_m(\mu R)$

TABLE 10.2
Exposure buildup factor for isotropic point source*

Material	E_0 MeV	$\mu_0 r$							
		1	2	4	7	10	15	20	
Water	0.255	3.09	7.14	23.0	72.9	166	456	982	
	0.5	2.52	5.14	14.3	38.8	77.6	178	334	
	1.0	2.13	3.71	7.68	16.2	27.1	50.4	82.2	
	2.0	1.83	2.77	4.88	8.46	12.4	19.5	27.7	
	3.0	1.69	2.42	3.91	6.23	8.63	12.8	17.0	
	4.0	1.58	2.17	3.34	5.13	6.94	9.97	12.9	
	6.0	1.46	1.91	2.76	3.99	5.18	7.09	8.85	
	8.0	1.38	1.74	2.40	3.34	4.25	5.66	6.95	
	10.0	1.33	1.63	2.19	2.97	3.72	4.90	5.98	
	Aluminum	0.5	2.37	4.24	9.47	21.5	38.9	80.8	141
1.0		2.02	3.31	6.57	13.1	21.2	37.9	58.5	
2.0		1.75	2.61	4.62	8.05	11.9	18.7	26.3	
3.0		1.64	2.32	3.78	6.14	8.65	13.0	17.7	
4.0		1.53	2.08	3.22	5.01	6.88	10.1	13.4	
6.0		1.42	1.85	2.70	4.06	5.49	7.97	10.4	
8.0		1.34	1.68	2.37	3.45	4.58	6.56	8.52	
10.0		1.28	1.55	2.12	3.01	3.96	5.63	7.32	
Iron		0.5	1.98	3.09	5.98	11.7	19.2	35.4	55.6
		1.0	1.87	2.89	5.39	10.2	16.2	28.3	42.7
	2.0	1.76	2.43	4.13	7.25	10.9	17.6	25.1	
	3.0	1.55	2.15	3.51	5.85	8.51	13.5	19.1	
	4.0	1.45	1.94	3.03	4.91	7.11	11.2	16.0	
	6.0	1.34	1.72	2.58	4.14	6.02	9.89	14.7	
	8.0	1.27	1.56	2.23	3.49	5.07	8.50	13.0	
	10.0	1.20	1.42	1.95	2.99	4.35	7.54	12.4	
	Tin	0.5	1.56	2.08	3.09	4.57	6.04	8.64	
		1.0	1.64	2.30	3.74	6.17	8.85	13.7	18.8
2.0		1.57	2.17	3.53	5.87	8.53	13.6	19.3	
3.0		1.46	1.96	3.13	5.28	7.91	13.3	20.1	
4.0		1.38	1.81	2.82	4.82	7.41	13.2	21.2	
6.0		1.26	1.57	2.37	4.17	6.94	14.8	29.1	
8.0		1.19	1.42	2.05	3.57	6.19	15.1	34.0	
10.0		1.14	1.31	1.79	2.99	5.21	12.5	33.4	
Tungsten		0.5	1.28	1.50	1.84	2.24	2.61	3.12	
		1.0	1.44	1.83	2.57	3.62	4.64	6.25	(7.35)
	2.0	1.42	1.85	2.72	4.09	5.27	8.07	(10.6)	
	3.0	1.36	1.74	2.59	4.00	5.92	9.66	14.1	
	4.0	1.29	1.62	2.41	4.03	6.27	12.0	20.9	
	6.0	1.20	1.43	2.07	3.60	6.29	15.7	36.3	
	8.0	1.14	1.32	1.81	3.05	5.40	15.2	41.9	
	10.0	1.11	1.25	1.64	2.62	4.65	14.0	39.3	

Tab. 19.2 fattore di buildup per sorgenti puntiformi isotrope

9.4 Schermature multistrato

Se la schermatura è composta da più strati di materiali diversi il calcolo del fattore di buildup diventa molto più complicato poiché deve essere calcolato anche per spettri energetici continui incidenti sugli strati successivi al primo. Supponiamo per esempio che un fascio parallelo di fotoni di energia E_0 incida su uno schermo come rappresentato nella figura 19.5.

TABLE 10.2 (continued)

Material	E_0 MeV	$\mu_0 r$						
		1	2	4	7	10	15	20
Lead	0.5	1.24	1.42	1.69	2.00	2.27	2.65	(2.73)
	1.0	1.37	1.69	2.26	3.02	3.74	4.81	5.86
	2.0	1.39	1.76	2.51	3.66	4.84	6.87	9.00
	3.0	1.34	1.68	2.43	3.75	5.30	8.44	12.3
	4.0	1.27	1.56	2.25	3.61	5.44	9.80	16.3
	5.1	1.21	1.46	2.08	3.44	5.55	11.7	23.6
	6.0	1.18	1.40	1.97	3.34	5.69	13.8	32.7
	8.0	1.14	1.30	1.74	2.89	5.07	14.1	44.6
	10.0	1.11	1.23	1.58	2.52	4.34	12.5	39.2
	Uranium	0.5	1.17	1.30	1.48	1.67	1.85	2.08
1.0		1.31	1.56	1.98	2.50	2.97	3.67	
2.0		1.33	1.64	2.23	3.09	3.95	5.36	(6.48)
3.0		1.29	1.58	2.21	3.27	4.51	6.97	9.88
4.0		1.24	1.50	2.09	3.21	4.66	8.01	12.7
6.0		1.16	1.36	1.85	2.96	4.80	10.8	23.0
8.0		1.12	1.27	1.66	2.61	4.36	11.2	28.0
10.0		1.09	1.20	1.51	2.26	3.78	10.5	28.5

*From H. Goldstein, *Fundamental Aspects of Reactor Shielding*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1959; now available from Johnson Reprint Corp., New York.

Tab. 19.2 fattore di buildup per sorgenti puntiformi isotrope

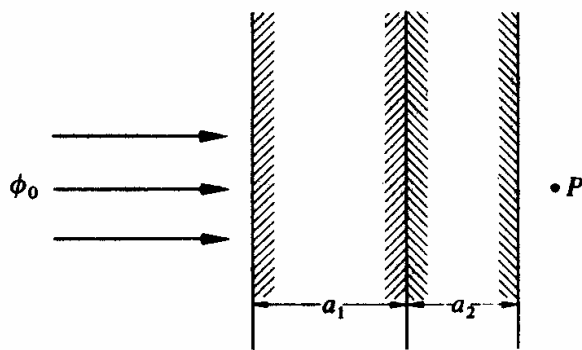


Fig. 19.5 schermatura multistrato

Il flusso di fotoni Φ_u che non hanno interagito ("u" sta per "uncollided") è dato da:

$$\Phi_u = \Phi_0 \cdot e^{-(\mu_1 a_1 + \mu_2 a_2)}$$

dove μ_1 e μ_2 rappresentano i coefficienti di attenuazione dei due materiali di corrispondenti spessori a_1 e a_2 . Il calcolo del buildup al punto P risulta complicato. Questo deriva dal fatto che i fattori di buildup sono stati calcolati solo per fotoni

monocromatici, e mentre possono essere usati per descrivere la radiazione che lascia il primo strato, essi non sono più appropriati per la radiazione che lascia il secondo strato in quanto in quanto la radiazione che vi incide non è monocromatica. Inoltre ci si aspetta che il buildup al punto P dipenda dall'ordine nel quale sono messi gli strati. Consideriamo per esempio fotoni da 0.5 MeV incidenti su uno strato composto di acqua e piombo. Sappiamo che il fattore di buildup dell'acqua è molto maggiore di quello del piombo: infatti fotoni da 0.5 MeV in acqua subiscono prevalentemente effetto compton, mentre in piombo, grazie al suo più alto numero atomico, l'effetto fotoelettrico è dominante. Pertanto, se l'acqua fosse posta prima del piombo, la radiazione di buildup prodotta nell'acqua (di più bassa energia) verrebbe assorbita dal successivo strato di piombo e il buildup complessivo sarebbe minimo. Se invece lo strato di piombo fosse messo per primo, il buildup prodotto nell'acqua verrebbe trasmesso oltre la barriera e raggiungerebbe il punto P. Sfortunatamente non vi è modo di ottenere il buildup del doppio strato a partire dai singoli buildup, e si adotta la seguente approssimazione:

- $Z_1 \approx Z_2$, cioè $|Z_1 - Z_2| \leq 5 \div 10$

In questo caso si usa il fattore di buildup del mezzo per il quale è maggiore e si calcola il fattore totale come: $B_m[\mu(a_1 + a_2)]$

- $Z_1 \neq Z_2$, con $Z_1 \ll Z_2$ (il mezzo leggero si trova per primo).

In questo caso si usa il fattore di buildup del secondo mezzo come se il primo non vi fosse, cioè: $B_{Z_2}(\mu_2 a_2)$

- $Z_1 \neq Z_2$, con $Z_1 \gg Z_2$ (il mezzo pesante si trova per primo).

In questo caso dipende dal valore dell'energia dei fotoni primari rispetto al valore per il quale μ è minimo: per materiali pesanti tale valore è attorno a $E_{\min} = 3 \text{ MeV}$ (vedi figura 19.6)

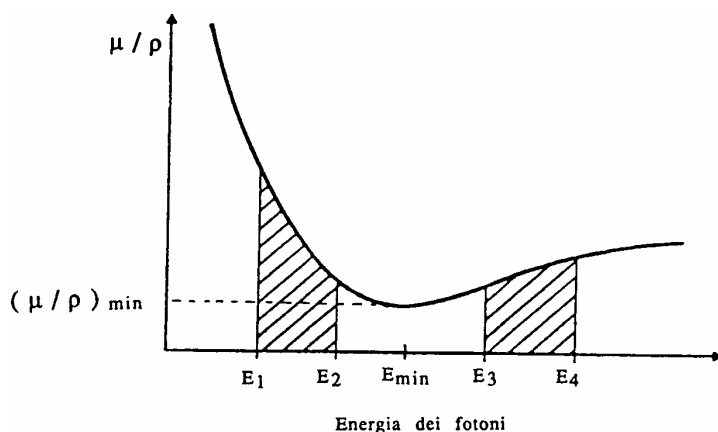


Fig. 19.6 coefficiente di attenuazione dei fotoni

Se $E_\gamma < 3 \text{ MeV}$, allora: $B = B_{Z_1}(\mu_1 a_1) \cdot B_{Z_2}(\mu_2 a_2)$

Questo deriva dal fatto che i fotoni che emergono dal primo strato ad alto Z hanno una energia che differisce di poco da quella iniziale e la loro penetrazione nel secondo mezzo può essere trattata come se provenissero dalla sorgente.

Se invece $E_\gamma > 3 \text{ MeV}$, allora: $B = B_{Z_1}(\mu_1 a_1) \cdot B_{Z_2}(\mu_2 a_2)_{\min}$

dove $B_{Z_2}(\mu_2 a_2)_{\min}$ è il valore di $B_{Z_2}(\mu_2 a_2)$ calcolato per $E = E_{\min} = 3 \text{ MeV}$.

In questo caso infatti lo spettro dei fotoni che superano il primo strato ha energia addensata attorno al valore $E = E_{\min}$, essendo per questa energia minima la probabilità di interazione.

Esercizio 1

Un fascio parallelo di raggi gamma di energia $E_\gamma = 2 \text{ MeV}$ e di intensità $\Phi_0 = 10^6 \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$ incide su uno schermo di piombo di spessore $a = 10 \text{ cm}$. Calcolare, al di là dello schermo:

- il numero di fotoni che non hanno interagito;
- l'intensità di esposizione.

Per $E_\gamma = 2 \text{ MeV}$, abbiamo: $\left(\frac{\mu}{\rho}\right)_{\text{Pb}} = 0.0457 \text{ cm}^2/\text{g}$; $\rho_{\text{Pb}} = 11.34 \text{ g/cm}^3$.

Pertanto $\mu = 0.518 \text{ cm}^{-1}$ e $\mu a = 5.18$

$\Phi = \Phi_0 \cdot \exp(-\mu a) = 5.63 \cdot 10^3 \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$

$B_m(5.18)$ si trova per interpolazione tra $B_m(4)$ e $B_m(7)$ e risulta: $B_m(5.18) = 2.78$

Allora:

$$\dot{X} = \dot{X}_0 \cdot B_m(\mu a) \cdot e^{-\mu a} = 0.0659 \cdot \left(\frac{\mu_{\text{en}}}{\rho}\right)_{\text{aria}} E_0 \Phi_0 \cdot B_m(\mu a) \cdot e^{-\mu a} = 48 \text{ mR/h}$$

Esercizio 2

Una sorgente puntiforme emette 10^8 fotoni al secondo di energia $E_\gamma = 1 \text{ MeV}$ attorno alla sorgente vi è uno schermo sferico di ferro. Quale deve essere il raggio dello schermo per avere all'esterno una intensità di esposizione di 1 mR/h .

In un problema di questi tipo bisogna innanzi tutto calcolare il flusso di buildup che darà l'intensità di esposizione richiesta. Pertanto, da:

$$\dot{X} = C \Phi_b = 0.0659 \cdot \left(\frac{\mu_{\text{en}}}{\rho}\right)_{\text{aria}} E_0 \Phi_b$$

$$\text{si ricava: } \Phi_b = \frac{\dot{X}}{C} = \frac{\dot{X}}{0.0659 \cdot \left(\frac{\mu_{\text{en}}}{\rho}\right)_{\text{aria}} E_0}$$

essendo $\dot{X} = 1 \text{ mR/h}$, $E_0 = 1 \text{ MeV}$, $\left(\frac{\mu_{\text{en}}}{\rho}\right)_{\text{aria}} = 0.028 \text{ cm}^2/\text{g}$, si ricava:

$$\Phi_b = 5.42 \cdot 10^2 \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$$

Poiché, nel caso di sorgenti puntiformi ed isotrope, abbiamo:

$$\Phi_b = \frac{S \cdot B_m(\mu R) \cdot \exp(-\mu R)}{4\pi R^2} \text{ con } S = 10^8 \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}, \text{ possiamo scrivere:}$$

$$5.42 \cdot 10^2 = \frac{10^8 \cdot B_m(\mu R) \cdot \exp(-\mu R)}{4\pi R^2}, \text{ che può essere scritta come:}$$

$$1 = 1.47 \cdot 10^4 \frac{B_m(\mu R) \cdot \exp(-\mu R)}{4\pi R^2}$$

Questa equazione deve essere risolta per R. Questo può essere fatto riportando in grafico la parte destra dell'equazione in funzione di μR . Per questo, moltiplichiamo numeratore e denominatore per μ^2 .

$$\text{Si ottiene: } 1 = 1.47 \cdot 10^4 \frac{\mu^2 \cdot B_m(\mu R) \cdot \exp(-\mu R)}{4\pi (\mu R)^2}$$

Poiché per il Ferro ($\rho = 7.86 \text{ g/cm}^3$) all'energia di 1 MeV abbiamo $\mu/\rho = 0.0595 \text{ cm}^2/\text{g}$, si ricava:

$$\mu = 0.468 \text{ cm}^{-1}, \text{ che sostituito nella formula fornisce:}$$

$$1 = 3.22 \cdot 10^3 \frac{B_m(\mu R) \cdot \exp(-\mu R)}{(\mu R)^2}$$

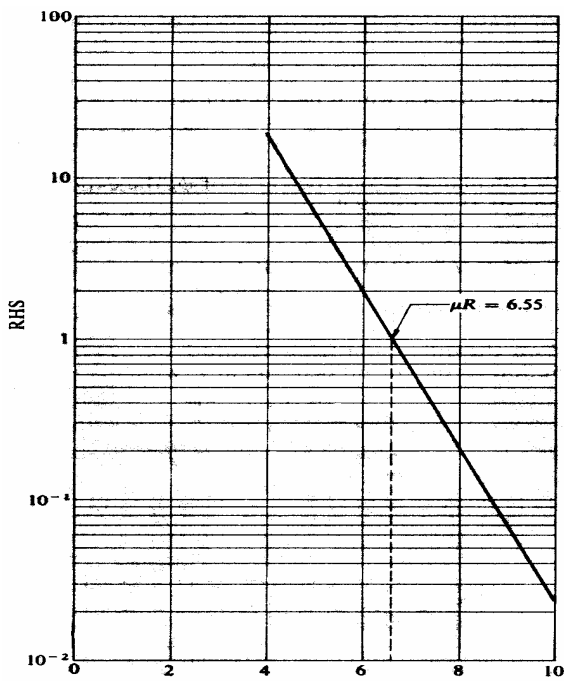


Fig. 19.7

Qui accanto è graficato l'andamento della funzione

$$f(x) = A \cdot \frac{1}{x^2} B_m(x) \cdot \exp(-x)$$

dove A è una costante numerica legata al particolare caso, e $x = \mu \cdot R$

Il grafico di figura 19.7 è ottenuto riportando in carta semilogaritmica la parte destra dell'equazione precedente al variare di μR (bastano due punti, visto che

l'andamento è rettilineo). La funzione assume il valore unitario per $\mu R = 6.55$, valore che rappresenta la soluzione del problema.

Pertanto: $R = 6.55/\mu = 6.55/0.468 = 14.0 \text{ cm}$

The Mass Attenuation Coefficient (μ/ρ) for Several Materials, in cm^2/g *

Material	Gamma-Ray Energy, MeV																	
	0.1	0.15	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.8	1.0	1.25	1.5	2	3	4	5	6	8	10
H	.295	.265	.243	.212	.189	.173	.160	.140	.126	.113	.103	.0876	.0691	.0579	.0502	.0446	.0371	.0321
Be	.132	.119	.109	.0945	.0847	.0773	.0715	.0628	.0565	.0504	.0459	.0394	.0313	.0266	.0234	.0211	.0180	.0161
C	.149	.134	.122	.106	.0953	.0870	.0805	.0707	.0636	.0568	.0518	.0444	.0356	.0304	.0270	.0245	.0213	.0194
N	.150	.134	.123	.106	.0955	.0869	.0805	.0707	.0636	.0568	.0517	.0445	.0357	.0306	.0273	.0249	.0218	.0200
O	.151	.134	.123	.107	.0953	.0870	.0806	.0708	.0636	.0568	.0518	.0445	.0359	.0309	.0276	.0254	.0224	.0206
Na	.151	.130	.118	.102	.0912	.0833	.0770	.0676	.0608	.0546	.0496	.0427	.0348	.0303	.0274	.0254	.0229	.0215
Mg	.160	.135	.122	.106	.0944	.0860	.0795	.0699	.0627	.0560	.0512	.0442	.0360	.0315	.0286	.0266	.0242	.0228
Al	.161	.134	.120	.103	.0922	.0840	.0777	.0683	.0614	.0548	.0500	.0432	.0353	.0310	.0282	.0264	.0241	.0229
Si	.172	.139	.125	.107	.0954	.0869	.0802	.0706	.0635	.0567	.0517	.0447	.0367	.0323	.0296	.0277	.0254	.0243
P	.174	.137	.122	.104	.0928	.0846	.0780	.0685	.0617	.0551	.0502	.0436	.0358	.0316	.0290	.0273	.0252	.0242
S	.188	.144	.127	.108	.0958	.0874	.0806	.0707	.0635	.0568	.0519	.0448	.0371	.0328	.0302	.0284	.0266	.0255
Ar	.188	.135	.117	.0977	.0867	.0790	.0730	.0638	.0573	.0512	.0468	.0407	.0338	.0301	.0279	.0266	.0248	.0241
K	.215	.149	.127	.106	.0938	.0852	.0786	.0689	.0618	.0552	.0505	.0438	.0365	.0327	.0305	.0289	.0274	.0267
Ca	.238	.158	.132	.109	.0965	.0876	.0809	.0708	.0634	.0566	.0518	.0451	.0376	.0338	.0316	.0302	.0285	.0280
Fe	.344	.183	.138	.106	.0919	.0828	.0762	.0664	.0595	.0531	.0485	.0424	.0361	.0330	.0313	.0304	.0295	.0294
Cu	.427	.206	.147	.108	.0916	.0820	.0751	.0654	.0585	.0521	.0476	.0418	.0357	.0330	.0316	.0309	.0303	.0305
Mo	1.03	.389	.225	.130	.0998	.0851	.0761	.0648	.0575	.0510	.0467	.0414	.0365	.0349	.0344	.0344	.0349	.0359
Sn	1.58	.563	.303	.153	.109	.0886	.0776	.0647	.0568	.0501	.0459	.0408	.0367	.0355	.0355	.0358	.0368	.0383
I	1.83	.648	.339	.165	.114	.0913	.0792	.0653	.0571	.0502	.0460	.0409	.0370	.0360	.0361	.0365	.0377	.0394
W	4.21	1.44	.708	.293	.174	.125	.101	.0763	.0640	.0544	.0492	.0437	.0405	.0402	.0409	.0418	.0438	.0465
Pt	4.75	1.64	.795	.324	.191	.135	.107	.0800	.0659	.0554	.0501	.0445	.0414	.0411	.0418	.0427	.0448	.0477
Tl	5.16	1.80	.866	.346	.204	.143	.112	.0824	.0675	.0563	.0508	.0452	.0420	.0416	.0423	.0433	.0454	.0484
Pb	5.29	1.84	.896	.356	.208	.145	.114	.0836	.0684	.0569	.0512	.0457	.0421	.0420	.0426	.0436	.0459	.0489
U	10.60	2.42	1.17	.452	.259	.176	.136	.0952	.0757	.0615	.0548	.0484	.0445	.0440	.0446	.0455	.0479	.0511
Air	.151	.134	.123	.106	.0953	.0868	.0804	.0706	.0655	.0567	.0517	.0445	.0357	.0307	.0274	.0250	.0220	.0202
NaI	1.57	.568	.305	.155	.111	.0901	.0789	.0657	.0577	.0508	.0465	.0412	.0367	.0351	.0347	.0347	.0354	.0366
H ₂ O	.167	.149	.136	.118	.106	.0966	.0896	.0786	.0706	.0630	.0575	.0493	.0396	.0339	.0301	.0275	.0240	.0219
Concrete	.169	.139	.124	.107	.0954	.0870	.0804	.0706	.0635	.0567	.0517	.0445	.0363	.0317	.0287	.0268	.0243	.0229
Fissile	.163	.144	.132	.115	.100	.0936	.0867	.0761	.0683	.0600	.0556	.0478	.0384	.0329	.0292	.0267	.0233	.0212

Tab. 19.3 coefficiente di attenuazione massico μ/ρ in diversi materiali

Esercizio 3

Un fascio parallelo di fotoni di energia $E_0 = 6 \text{ MeV}$ ed intensità $\varphi_0 = 10^6 \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}$ deve essere schermato con 100 cm di acqua e 8 cm di piombo. Calcolare l'intensità di esposizione con l'acqua posta prima (i), oppure dopo (ii) il piombo.

In entrambi i casi il flusso dei fotoni oltre la barriera è dato da:

$$\varphi_b = \varphi_0 B_m \cdot \exp[-(\mu_{pb} a_{pb} + \mu_w a_w)]$$

Dove B_m rappresenta l'appropriato coefficiente di buildup, e:

$$\mu_{pb} = 0.4944; \quad a_{pb} = 8 \text{ cm}; \quad \mu_{pb} a_{pb} = 3.96$$

$$\mu_w = 0.0275; \quad a_w = 100 \text{ cm}; \quad \mu_w a_w = 2.75$$

Nel caso (i) abbiamo quindi: $B_m = B_{pb}(3.96) = 1.86$

Il valore è stato ottenuto interpolando opportunamente sulla tabella. Pertanto:

$$\varphi_b = \varphi_0 B_m \cdot \exp[-(\mu_{Pb} a_{Pb} + \mu_w a_w)] = 10^6 \cdot 1.86 \cdot e^{-(2.75+3.96)} = 2.27 \cdot 10^3 \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$$

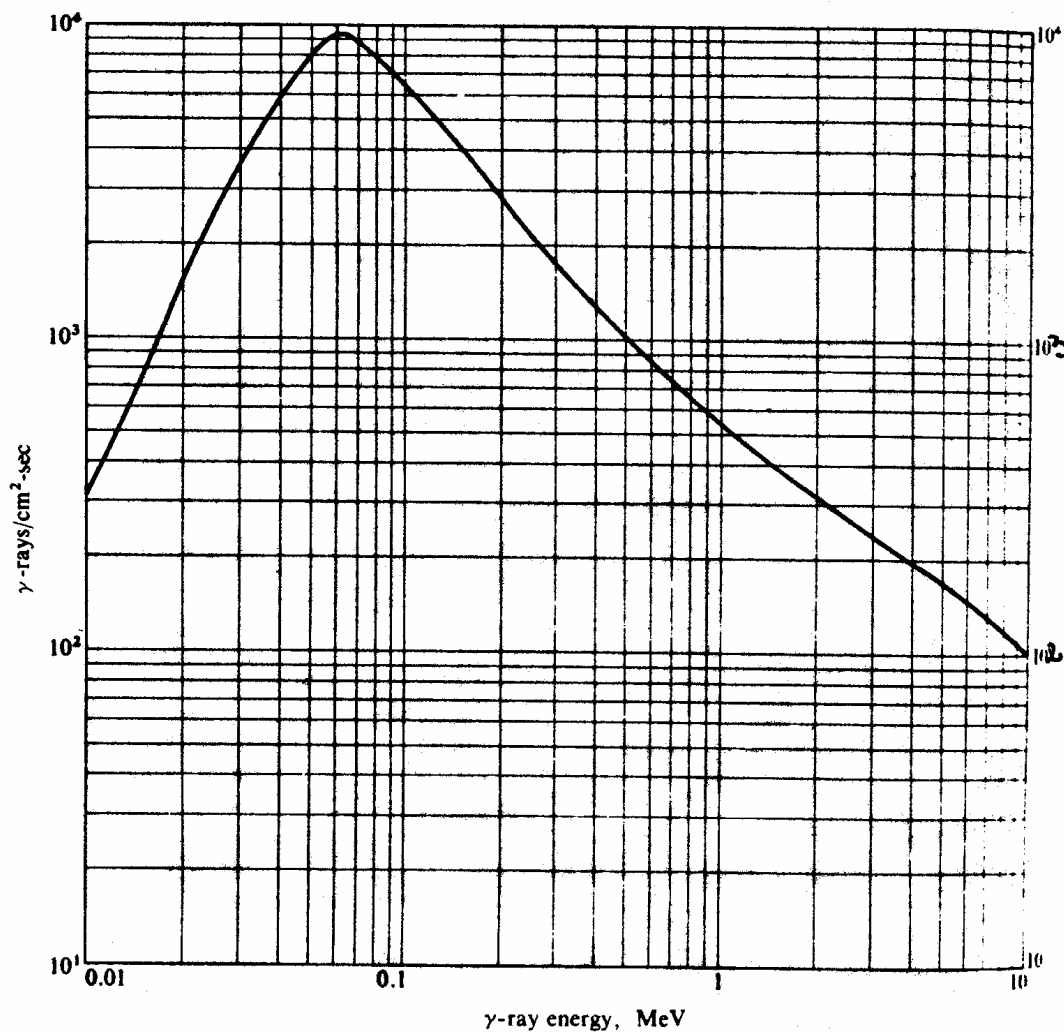


Fig. 19.8 intensità di fluena di fotoni ($\text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}$) di energia E_γ corrispondente ad una intensità di Esposizione pari ad 1 mR/h

Utilizzando il solito grafico (fig. 19.8) si ricava: $\dot{X} = \frac{2.27 \cdot 10^3}{150} \cdot 1 = 15.1 \text{ mR/h}$.

Nel caso (ii) B_m è invece dato da: $B_m = B_{Pb}(3.96) \cdot B_w(2.75)$, dove $B_w(2.75)$ è valutato all'energia di 3.2 MeV, corrispondente al minimo dell'andamento di μ_{Pb} , e nuovamente $B_{Pb}(3.96) = 1.86$. Pertanto: $B_m = 1.86 \cdot 2.72 = 5.06$.

il flusso di buildup allora vale: $\varphi_b = 10^6 \cdot 5.06 \cdot e^{-(2.75+3.96)} = 6.17 \cdot 10^3 \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$, che fornisce per l'intensità di esposizione il valore: $\dot{X} = \frac{6.17 \cdot 10^3}{150} \cdot 1 = 41.1 \text{ mR/h}$. Come

si vede l'intensità di esposizione risulta tre volte più bassa quando lo schermo d'acqua è messo prima del piombo.

Esercizio 4

Calcolare il flusso ($\text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}$) di un fascio di fotoni di energia $E = 0.5 \text{ MeV}$ massima tale da non superare una intensità di esposizione di 2 mR/h . Supposto il fascio parallelo, calcolare l'intensità di esposizione oltre una barriera di spessore $a = 120 \text{ cm}$ di acqua.

Dal grafico di figura 19.8 si ricava che per $E = 0.5 \text{ MeV}$ un flusso $\Phi^* = 1.1 \cdot 10^3 \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}$ corrisponde ad una intensità di esposizione $\dot{X}^* = 1 \text{ mR/h}$. Pertanto il flusso necessario per produrre una intensità di esposizione $\dot{X}_0 = 2 \text{ mR/h}$ vale $\phi_0 = 2.2 \cdot 10^3 \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}$

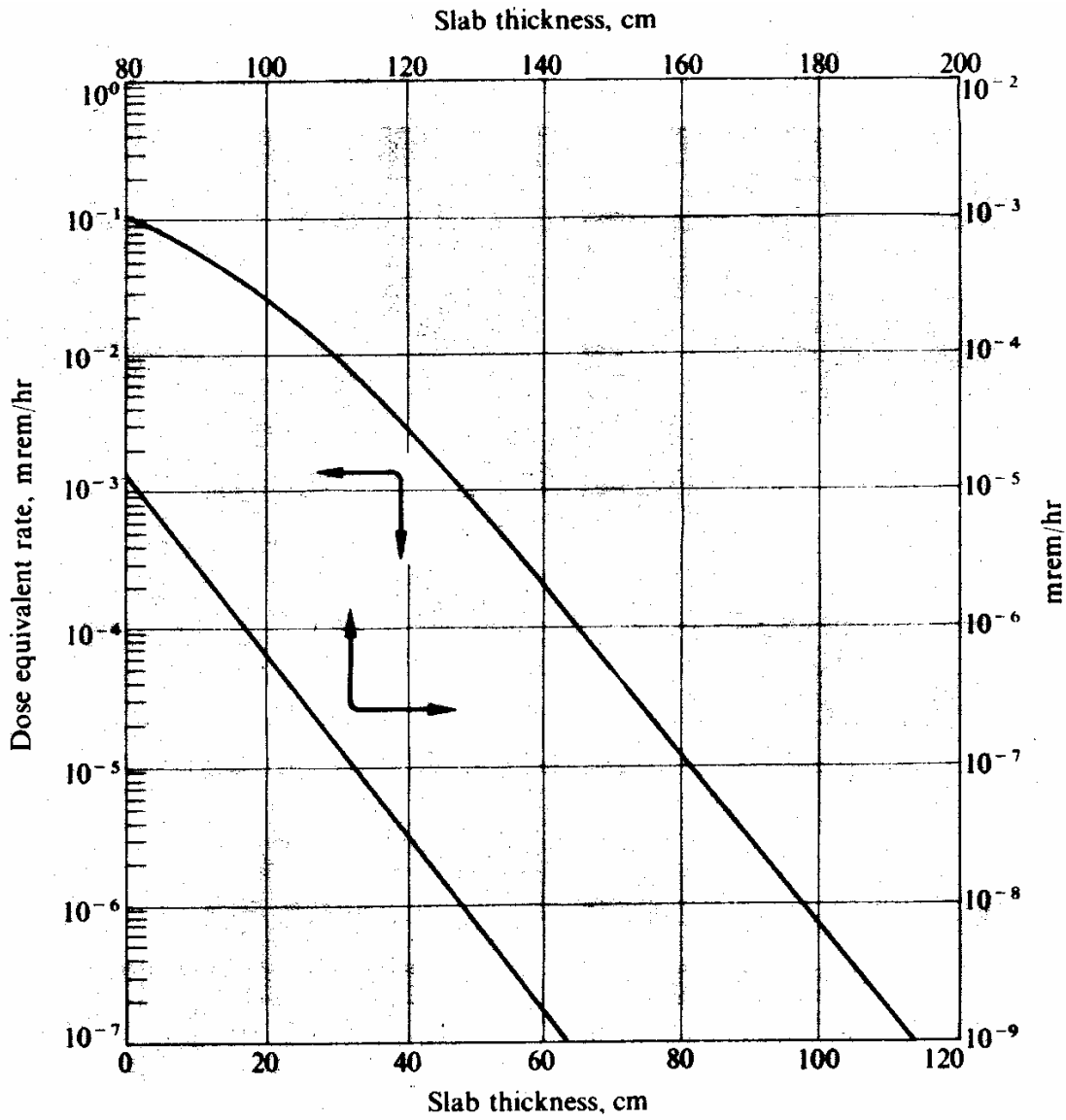
Inoltre, essendo il coefficiente di attenuazione di fotoni di energia $E = 0.5 \text{ MeV}$ in acqua pari a: $\mu = 0.0966 \text{ cm}^2\text{g}^{-1}$ avremo: $\mu a = 11.59$. Dalla tabella del buildup per fasci paralleli si ricava: $B_m(11.59) = 48.4$. Pertanto:

$$\dot{X} = \dot{X}_0 \cdot B_m(\mu a) \cdot e^{-\mu a} = 2 \cdot 48.4 \cdot \exp(-11.59) = 9.7 \cdot 10^{-4} \text{ mR/h}$$

19.5 Schermature per neutroni

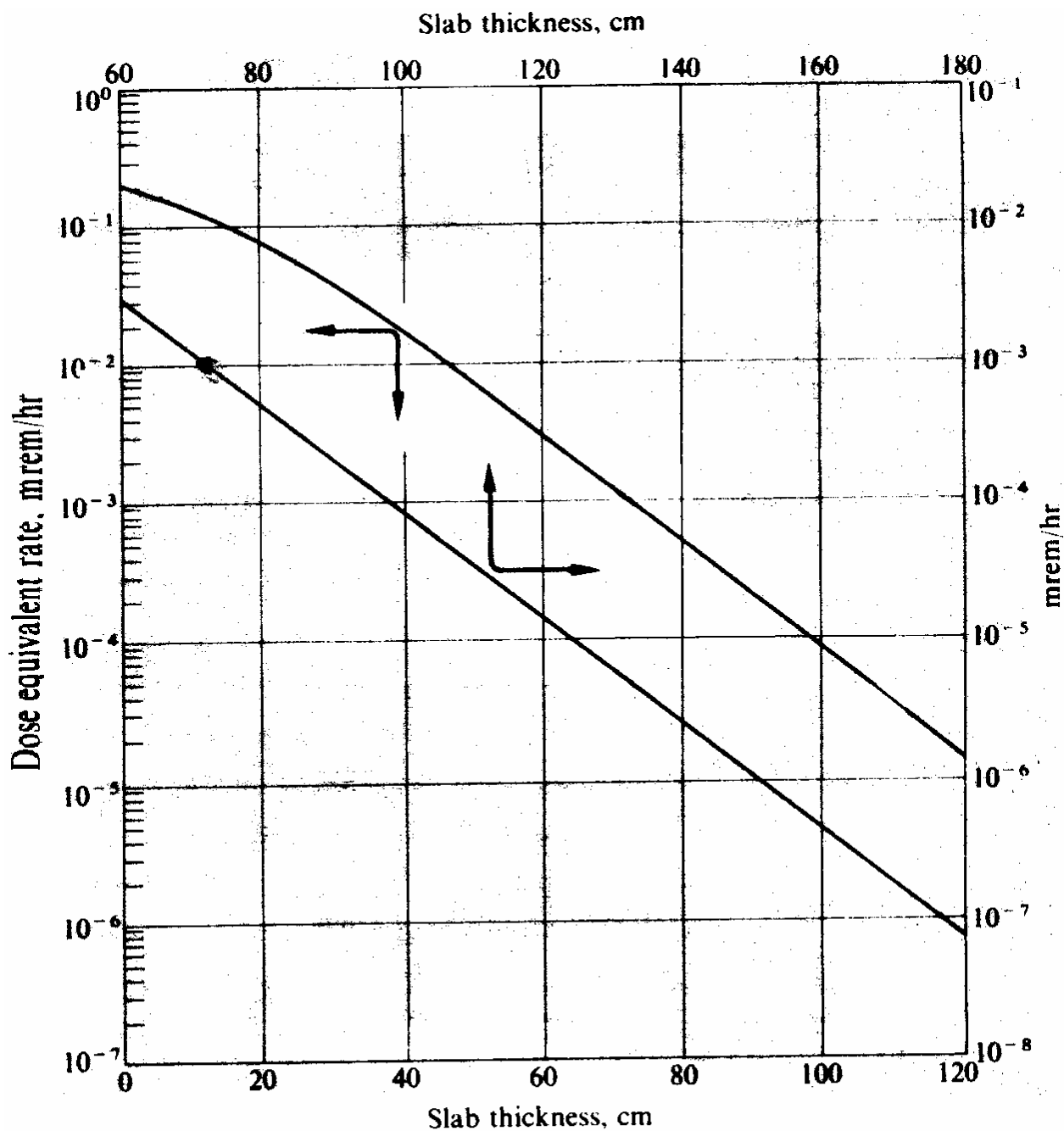
Il calcolo degli schermi per neutroni è molto più complesso, in quanto le reazioni possibili in gioco sono molteplici, con dipendenza dall'energia del neutrone e dal materiale molto più complicate. Esistono delle valutazioni analitiche, ma i risultati ottenuti sono per forza di cose estremamente approssimati e non generali. I calcoli migliori e più completi sono stati in questi ultimi anni eseguiti a calcolatore utilizzando il metodo Montecarlo. Qui riportiamo solo i risultati di maggiore interesse applicativo: essi sono riassunti nelle figure che seguono. Vale la pena di osservare che i risultati sono sempre espressi in equivalente di dose, cioè tengono già conto del cosiddetto fattore di qualità Q dei neutroni e della dose gamma aggiuntiva. Il calcolo di Montecarlo, mediante la simulazione delle possibili interazioni dei neutroni con la materia procede infatti seguendo non solo le storie individuali dei neutroni, ma anche delle radiazioni (essenzialmente gamma) da essi messe in moto all'interno della schermatura. Il risultato finale permette quindi di valutare, a valle della schermatura, l'equivalente di dose totale dovuto sia ai neutroni che emergono, che ai fotoni generati all'interno della schermatura per interazioni (n,γ) o per tutti gli altri canali (n,α) , (n,p) , (n,n') a seguito di scattering anelatici. Dal punto di vista pratico le energie più importanti sono quelle dei neutroni di fissione, quindi di qualche MeV, e quelle dei neutroni da 14 MeV provenienti dalla reazione di fusione: ${}^2\text{H} + {}^3\text{H} \rightarrow n + {}^4\text{He}$

Quanto al materiale schermante, esso è quasi sempre calcestruzzo: non ha infatti alcun senso utilizzare materiali pesanti come il piombo, in quanto molto meno efficaci per il rallentamento dei neutroni, come già visto precedentemente nel capitolo 13 a proposito delle interazioni dei neutroni con la materia. I grafici che seguono si riferiscono quindi essenzialmente a calcoli di Montecarlo effettuati sul calcestruzzo.



(a) Dose equivalent rate per unit intensity of 2-MeV neutrons incident on concrete slabs.

Fig. 19.10 frazione di equivalente di dose trasmessa in funzione dello spessore di una barriera di calcestruzzo per neutroni da 2 MeV



(b) Dose equivalent rate per unit intensity of 14-MeV neutrons incident on concrete slabs.

Fig. 19.11 frazione di equivalente di dose trasmessa in funzione dello spessore di una barriera di calcestruzzo per neutroni da 14 MeV

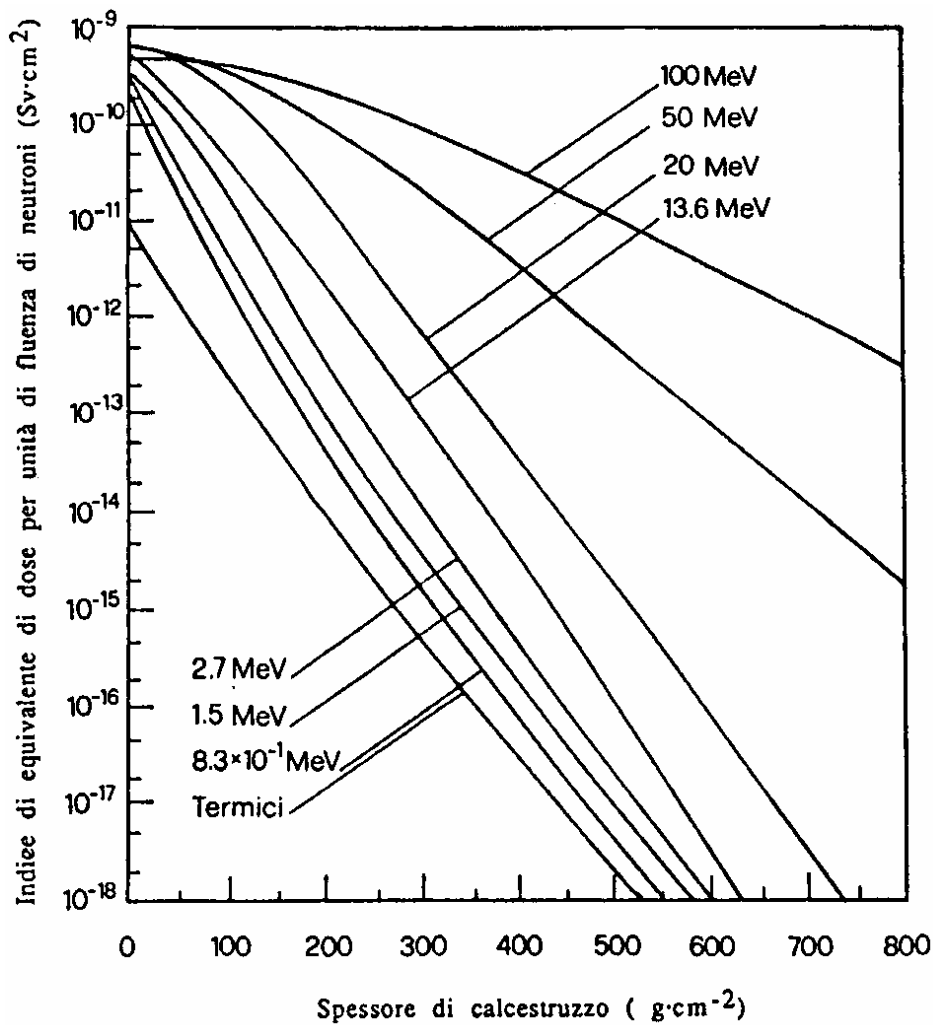


Fig. 19.12 Indice di equivalente di dose per neutroni

In figura 19.12 è riportato l'indice di equivalente di dose f_n , definito come:

$$f_n = \frac{H^* d^2}{\Phi_0}$$

dove il significato dei simboli è spiegato in figura 19.13

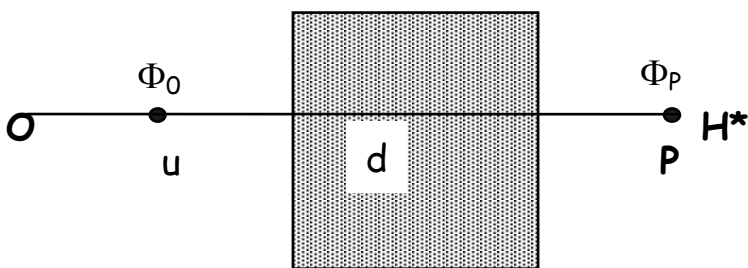


Fig. 19.13

H^* è il valore richiesto alla distanza d dalla sorgente, mentre ϕ_0 rappresenta l'intensità di flusso neutronica ad un metro. Una volta fissato il valore di f_n tramite la formula precedente, si può far ricorso ai grafici che di figura 19.12 per la determinazione dello spessore di barriera.

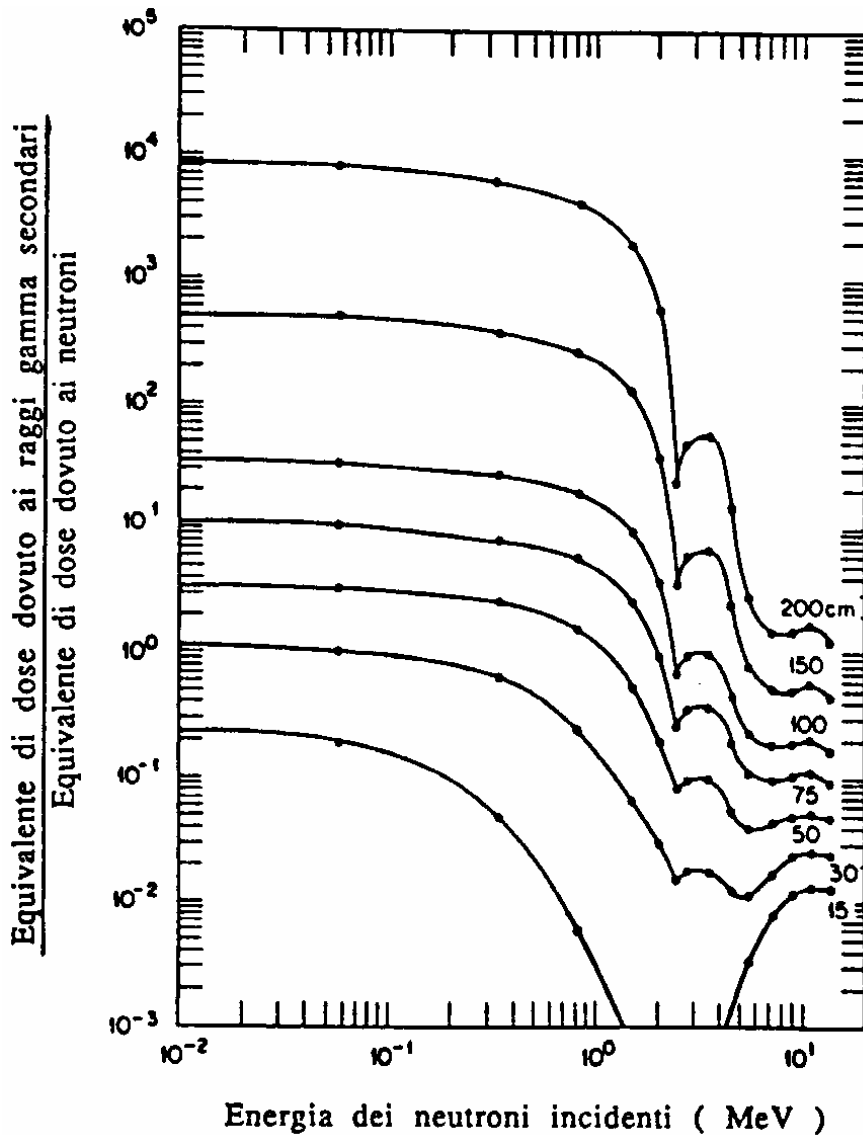


Fig. 19.13 rapporto H_γ/H_n

Nelle figure 19.13 e 19.14 è riportato il rapporto tra l'equivalente di dose dovuto ai neutroni e quello dovuto ai gamma secondari generato dalle interazioni dei neutroni con la schermatura in funzione del suo spessore. Questo equivalente di dose va aggiunto a quello fornito dai conti ottenuti per i soli neutroni.

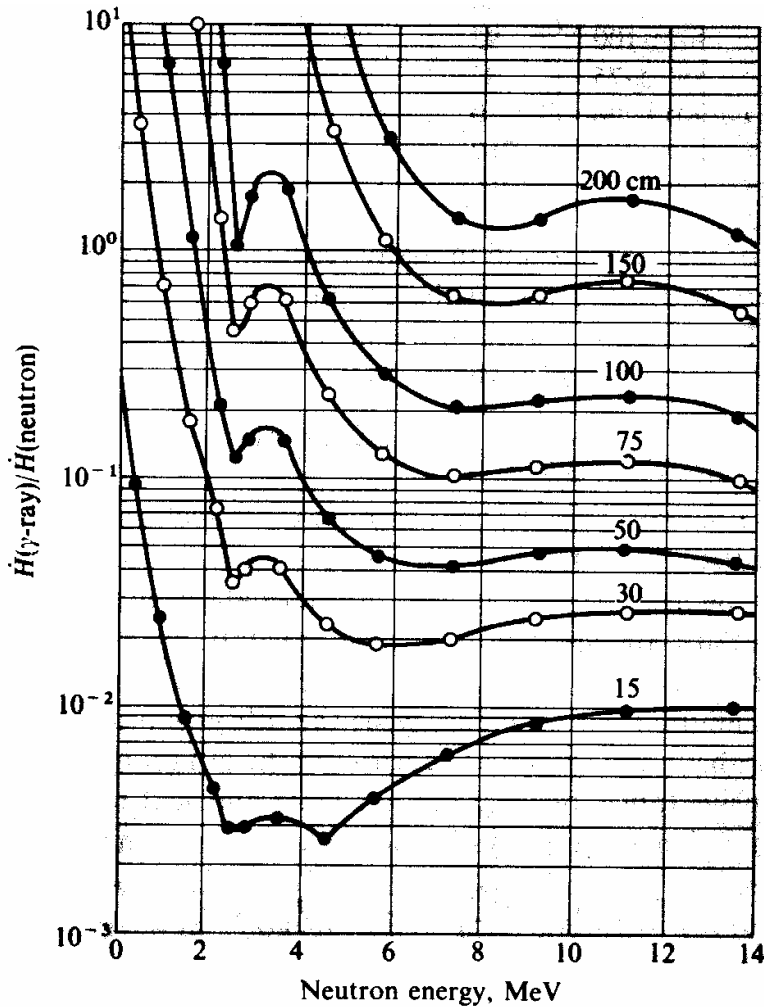


Fig. 19.14 rapporto H_γ/H_n

Esercizio 5

Un generatore produce neutroni da 14 MeV distribuiti isotropicamente con una intensità $I = 10^9$ neutroni al secondo attraverso la reazione: ${}^2\text{H} + {}^3\text{H} \rightarrow n + {}^4\text{He}$
 Calcolare lo spessore di una schermatura di cemento affinché a tre metri di distanza dalla sorgente l'equivalente di dose sia pari a $10 \mu\text{Sv/h}$. (ossia 1 mrem/h)
 In assenza di schermature, a tre metri di distanza il flusso di neutroni sarebbe:

$$\Phi = \frac{I}{4\pi d^2} = 885 \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}$$

Ricordando la figura 18.16 qui riportata per chiarezza, questo flusso corrisponderebbe ad un equivalente di dose $\dot{H} = 885/6.8 = 130 \text{ mrem/h} = 1.3 \text{ mSv/h}$

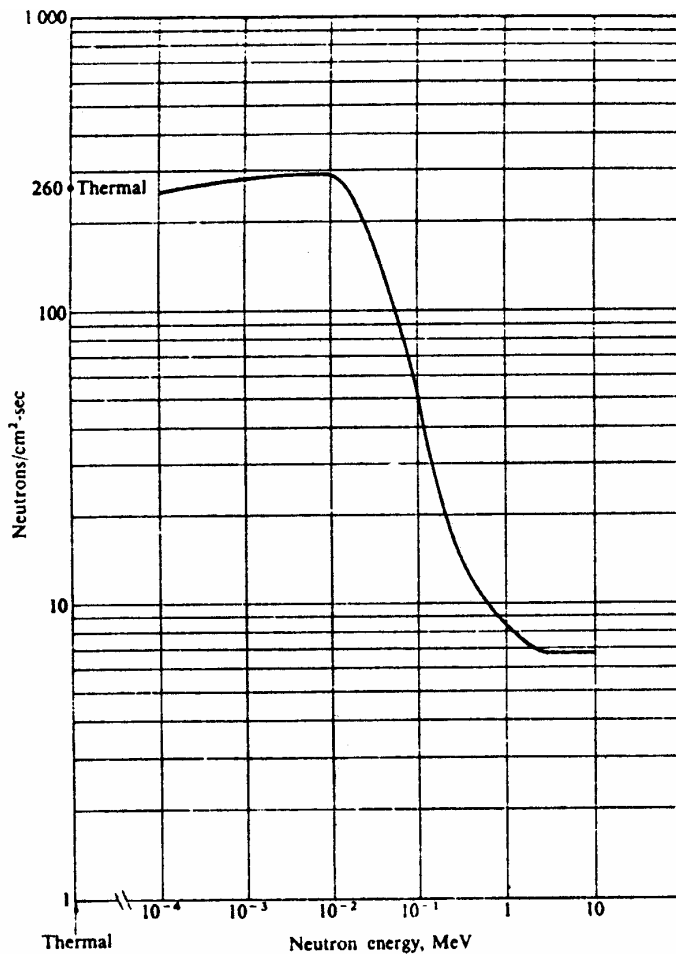


Fig. 19.15 Intensità di fluena neutronica corrispondente ad $\dot{H} = 1$ mrem/h

Utilizziamo ora il grafico relativo all'attenuazione dei neutroni da 14 MeV (figura 19.11). Poiché esso fornisce l'intensità di equivalente di dose \dot{H}_0 relativa ad un flusso unitario, dobbiamo imporre che al di là della barriera valga la relazione: $\dot{H} = 885 \cdot \dot{H}_0 = 1$ mrem/h. Ossia: $\dot{H}_0 = \frac{1}{885} = 1.13 \cdot 10^{-3}$ mrem/h

Si vede che questo valore corrisponde ad uno spessore $x = 70$ cm di calcestruzzo.

Esercizio 6

Una sorgente puntiforme di neutroni di energia $E = 2$ MeV ed intensità $I = 10^9$ neutroni al secondo è collocata al centro di un locale quadrato di lato esterno $L = 9$ metri. Quale deve essere lo spessore delle pareti di cemento della camera se l'intensità di equivalente di dose per neutroni non deve superare i $25 \mu\text{Sv/h}$ (2.5 mrem/h) in alcun punto esterno al locale.

Essendo la stanza quadrata, il flusso massimo si avrà nei punti di distanza minima dalla sorgente, corrispondenti alla distanza d pari alla metà del lato L ($d = \frac{1}{2}L$)

$$\varphi = \frac{I}{4\pi d^2} = 3.9 \cdot 10^2 \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}$$

Dobbiamo allora imporre che al di là della barriera valga la relazione:

$$\dot{H} = 3.9 \cdot 10^2 \cdot \dot{H}_0 = 2.5 \text{ mrem/h.} \quad \text{Ossia: } \dot{H}_0 = \frac{2.5}{3.9 \cdot 10^2} = 6.4 \cdot 10^{-3} \text{ mrem/h}$$

Dal grafico di figura 19.10 relativo a neutroni da 2 MeV, si ricava che le pareti devono avere uno spessore di calcestruzzo pari a 33 cm.

Utilizzo del kerma nei calcoli di schermature neutroniche

Abbiamo già visto nel capitolo 18 come si definisce il kerma per le particelle non direttamente ionizzanti, ed in particolare proprio per i neutroni.

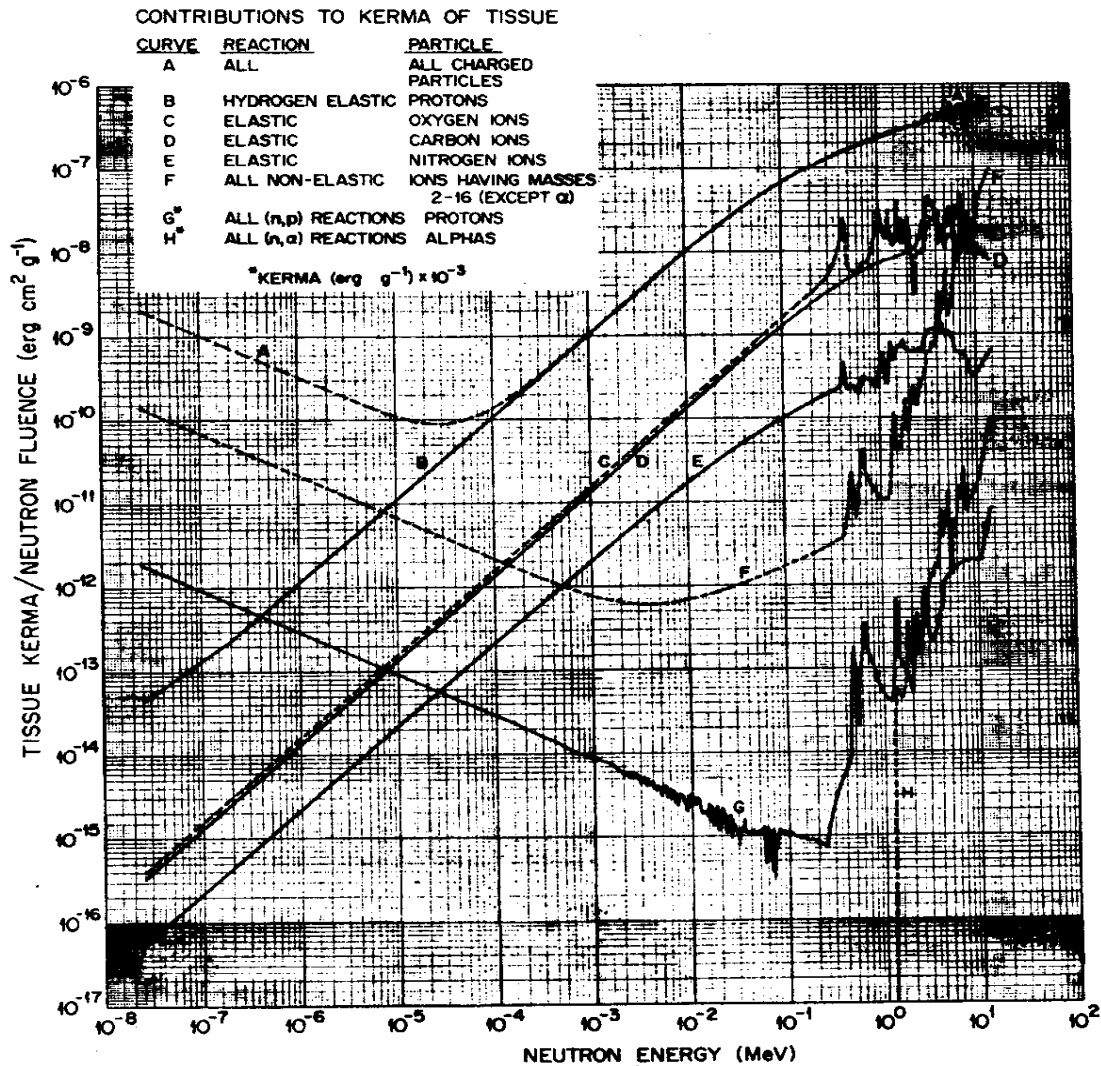
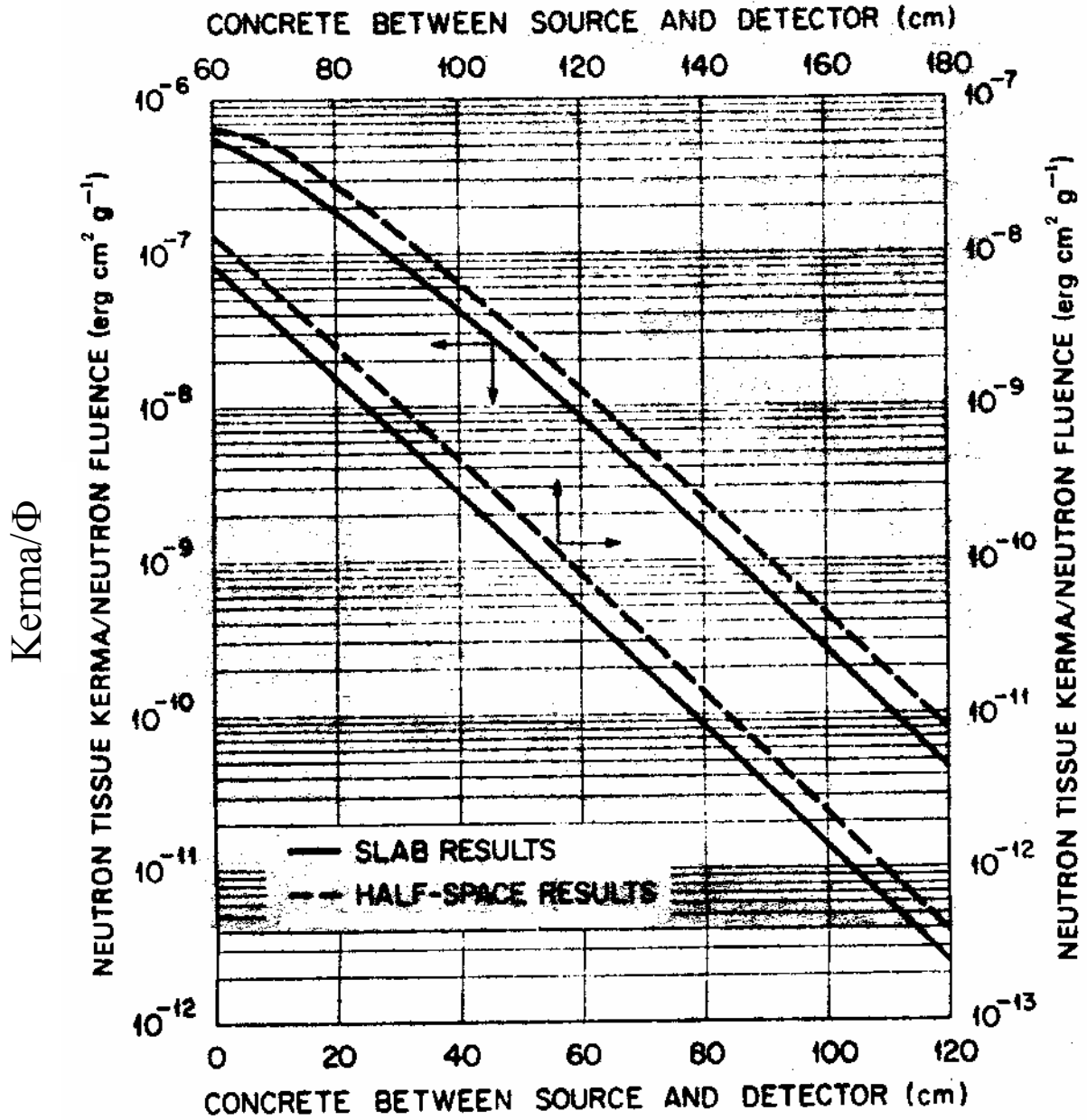


Fig. 19.16 k/Φ kerma al tessuto per unità di fluena neutronica

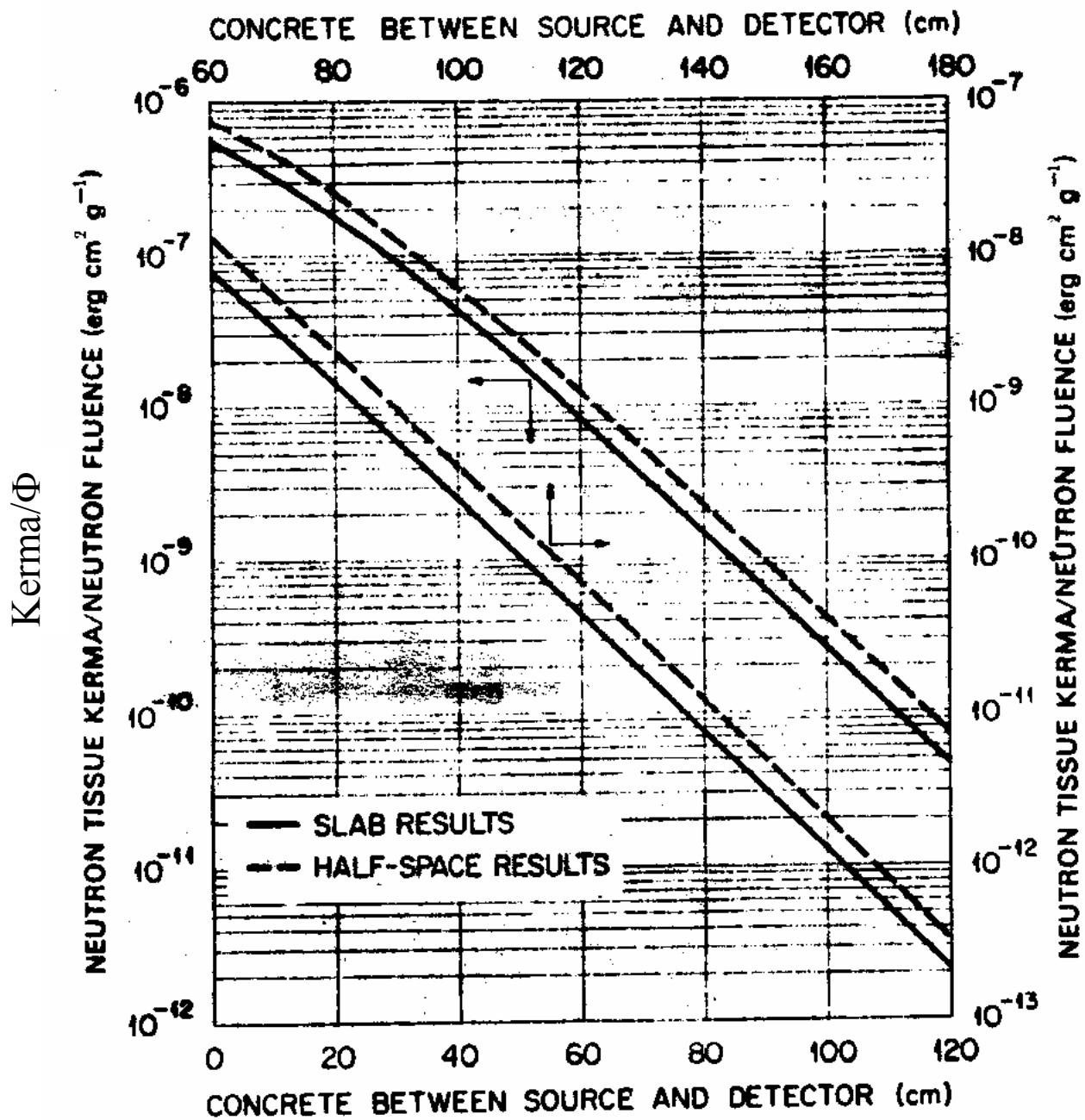
Nei grafici che seguono sono riportati i valori del kerma per flusso unitario $\frac{k}{\Phi}$, che numericamente coincide con il valore della intensità di kerma per intensità di flusso

unitario, ossia la grandezza $\frac{k}{\phi}$ espressa sempre in $\text{erg}\cdot\text{cm}^2/\text{g}$ (essendo $\phi = \Phi$ il flusso di neutroni espresso in $\text{cm}^{-2}\cdot\text{s}^{-1}$). I grafici si riferiscono al calcestruzzo e sono relativi a varie energia di neutrone incidente.



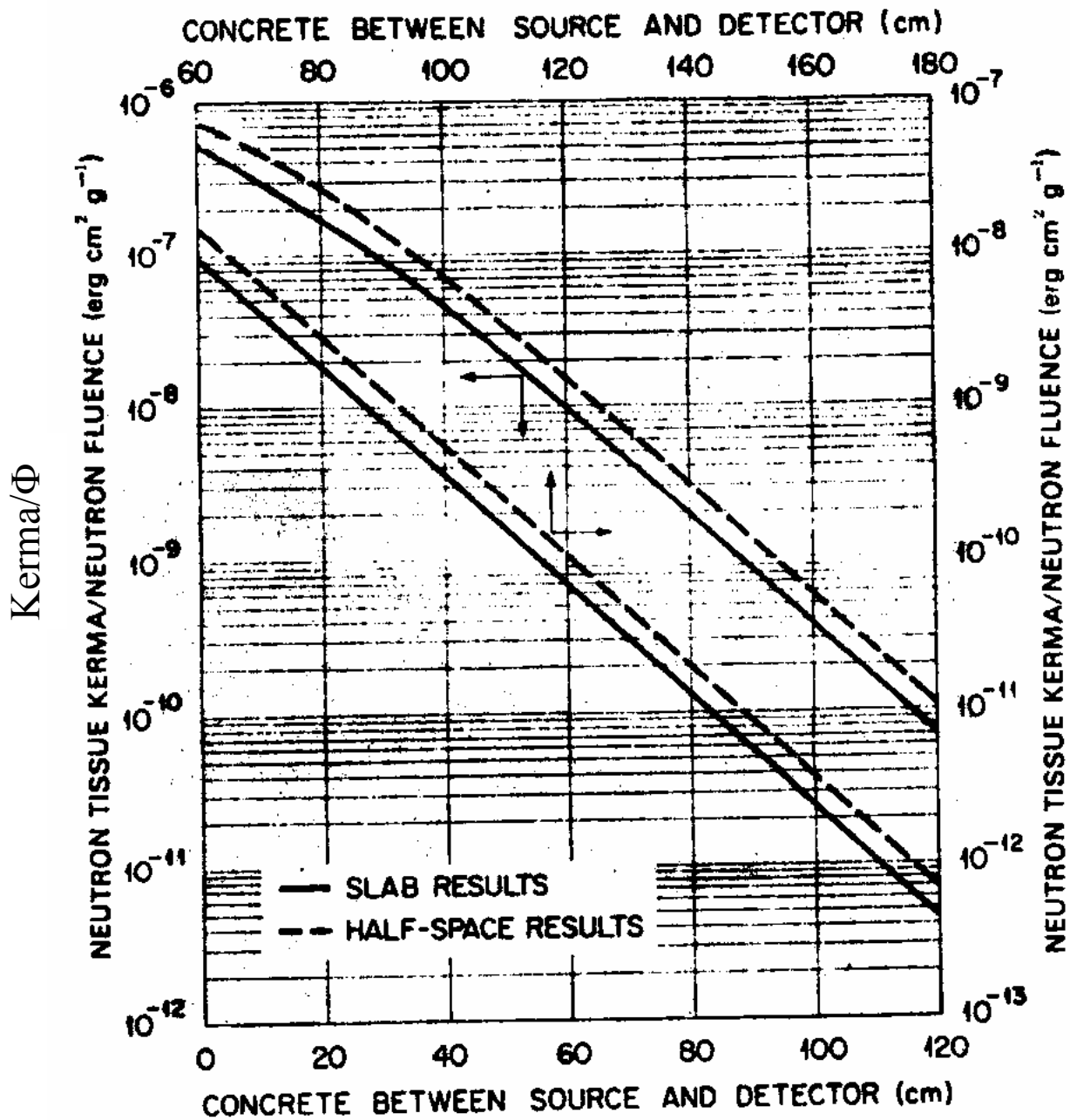
Energia dei neutroni: $E = 14 \text{ MeV}$

Fig. 19.17 k/Φ kerma al tessuto per unità di fluena neutronica in funzione dello spessore di barriera di calcestruzzo



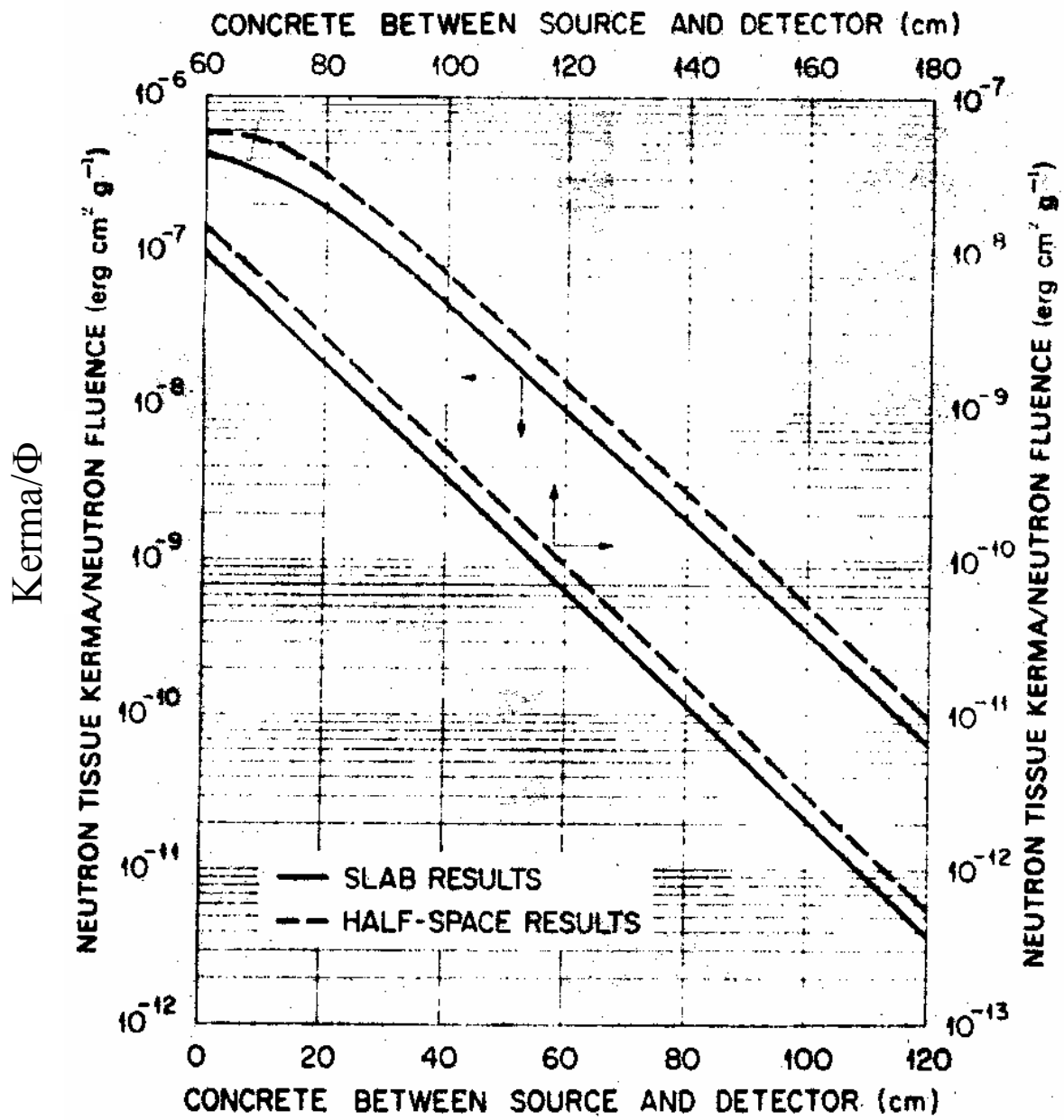
Energia dei neutroni: $E = 12 \text{ MeV}$

Fig. 19.18 k/Φ kerma al tessuto per unità di fluenza neutronica in funzione dello spessore di barriera di calcestruzzo



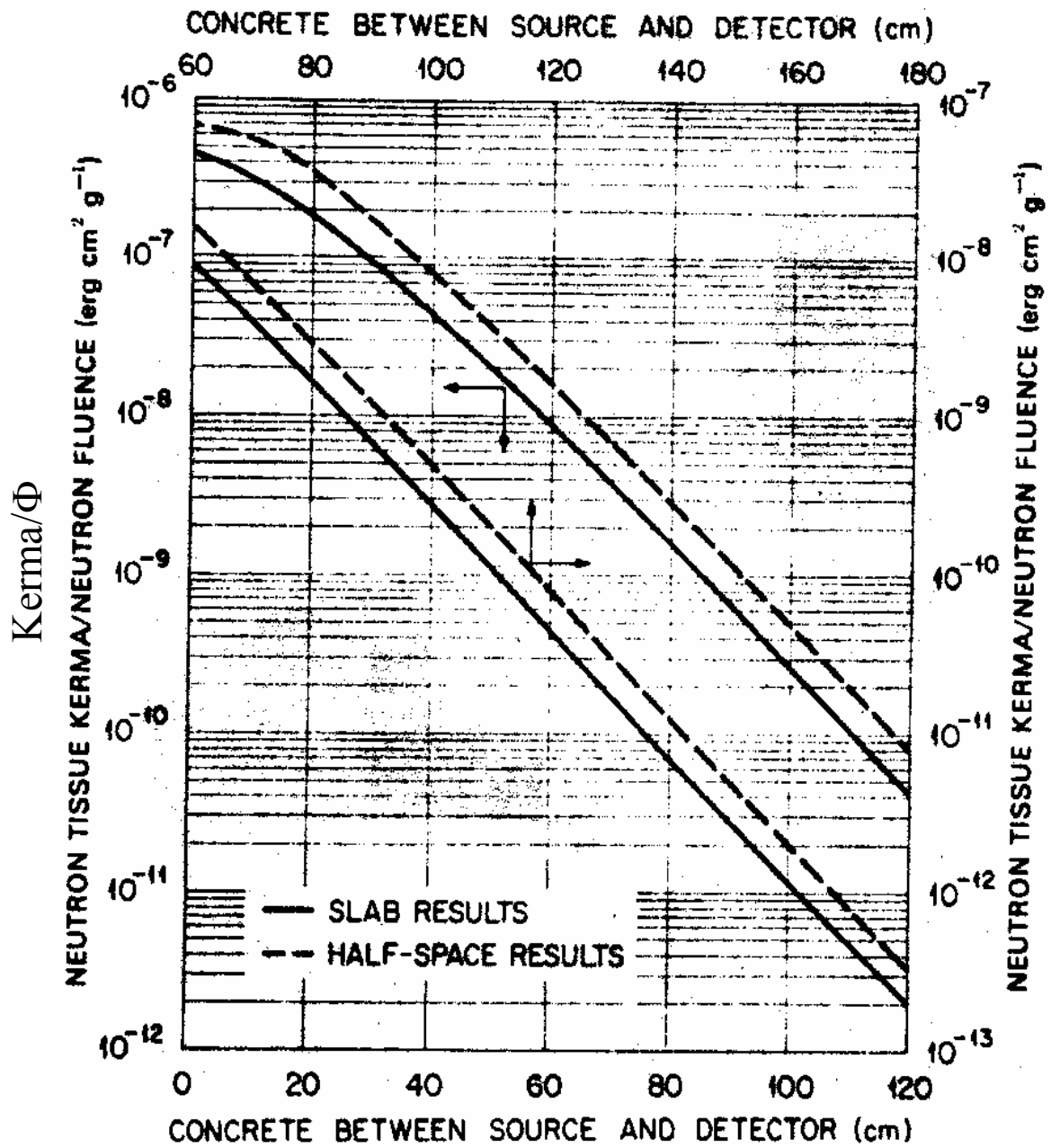
Energia dei neutroni: $E = 10 \text{ MeV}$

Fig. 19.19 k/Φ kerma al tessuto per unità di fluenza neutronica in funzione dello spessore di barriera di calcestruzzo



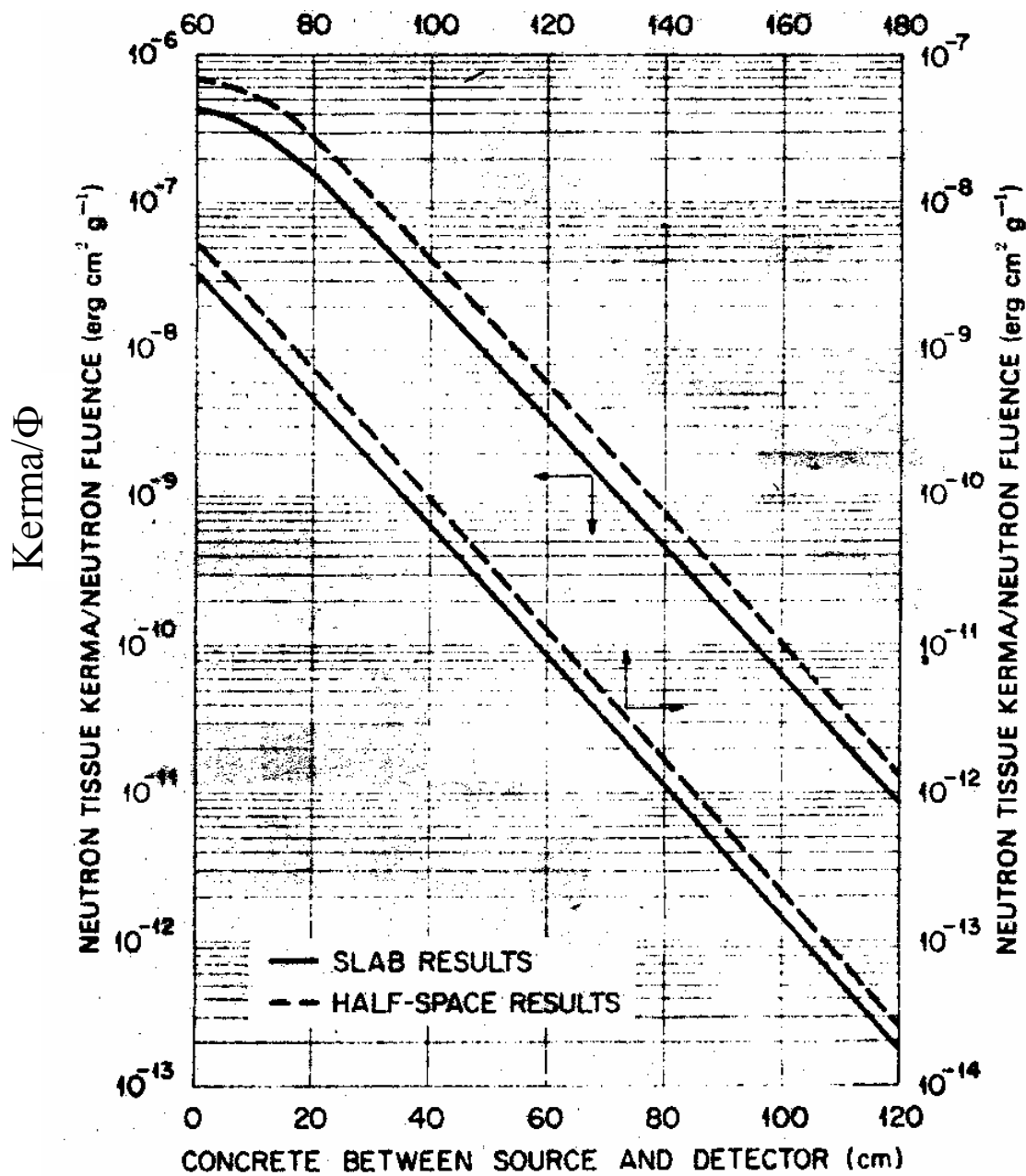
Energia dei neutroni: $E = 8$

Fig. 19.20 k/Φ kerma al tessuto per unità di fluensa neutronica in funzione dello spessore di barriera di calcestruzzo



Energia dei neutroni: $E = 6$

Fig. 19.21 k/Φ kerma al tessuto per unità di fluena neutronica in funzione dello spessore di barriera di calcestruzzo



Energia dei neutroni: $E = 4 \text{ MeV}$

Fig. 19.22 k/Φ kerma al tessuto per unità di fluenza neutronica in funzione dello spessore di barriera di calcestruzzo

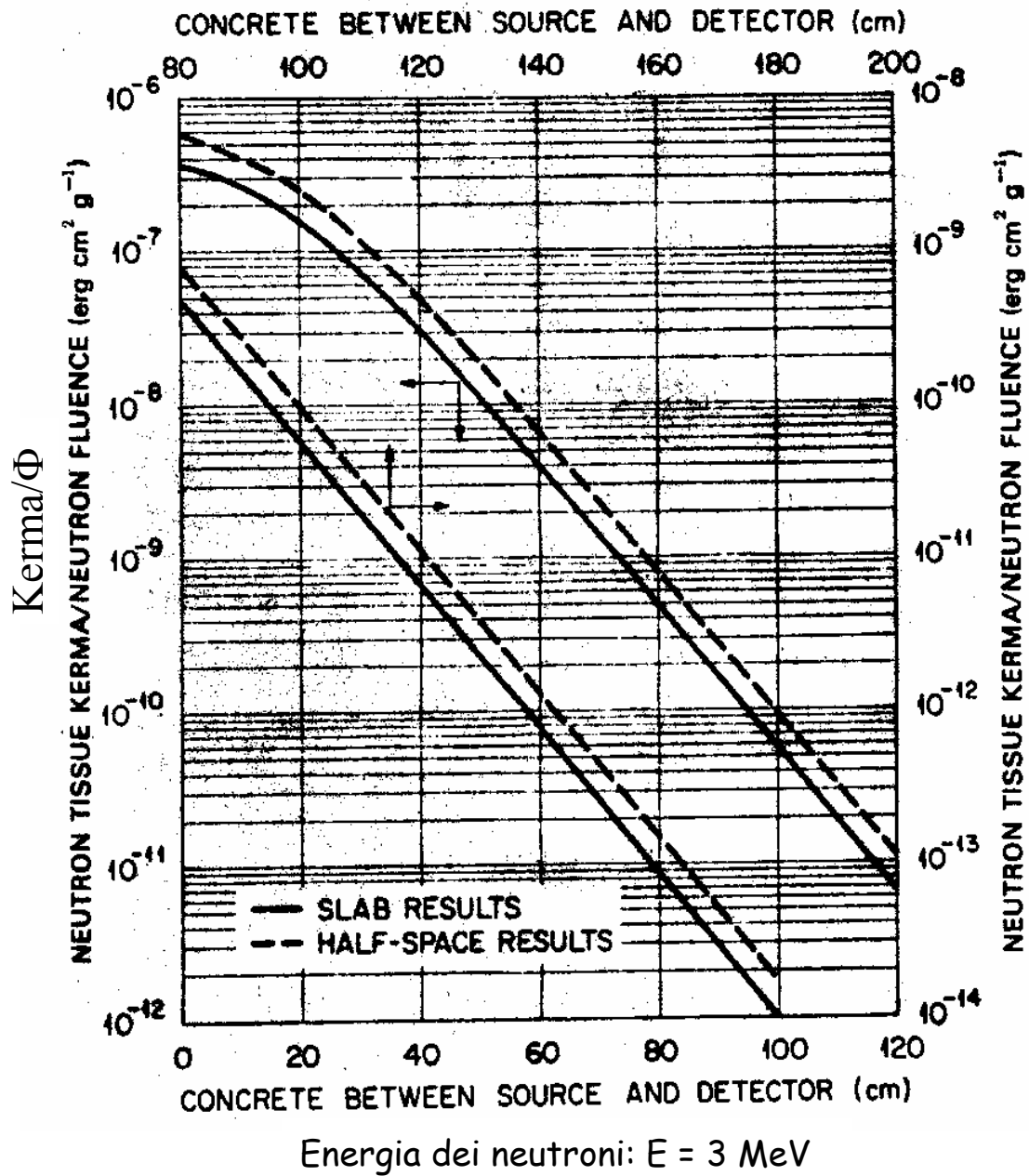
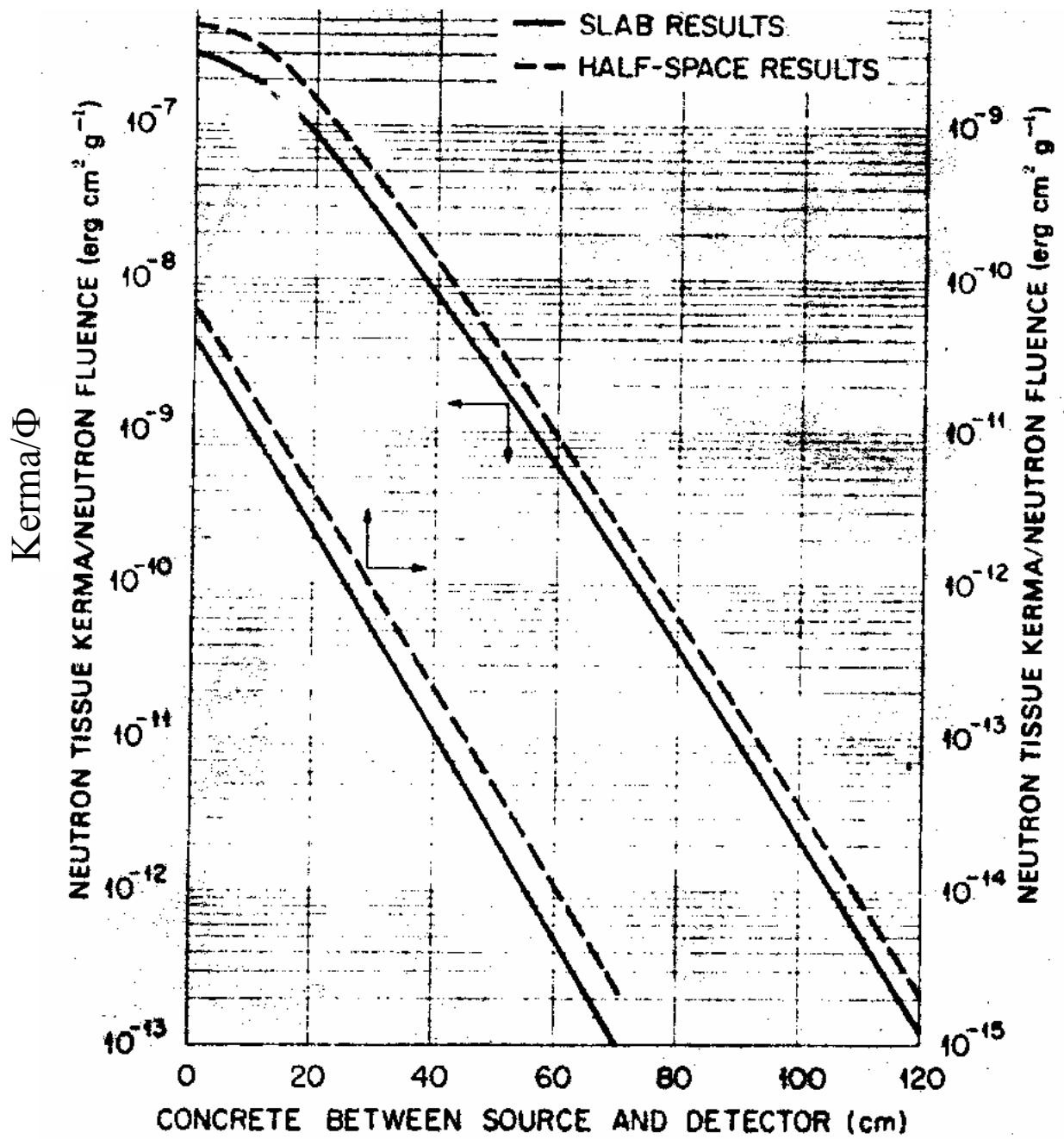
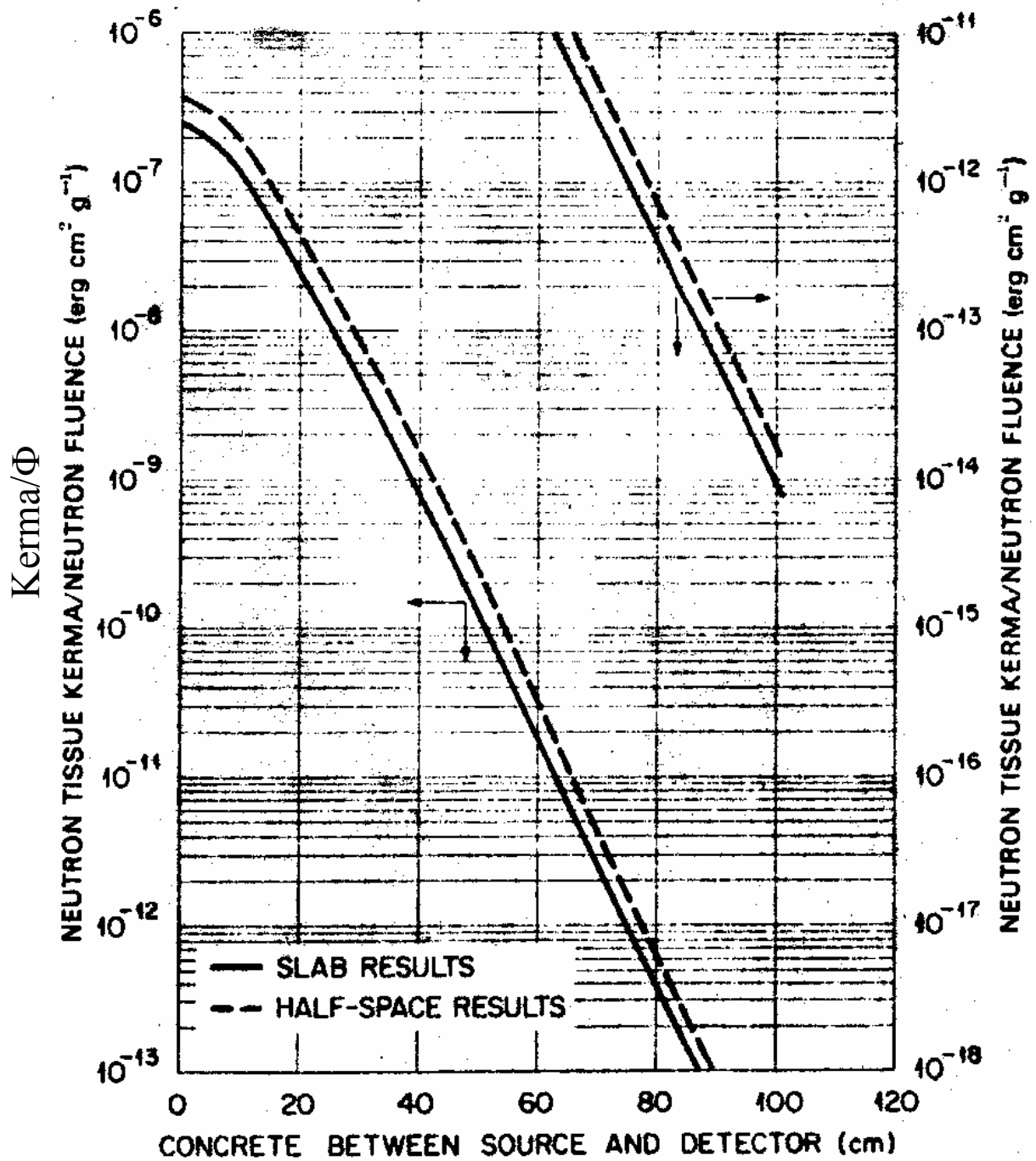


Fig. 19.23 k/Φ kerma al tessuto per unità di fluena neutronica in funzione dello spessore di barriera di calcestruzzo



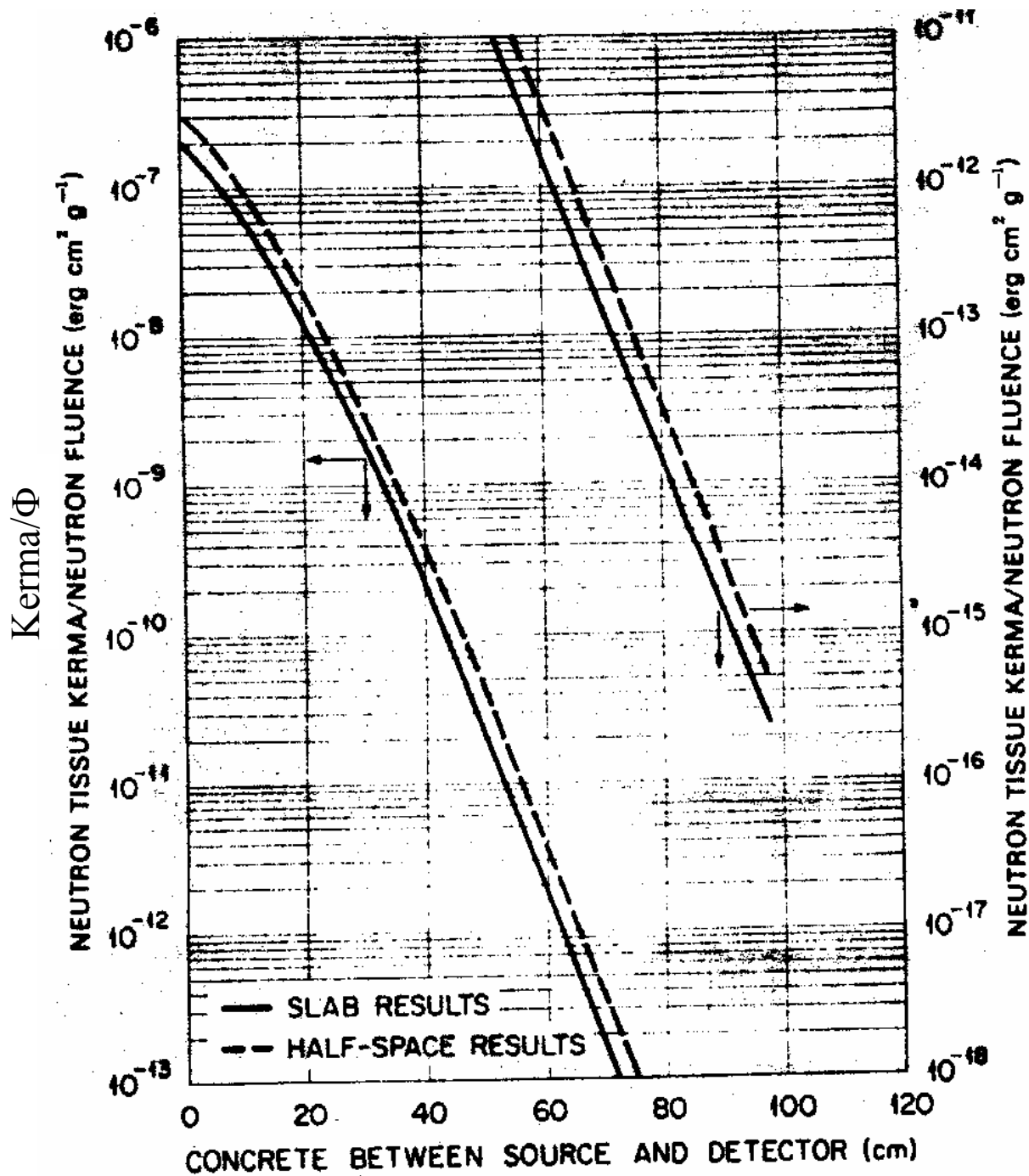
Energia dei neutroni: $E = 2 \text{ MeV}$

Fig. 19.24 k/Φ kerma al tessuto per unità di fluena neutronica in funzione dello spessore di barriera di calcestruzzo



Energia dei neutroni: $E = 1.3 \text{ MeV}$

Fig. 19.25 k/Φ kerma al tessuto per unità di fluensa neutronica in funzione dello spessore di barriera di calcestruzzo



Energia dei neutroni: $E = 0.7 \text{ MeV}$

Fig. 19.26 k/Φ kerma al tessuto per unità di fluenza neutronica in funzione dello spessore di barriera di calcestruzzo

Esercizio 7

Risolvere l'esercizio 5 ricorrendo alle figure che forniscono il rapporto kerma-flusso in funzione dello spessore di cemento. Essendo $\frac{\dot{k}}{\phi} = \frac{k}{\Phi}$ espresso in $\text{erg}\cdot\text{cm}^2/\text{g}$

converrà esprimere tutte le grandezze nel sistema cgs. Pertanto abbiamo:

$$\phi = 885 \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1} \quad \text{e} \quad \dot{H} = 1 \text{ mrem/h} = 2.78 \cdot 10^{-7} \text{ rem/s}$$

Per neutroni da 14 MeV il fattore qualità vale: $Q = 10$

$$\text{L'intensità di dose vale allora: } \dot{D} = \frac{\dot{H}}{Q} = 2.8 \cdot 10^{-8} \text{ rad/s} = 2.8 \cdot 10^{-6} \text{ erg}\cdot\text{g}^{-1}\text{s}^{-1}.$$

Supponendo di essere in condizioni di equilibrio delle particelle cariche scriviamo:

$$\dot{k} = \dot{D} = 2.8 \cdot 10^{-6} \text{ erg}\cdot\text{g}^{-1}\text{s}^{-1} \quad \text{e quindi: } \frac{\dot{k}}{\phi} = \frac{2.8 \cdot 10^{-6}}{885} = 3.2 \cdot 10^{-9} \text{ erg}\cdot\text{cm}^2\text{g}^{-1}$$

Dal grafico per neutroni da 14 MeV si ricava che lo spessore di calcestruzzo deve valere $d = 73 \text{ cm}$.

Esercizio 8

Risolvere l'esercizio 4 ricorrendo alle figure che forniscono il rapporto kerma-flusso in funzione dello spessore di cemento.

In questo caso abbiamo: $\dot{H} = 2.5 \text{ mrem/h} = 7 \cdot 10^{-7} \text{ rem/s}$

$$\dot{D} = \frac{\dot{H}}{Q} = 7 \cdot 10^{-8} \text{ rad/s} = 7 \cdot 10^{-6} \text{ erg}\cdot\text{g}^{-1}\text{s}^{-1}. \quad \text{Essendo inoltre: } \Phi = 3.9 \cdot 10^2 \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}, \text{ si}$$

ricava:

$$\frac{\dot{k}}{\phi} = \frac{7 \cdot 10^{-6}}{2.9 \cdot 10^2} = 1.8 \cdot 10^{-9} \text{ erg}\cdot\text{cm}^2\text{g}^{-1}$$

Dal grafico relativo a neutroni da 2 MeV si ricava che lo spessore di calcestruzzo deve valere $d = 32 \text{ cm}$.

Esercizio 8

Risolvere l'esercizio 4 ricorrendo alle figure che forniscono il rapporto kerma-flusso in funzione dello spessore di cemento.

In questo caso abbiamo: $\dot{H} = 2.5 \text{ mrem/h} = 7 \cdot 10^{-7} \text{ rem/s}$

$$\dot{D} = \frac{\dot{H}}{Q} = 7 \cdot 10^{-8} \text{ rad/s} = 7 \cdot 10^{-6} \text{ erg}\cdot\text{g}^{-1}\text{s}^{-1}. \quad \text{Essendo inoltre: } \Phi = 3.9 \cdot 10^2 \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}, \text{ si}$$

ricava:

$$\frac{\dot{k}}{\phi} = \frac{7 \cdot 10^{-6}}{2.9 \cdot 10^2} = 1.8 \cdot 10^{-9} \text{ erg}\cdot\text{cm}^2\text{g}^{-1}$$

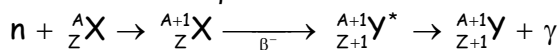
Dal grafico relativo a neutroni da 2 MeV si ricava che lo spessore di calcestruzzo deve valere $d = 32 \text{ cm}$.

Capitolo 20

Applicazioni della fisica nucleare: il metodo dell'attivazione neutronica

20.1 Generalità

Il processo di attivazione neutronica consiste nella produzione di un isotopo instabile attraverso l'assorbimento di neutroni da parte dei nuclei presenti nel materiale da analizzare. In generale si sfrutta la reazione (n,γ) per neutroni termici, oppure (ma molto meno nella pratica) reazioni del tipo (n,p) , (n,α) , $(n,2n)$ con neutroni di fissione e veloci. Tornando alla reazione (n,γ) , il fotone emesso a seguito della reazione ha in genere una energia di $6\div 8$ MeV (l'energia di legame del neutrone catturato) e viene detto "pronto" in quanto emesso all'istante della reazione nucleare. Il nucleo formatosi contiene un neutrone in più e molto spesso è soggetto a decadimento β^- :



Le particelle β^- e gli eventuali fotoni del decadimento non vengono emessi istantaneamente, ma con la solita legge temporale che è legata alla costante di decadimento λ del nucleo ${}^{A+1}_ZX$. Se sono note le sezioni d'urto di produzione (n,γ) dell'isotopo ${}^{A+1}_ZX$, il flusso di neutroni impiegato e la percentuale in natura dell'isotopo precursore, si può risalire alla quantità di specie atomica selezionata presente nel campione. Si tratta di una tecnica utilissima per l'analisi in tracce di campioni spessi in quanto sia i proiettili (neutroni) che le particelle da rivelare (fotoni) possono attraversare discreti spessori di materia senza essere assorbiti.

La tecnica dell'attivazione neutronica consiste quindi in:

- esposizione del campione contenente l'elemento stabile da analizzare ad un flusso di neutroni termici (generalmente provenienti da un reattore nucleare) per un tempo prefissato;
- estrazione del campione irradiato e misura della radioattività γ indotta;
- calcolo della quantità di elemento stabile presente, noto l'elemento radioattivo, la sezione d'urto della reazione, l'energia e la probabilità di emissione dei fotoni analizzati, ecc.ecc.

Generalmente si misura l'attività gamma anziché beta perché:

l'energia dei gamma è monocromatica, pertanto definita e caratteristica dell'elemento;

la radiazione gamma è penetrante, e quindi lo spessore del campione può anche essere notevole.

I vantaggi dell'analisi mediante attivazione neutronica rispetto ad analisi chimiche sono:

- misura simultanea di diversi elementi;
- selettività: consente la misura di parametri indipendenti quali l'energia dei gamma e la vita media del radionuclide;

- vasta applicabilità: non é praticamente applicabile solo se il tempo di dimezzamento è molto breve o molto lungo , oppure nel caso dei puri emettitori beta con energia molto bassa;

- alta sensibilità.

Gli svantaggi sono:

- necessita di una sorgente di neutroni (costi, rischio, ...)

- nessuna possibilità di discriminazione chimica (stati di valenza, legami, ..)

- non é applicabile per l'analisi di puri emettitori beta: ^3H , ^{14}C , ^{32}P , ^{10}Be

20.2 Analisi quantitativa

Indichiamo con:

Φ : intensità di flusso dei neutroni [$\text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}$]

σ : sezione d'urto di cattura neutronica [cm^2]

N : numero totale di atomi dell'elemento ^A_ZX presenti nel campione irradiato

n_x : numero di nuclidi radioattivi $^{A+1}_Z\text{X}$ presenti nel campione al tempo t

ϑ : abbondanza isotopica dell'elemento precursore

Allora: $N = N_0 \frac{m}{A} \vartheta$, dove N_0 è al solito il numero di Avogadro.

Da notare che m rappresenta la massa dell'elemento che si vuol caratterizzare presente nel campione, e non coincide generalmente con la massa M del campione stesso. Anzi, in genere risulta $m \ll M$: il metodo dell'attivazione neutronica permette infatti di fare analisi elementali di tracce di elementi in matrici complesse. Il rapporto m/M si esprime spesso in "parti per milione" (ppm) ed è una misura della sensibilità del metodo.

Il numero dn_x di nuclei $^{A+1}_Z\text{X}$ formati nel tempo di irraggiamento dt è dato da:

$$dn_x = N\sigma\Phi dt - n_x\lambda dt$$

dove il primo termine a secondo membro è dovuto all'irraggiamento e alla creazione continua di nuovi nuclei $^{A+1}_Z\text{X}$, mentre il secondo termine tiene conto del loro decadimento, che avviene con costante λ caratteristica.

Poniamo $N\sigma\Phi = N_0 \frac{m}{A} \vartheta \cdot \sigma \cdot \Phi = R$ e scriviamo:

$$dn_x = (R - n_x\lambda)dt$$

e risolviamo l'equazione differenziale: $\frac{dn_x}{R - n_x\lambda} = dt$

Con la condizione iniziale $n(t=0) = 0$, la soluzione è la seguente:

$$n_x(t) = \frac{R}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t}) = \frac{N_0 \cdot m \cdot \vartheta \cdot \sigma \cdot \Phi}{\lambda \cdot A} (1 - e^{-\lambda t})$$

$$n_x(t) = \sigma\Phi \frac{N_0 m \vartheta}{A \lambda} (1 - \exp(-\lambda t))$$

Se il campione è irradiato per un tempo t_i , alla fine dell'irraggiamento avremo evidentemente:

$$n_x(t_i) = \sigma\Phi \frac{N_0 m \vartheta}{A\lambda} (1 - \exp(-\lambda t_i))$$

Da questo momento $n_x(t)$ diminuisce con la solita legge esponenziale. Dopo un generico tempo di attesa t dalla fine dell'irraggiamento:

$$n_x(t) = n_x(t_i) \cdot e^{-\lambda t_a} = \sigma\Phi \frac{N_0 m \vartheta}{A\lambda} (1 - e^{-\lambda t_i}) \cdot e^{-\lambda t}$$

Il numero di atomi radioattivi ${}^{A+1}_{Z}X$ presenti nel campione dopo un tempo di irraggiamento t_i ed un successivo tempo di attesa t_a allora risulta essere:

$$n_x(t_a) = n_x(t_i) \cdot e^{-\lambda t_a} = \sigma\Phi \frac{N_0 m \vartheta}{A\lambda} (1 - e^{-\lambda t_i}) \cdot e^{-\lambda t_a}$$

Pertanto il numero n_y di atomi ${}^{A+1}_{Z+1}Y^*$ prodotti nel campione, a seguito dei decadimenti, in un intervallo di tempo Δt successivo a t_a sarà dato da:

$$n_y(\Delta t) = \int_{t_a}^{t_a + \Delta t} \frac{dn_x}{dt} dt = n_x(t_a) \cdot (1 - e^{-\lambda \Delta t})$$

Se chiamiamo F la probabilità di emissione di un fotone di energia fissata nella diseccitazione: ${}^{A+1}_{Z+1}Y^* \rightarrow {}^{A+1}_{Z+1}Y + \gamma$, il numero di fotoni di energia fissata emessi nell'intervallo di tempo Δt è dato da: $n_\gamma = F \cdot n_y$. Se per rivelare questi fotoni viene utilizzato un rivelatore di efficienza intrinseca ε , visto dal campione sotto un angolo solido $\Delta\Omega$, l'efficienza di rivelazione risulta essere: $\eta = \varepsilon \frac{\Delta\Omega}{4\pi}$. In questo caso il

numero di fotoni rivelati nell'intervallo di tempo Δt risulta essere:

$$n_\gamma^{riv} = n_\gamma \varepsilon \frac{\Delta\Omega}{4\pi} = n_y \eta = n_y F \eta$$

In definitiva:

$$n_\gamma^{riv}(\Delta t) = \sigma\Phi \frac{N_0 m \vartheta F \eta}{A\lambda} (1 - e^{-\lambda t_i}) \cdot e^{-\lambda t_a} (1 - e^{-\lambda \Delta t})$$

Essendo $\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{0.693}{T_{1/2}}$, si può riscrivere:

$$n_\gamma^{riv}(\Delta t) = \sigma\Phi \frac{N_0 m \vartheta F \eta}{A\lambda} \cdot \frac{T_{1/2}}{0.693} \cdot \left(1 - \exp\left(\frac{0.693 t_i}{T_{1/2}}\right)\right) \cdot \exp\left(\frac{0.693 t_a}{T_{1/2}}\right) \cdot \left(1 - \exp\left(\frac{0.693 \Delta t}{T_{1/2}}\right)\right)$$

La massa incognita m si ottiene da:

$$m = \frac{n_\gamma^{riv}(\Delta t) A \lambda}{\sigma \Phi N_0 \vartheta F \eta (1 - e^{-\lambda t_i}) \cdot e^{-\lambda t_a} (1 - e^{-\lambda \Delta t})}$$

20.3 Standard di riferimento

Per eliminare, nella determinazione della massa m , la indeterminazione con cui sono noti σ , Φ , ϑ , η , λ e F , si ricorre spesso a misure relative. Si dispone cioè di campioni standard contenenti quantità note dell'elemento da misurare e si procede con un irraggiamento dei due campioni, quello incognito e quello di riferimento, in modo che

restino esposti allo stesso flusso Φ di neutroni. Se chiamiamo m_0 la massa (nota con grande precisione), la massa m è data ovviamente dal rapporto:

$$m = m_0 \frac{n_{\gamma}^{riv}(\Delta t) \cdot e^{-\lambda t_a} (1 - e^{-\lambda \Delta t})}{(1 - e^{-\lambda t_i}) \cdot e^{-\lambda t_a} (1 - e^{-\lambda \Delta t})} \cdot \frac{(1 - e^{-\lambda t_{0i}}) \cdot e^{-\lambda t_{0a}} (1 - e^{-\lambda \Delta t_0})}{n_{0\gamma}^{riv}(\Delta t_0)}$$

Spesso campione e standard vengono irradiati simultaneamente e misurati, uno dopo l'altro, per lo stesso tempo. Pertanto risulta $t_i = t_{0i}$ e $\Delta t = \Delta t_0$. La formula precedente risulta ancora più semplificata:

$$m = m_0 \frac{n_{\gamma}^{riv}(\Delta t) \cdot e^{-\lambda t_a}}{n_{0\gamma}^{riv}(\Delta t_0) \cdot e^{-\lambda t_a}}$$

Comunque sia, gli errori sul tempo sono comunque trascurabili e l'indeterminazione sulla massa m è data

$$\text{da: } \frac{\sigma(m)}{m} = \sqrt{\frac{\sigma^2(m_0)}{m_0^2} + \frac{\sigma^2(n_{\gamma}^{riv})}{(n_{\gamma}^{riv})^2} + \frac{\sigma^2(n_{0\gamma}^{riv})}{(n_{0\gamma}^{riv})^2}} = \sqrt{\frac{\sigma^2(m_0)}{m_0^2} + \frac{1}{n_{\gamma}^{riv}} + \frac{1}{n_{0\gamma}^{riv}}}$$

In genere m_0 è determinata con grande precisione e $\frac{\sigma(m_0)}{m_0}$ è trascurabile. Poiché

inoltre lo standard di riferimento contiene una massa notevolmente maggiore dell'elemento in questione, la sua attività dopo l'irraggiamento sarà tale per cui: $n_{0\gamma}^{riv} \gg n_{\gamma}^{riv}$. In definitiva quindi risulta: $\frac{\sigma(m)}{m} = \frac{1}{\sqrt{n_{\gamma}^{riv}}}$ Per avere una misura di m con

l'indeterminazione del 3% è quindi necessario che sia $n_{\gamma}^{riv} \approx 10^3$.

I valori di E_{γ} , σ , η , F e $T_{1/2}$ di tutti i radionuclidi analizzabili con il metodo dell'attivazione neutronica sono riportati nella che segue.

Elemento	Nuclide Precursore	$\sigma[b]$	$\theta[\%]$	Radio Isotopo	$t_{1/2}$	$F[\%]$	E_γ [MeV]
<i>Fluoro</i>	<i>19F</i>	0.01	100	<i>20F</i>	11.0 s	100	1.630
<i>Sodio</i>	<i>23Na</i>	0.53	100	<i>24Na</i>	15 h	100	1.369 2.754
<i>Magnesio</i>	<i>26Mg</i>	0.03	11.29	<i>27Mg</i>	9.5 m	58.2 41.4	0.840 1.015
<i>Alluminio</i>	<i>27Al</i>	0.23	100	<i>28Al</i>	2.3 m	100	1.775
<i>Silicio</i>	<i>30Si</i>	0.11	3.12	<i>31Si</i>	2.62 h	0.07	1.260
<i>Fosforo</i>	<i>31P</i>	0.19	100	<i>32P</i>	14.3 d		
<i>Zolfo</i>	<i>34S</i>	0.27	4.215	<i>35S</i>	86.7 d		
	<i>36S</i>	0.14	0.017	<i>37S</i>	5.1 m	90	3.090
<i>Cloro</i>	<i>37Cl</i>	0.43	24.47	<i>38Cl</i>	37.3 m	30 46	2.120 1.600
<i>Argon</i>	<i>36Ar</i>	6.0	0.34	<i>37Ar</i>	35.1 d		
	<i>40Ar</i>	0.63	99.6	<i>41Ar</i>	1.83 h	99.1	1.290
<i>Potassio</i>	<i>41K</i>	1.2	6.91	<i>42K</i>	12.4 h	18	1.524
<i>Calcio</i>	<i>44Ca</i>	0.7	2.07	<i>45Ca</i>	163 d		
	<i>48Ca</i>	1.1	0.185	<i>49Ca</i>	8.8 m	89 10	3.100 4.050
<i>Scandio</i>	<i>45Sc</i>	23.0	100	<i>46Sc</i>	83.8 d	99.9 99.94	1.119 0.885
<i>Titanio</i>	<i>50Ti</i>	0.14	5.25	<i>51Ti</i>	5.8 m	94.4	0.323
<i>Vanadio</i>	<i>51V</i>	4.9	99.76	<i>52V</i>	3.77 m	100	1.450

Tab. 20.1

Elemento	Nuclide Precursore	σ [b]	θ [%]	Radio Isotopo	$t_{1/2}$	F [%]	E_{γ} [MeV]
Cromo	^{50}Cr	17.0	4.31	^{51}Cr	27.8 d	9.8	0.325
	^{54}Cr	0.38	2.38	^{55}Cr	3.5 m		
Manganese	^{55}Mn	13.3	100	^{56}Mn	2.58 h	98.8 28.9	0.847 1.811
Ferro	^{54}Fe	2.9	5.84	^{55}Fe	2.4 y		
	^{58}Fe	1.2	0.31	^{59}Fe	45.0 d	44 56	1.289 1.098
Cobalto	^{59}Co	37.0	100	^{60}Co	5.24 y	99.88	1.173
						100	1.332
Nichel	^{64}Ni	1.5	1.16	^{65}Ni	2.56 h	25.4	1.482
						15.2	1.115
Rame	^{63}Cu	4.5	69.1	^{64}Cu	12.9 h	0.6	1.348
	^{65}Cu	2.3	30.9	^{66}Cu	5.1 m	9.0	1.039
Zinco	^{64}Zn	0.46	48.89	^{65}Zn	243 d	50.6	1.115
	^{68}Zn	0.1	18.56	$^{69}\text{Zn-M}$	14.0 h	100	0.439
Gallio	^{69}Ga	1.9	60.2	^{70}Ga	21.0 m	0.48	0.174
						0.76	1.036
	^{71}Ga	5.0	39.8	^{72}Ga	14.1 h	29	2.200
						14	2.508
Germanio	^{74}Ge	0.5	36.74	^{75}Ge	82.0 m	11	0.265
Arsenico	^{75}As	4.5	100	^{76}As	26.5 h	41	0.559
Selenio	^{74}Se	30.0	0.87	^{75}Se	120 d	59	0.265
						57	0.136
Bromo	^{79}Br	2.9	50.5	$^{80}\text{Br-M}$	4.5 h	7.20	0.616
	^{79}Br			^{80}Br	17.6 m	7.20	0.616
	^{81}Br	3.2	49.47	^{82}Br	35.3 h	73 43	0.828 0.619
Rubidio	^{85}Rb	1.0	72.15	^{86}Rb	18.7 d	8.76	1.077
	^{87}Rb	0.12	27.85	^{88}Rb	18.0 m	23.2 14.4	1.836 0.898
Stronzio	^{84}Sr	1.45	0.55	^{85}Sr	65.0 d	99.99	0.514
	^{88}Sr	0.00 6	82.56	^{89}Sr	50.6 d	0.01	0.512
Zirconio	^{94}Zr	0.08	17.4	^{95}Zr	65.0 d	53	0.760
						34	0.724
	^{96}Zr	0.05	2.80	^{97}Zr	17.0 h	94.5	0.744
Niobio	^{93}Nb	1.0	100	^{94}Nb	6.3 m	98	0.703
						100	0.871
Molibdeno	^{98}Mo	0.51	23.75	^{99}Mo	67.0 h	10	0.740
	^{100}Mo	0.2	9.62	^{101}Mo	14.6 m	6.07	2.032
Rutenio	^{96}Ru	0.27	5.5	^{97}Ru	2.9 d	88.7	0.215

Tab. 20.1

Elemento	Nuclide Precursore	$\sigma[b]$	$\theta[\%]$	Radio Isotopo	$t_{1/2}$	$F [\%]$	$E_{\gamma}[\text{MeV}]$
Rutenio	^{102}Ru	1.23	31.5	^{103}Ru	40.0 d	88.5	0.498
	^{104}Ru	0.48	18.7	^{105}Ru	4.43 h	48	0.726
Rodio	^{103}Rh	11.0	100	$^{104}\text{Rh-M}$	4.4 m	1.85	0.556
	^{103}Rh	139	100	^{104}Rh	42 s	1.85	0.556
Palladio	^{102}Pd	4.8	0.96	^{103}Pd	17.0 d	0.01	0.297
	^{108}Pd	12.2	26.71	^{109}Pd	13.5 h	99.95	0.088
Argento	^{107}Ag	35.0	51.35	^{108}Ag	2.4 m	1.75	0.633
	^{109}Ag	3.0	48.65	$^{110}\text{Ag-M}$	250 d	73.6	0.884
	^{109}Ag	89.0	48.65	^{110}Ag	24.0 s	4.4	0.658
Cadmio	^{114}Cd	0.14	28.86	$^{115}\text{Cd-M}$	43.0 d	2.3 0.3	0.935 0.485
	^{113}In	8.0	4.23	$^{114}\text{In-M}$	50.0 d	96.5	0.722
Indio	^{115}In	154.0	95.77	$^{116}\text{In-M}$	54.0 m	57 40	1.085 0.406
	^{120}Sn	0.14	32.85	^{121}Sn	26.8 h		
Stagno	^{122}Sn	0.001	4.72	^{123}Sn	129 d	99.98	0.163
	^{124}Sn	0.1	5.98	^{125}Sn	9.7 m	8.86	1.067
	^{121}Sb	6.0	57.25	^{122}Sb	2.8 d	71.2	0.564
Antimonio	^{123}Sb	3.30	42.75	^{124}Sb	60.2 d	98.4	0.603
	^{128}Te	0.14	31.79	^{129}Te	69.6 m	7.14	0.459
Tellurio	^{130}Te	0.2	34.49	^{131}Te	25.0 m	80 10	0.145 1.130
	^{127}I	6.2	100	^{128}I	25.0 m	16	0.443
Cesio	^{133}Cs	2.6	100	$^{134}\text{Cs-M}$	2.9 h	100	0.127
	^{133}Cs	30.6	100	^{134}Cs	2.1 y	98 72.5	0.605 0.797
Bario	^{138}Ba	0.4	71.66	^{139}Ba	83.0 m	28	0.166
Lantanio	^{139}La	8.9	99.91	^{140}La	40.2 h	100	1.597
Cerio	^{140}Ce	0.6	88.48	^{141}Ce	32.5 d	70	0.145
	^{142}Ce	1.0	11.07	^{143}Ce	33.7 h	49.5	0.293
Praseodi.	^{141}Pr	19.0	100	^{142}Pr	19.2 h	3.7	1.572
Neodimio	^{146}Nd	2.0	17.26	^{147}Nd	11.1 d	13.5	0.531
	^{148}Nd	4.0	5.74	^{149}Nd	1.73h	41	0.210
Samario	^{152}Sm	210.	26.63	^{153}Sm	47.0 h	78	0.103
Europio	^{151}Eu	2800.	49.06	$^{152}\text{Eu-M}$	9.3 h	2.7 1.0	0.344 1.315
	^{151}Eu	5900.	49.06	^{152}Eu	12.4 y	24 13	0.344 0.779
	^{153}Eu	320.	50.94	^{154}Eu	16.0 y	68 38	0.123 1.276

Tab. 20.1

Elemento	Nuclide Precursore	σ [b]	θ [%]	Radio Isotopo	$t_{1/2}$	F [%]	E_{γ} [MeV]
Gadolinio	158Gd	3.4	24.87	159Gd	18.0 h	10.44	0.364
	160Gd	0.8	21.90	160Gd	3.7 m	60	0.361
Terbio	159Tb	46.0	100	160Tb	72.4 d	31	0.879
Disprosio	164Dy	2000.	28.18	165Dy-M	75.4 s	2.2	0.515
Olmio	165Ho	64.0	100	166Ho	27.2 h	0.93	1.380
Erbio	168Er	2.0	27.1	169Er	9.4 d	42	0.008
	170Er	9.0	14.9	171Er	7.5 h	72	0.308
Tulio	169Tm	125.0	100	170Tm	127. d	24	0.084
Lutezio	176Lu	2100.	2.6	177Lu	6.7 d	19.1	0.113
						11.6	0.208
Afnio	174Hf	400.	0.3	175Hf	70. d	98.5	0.343
	180Hf	10.0	30.0	181Hf	42.4 d	88	.482
						97	.133
Tantalio	181Ta	21.0	99.99	182Ta	115 d	69	0.100
Tungsteno	184W	2.1	30.6	185W	74 d	0.018	0.125
	186W	40.0	28.4	187W	23.8 h	91	0.167
						28.9	0.686
Renio	185Re	110.	38.2	186Re	90.0 h	21	0.137
	187Re	70.0	62.93	188Re	16.8 h	28	0.155
Osmio	190Os	8.6	26.4	191Os-M	13.1 h	100	0.074
	190Os	12.5	26.4	191Os	15.4 d	100	0.042
Iridio	191Ir	1000.	38.5	192Ir	74.0 d	94.5	0.317
Iridio	193Ir	110.	61.5	194Ir	19.1 h	14	0.328
Platino	196Pt	0.9	25.4	197Pt	20.0 h	14	0.191
	198Pt	4.0	7.2	199Pt	31.0 m	15.8	0.543
Oro	197Au	98.8	100	198Au	64.8 h	99.7	0.412
Mercurio	196Hg	90.5	0.146	197Hg	64.1 h	99	0.077
	202Hg	4.0	29.8	203Hg	46.6 d	77	0.279
	204Hg	0.4	6.85	205Hg	5.2 m	100	0.279
Tallio	203Tl	11.0	29.50	204Tl	3.78 y		
	205Tl	0.11	70.5	206Tl	4.3 m	0.006	0.803
Piombo	208Pb	.0005	52.3	209Pb	3.3 h		
Bismuto	209Bi	0.015	100	210Bi	5.0 d		
Torio	232Th	7.4	100	233Th	22.1 m		
Protoattin.	231Pa	200.	100	232Pa	1.32 d		
Uranio	238U	2.7	99.27	239U	23.5 m		

Tab. 20.1

20.4 Sensibilità del metodo

Dall'espressione: $n_x(t) = \frac{R}{\lambda}(1 - e^{-\lambda t})$ si vede che per $t \rightarrow \infty$ si raggiunge un valore di saturazione dato da R/λ . In pratica (indicando con $\tau = 1/\lambda$ la vita media del radionuclide) non è conveniente irraggiare per tempi $t_i > 3\tau \approx 4T_{1/2}$. Inoltre, ovviamente è necessario che $t_a \ll T_{1/2}$ in modo che il campione non decada significativamente prima della misura. Anche il tempo di misura Δt deve essere confrontabile con $3\tau \approx 4T_{1/2}$.

Sintetizzando, le condizioni di massima efficienza di misura sono le seguenti:

- $t_i \approx 4T_{1/2}$
- $t_a \ll T_{1/2}$
- $\Delta t \approx 4T_{1/2}$

Non sempre si possono scegliere i valori ottimali di t_i , t_a e Δt , dato che in pratica si ha:

$t_{i \max} \approx 1$ ora, $t_{a \min} \approx 5$ minuti e $\Delta t_{\max} \approx 30$ minuti. Sulla base di questi valori possiamo calcolare la minima massa misurabile con una indeterminazione del 3%. Nella pagina seguente sono riportate per molti elementi i valori di σ , ϑ , $T_{1/2}$ e F . Il flusso di neutroni è assunto pari a $\Phi = 10^{12} \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}$, assolutamente standard per i piccoli reattori da ricerca usati per le analisi di attivazione neutronica. Per l'efficienza si è assunto il valore $\eta = 0.1$ e si è imposto un conteggio di fotoni totale $n_\gamma^{\text{riv}} = 10^3$. Si sono poi utilizzati per i tempi sia i valori teorici che quelli realistici, e precisamente:

- $t_i = 4T_{1/2}$ (e comunque $t_{i \max} = 1\text{h}$)
- $t_a = 5\text{m}$
- $\Delta t = 4T_{1/2}$ (e comunque $\Delta t_{\max} = 30 \text{ min.}$)

Nel caso per esempio del Manganese, dalla tabella ricaviamo:

$$T_{1/2} = 2.6 \text{ ore} = 156 \text{ min} \rightarrow \lambda = \ln 2 / T_{1/2} = 4.44 \cdot 10^{-3} \text{ min}^{-1}$$

$$\sigma = 13.3 \text{ barn}$$

$$\vartheta = 100\%$$

$$F = 100\%$$

Sostituendo, per il caso teorico si ottiene :

$$m = \frac{n_\gamma^{\text{riv}}(\Delta t) A \lambda}{\sigma \Phi N_0 \vartheta F \eta (1 - e^{-\lambda t_i}) \cdot e^{-\lambda t_a} (1 - e^{-\lambda \Delta t})} = 1.7 \cdot 10^{-10} \text{ g}$$

In pratica, irraggiando per un tempo $t_{i \max} = 1\text{h}$ e misurando per un tempo $\Delta t_{\max} = 30$ min, il valore ottenuto è: $m = 5.1 \cdot 10^{-9} \text{ g}$.

Nella tabella 20.2 è riportata la sensibilità del metodo per vari elementi quando si voglia una indeterminazione del 3% sul valore della massa. La minima massa misurabile è stata calcolata con le ipotesi fatte sopra. Va detto che in pratica le cose possono essere differenti. Infatti spesso ci si accontenta di una indeterminazione maggiore: per esempio un $\Delta m/m = 10\%$ porta ad un valore $n_\gamma^{\text{riv}} = 10^2$,

quindi 10 volte più basso. Inoltre, nei conti fatti finora non si è tenuto conto del contributo del fondo nella misura dell'area del picco di fotoni.

La risoluzione energetica del rivelatore è essenziale in questo tipo di misure, dove si deve identificare un elemento dalla presenza delle sue righe gamma, che devono essere separate dalle righe degli altri elementi presenti nel campione. Generalmente il rivelatore usato è un HpGe. Il fondo quindi, oltre che dalla radioattività ambientale, è costituito anche dalla presenza, ineliminabile, di più elementi nel campione. Se l'energia dei fotoni provenienti dal "fondo" è maggiore di quella dei fotoni da rivelare, i picchi gamma che costituiscono il segnale sono sovrapposti alle spalle Compton dei fotoni di più alta energia.

Elemento	Nucleo stabile precursore	$T_{1/2}$	ϑ (%)	F (%)	σ barn	Sensib Teorica	Sensib Realistica
Alluminio	^{27}Al	2.3 m	100	100	0.24	$2.8 \cdot 10^{-6}$	$2.4 \cdot 10^{-6}$
Arsenico	^{76}As	26.4 d	100	43	4.5	$1.3 \cdot 10^{-11}$	$2.0 \cdot 10^{-5}$
Bromo	^{79}Br	17.6 m	50.5	7	8.5	$2.4 \cdot 10^{-7}$	$3.3 \cdot 10^{-7}$
Calcio	^{48}Ca	8.8 m	0.18	89	1.1	$6.0 \cdot 10^{-5}$	$6.0 \cdot 10^{-5}$
Cloro	^{37}Cl	37.3 m	24.5	47	0.4	$3.1 \cdot 10^{-8}$	$9.5 \cdot 10^{-8}$
Cromo	^{50}Cr	27.8 h	4.31	9	17	$5.9 \cdot 10^{-9}$	$1.7 \cdot 10^{-5}$
Ferro	^{56}Fe	45.6 d	0.31	56	1.1	$5.8 \cdot 10^{-9}$	$2.5 \cdot 10^{-3}$
Iodio	^{127}I	25.0 m	100	16	6.4	$7.5 \cdot 10^{-8}$	$1.4 \cdot 10^{-7}$
Magnesio	^{26}Mg	9.5 m	11.3	70	0.03	$2.2 \cdot 10^{-5}$	$2.2 \cdot 10^{-5}$
Manganese	^{55}Mn	2.6 h	100	99	13.3	$3.6 \cdot 10^{-10}$	$1.1 \cdot 10^{-8}$
Mercurio	^{206}Hg	46.9 d	29.8	77	4.0	$4.4 \cdot 10^{-11}$	$2.0 \cdot 10^{-4}$
Potassio	^{41}K	12.4 h	6.77	18	1.2	$5.0 \cdot 10^{-8}$	$2.9 \cdot 10^{-5}$
Rame	^{63}Cu	12.8 h	69.1	38	4.5	$9.2 \cdot 10^{-10}$	$5.7 \cdot 10^{-7}$
Sodio	^{23}Na	15.0 h	100	100	0.53	$6.4 \cdot 10^{-10}$	$5.4 \cdot 10^{-7}$
Vanadio	^{51}V	3.7 m	95.7	100	4.9	$9.8 \cdot 10^{-8}$	$9.8 \cdot 10^{-8}$
Zinco	^{68}Zn	13.8 h	18.6	95	0.1	$6.1 \cdot 10^{-8}$	$4.4 \cdot 10^{-5}$
Zolfo	^{36}S	5.1 m	1.00	90	0.14	$1.4 \cdot 10^{-4}$	$1.4 \cdot 10^{-4}$

Tab. 20.2

Per diminuire il contributo delle spalle compton, spesso si lavora in anticoincidenza con un rivelatore NaI che lo circonda in geometria quasi 4π , come illustrato nella figura 20.1. Lo scopo della anticoincidenza, detta appunto schermo anticompton, è quello di far sì che vengano eliminati dalla acquisizione tutti quelli eventi nei quali si è verificata una coincidenza tra il rivelatore principale HpGe e lo schermo NaI. In questo modo viene soppresso, non solo il fondo dei raggi cosmici e della radioattività ambientale esterna al rivelatore, ma anche gli eventi nei quali un fotone del

campione, dopo aver subito un effetto compton nel rivelatore HpGe, sfugge ad esso ed interagisce nel rivelatore NaI circostante. Questo evento avrebbe popolato la parte di spettro detta appunto "spalla compton".

In figura 20.2 è riportato un esempio di spettro ottenuto dopo una attivazione neutronica. Come si vede i vari picchi sono impostati su un fondo continuo. In questo caso il conteggio S di fotoni rappresenta l'area "netta" del picco, a fondo sottratto.

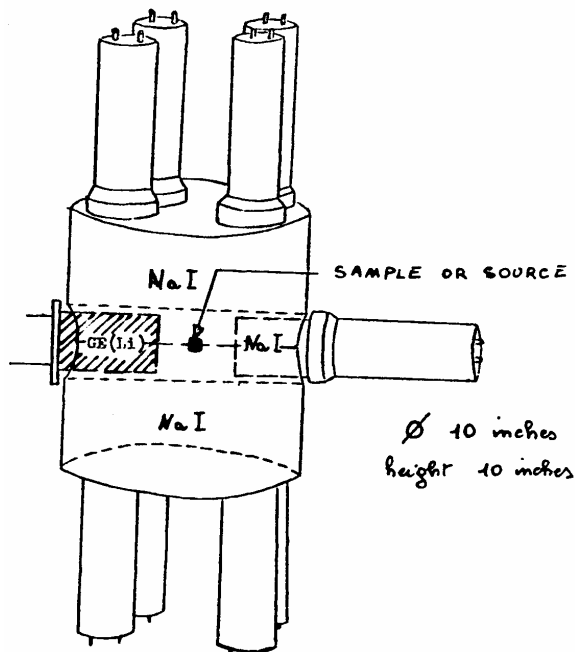


Fig. 20.1 rivelatore HpGe con schermo anti-compton in NaI

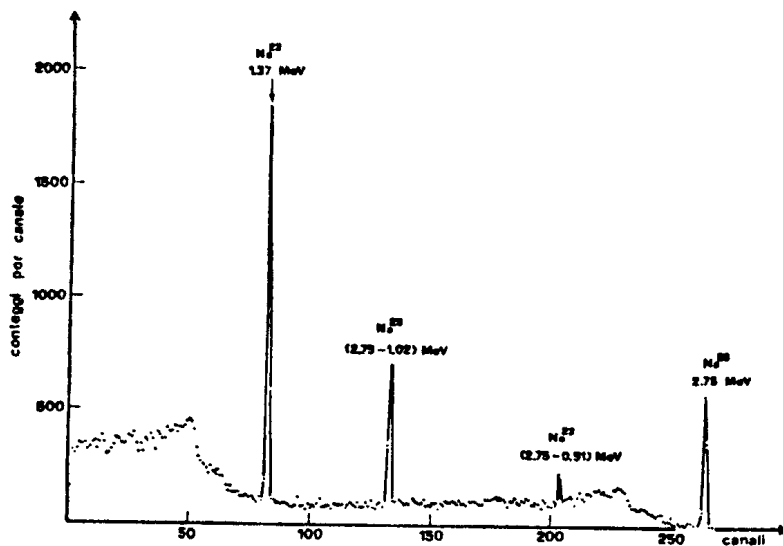


Fig. 20.2 spettro gamma ottenuto dopo attivazione neutronica

Possiamo valutare separatamente l'area totale C ed il fondo B (il fondo si valuta misurando l'area del trapezio sotto il picco, oppure considerando il conteggio di un intervallo energetico adiacente, privo di picchi). Poiché il conteggio totale è pari a $C = S + B$, avremo: $S = C - B$. Sia C che B sono affetti da una indeterminazione statistica: $C \pm \sqrt{C}$, $B \pm \sqrt{B}$ e pertanto l'indeterminazione su S è data da: $S = (C - B) \pm \sqrt{C + B}$, cioè nell'indeterminazione dell'area S entra anche l'indeterminazione statistica del fondo. Affinché il contributo del picco S sia significativo, la differenza tra C e B non deve essere compatibile con zero: $S = C - B > \alpha\sigma = \alpha\sqrt{C + B}$, dove α rappresenta il livello di confidenza che si accetta (1σ , 2σ , 3σ). Per esempio, se si accetta un livello di confidenza del 66% (1σ), il minimo segnale misurabile risulta essere: $S_{\min} = \sqrt{C + B}$. Al limite della sensibilità del metodo, per valori cioè di $S \ll B$, risulta $C \approx B$ e quindi: $S_{\min} = \sqrt{2B}$. Risulta quindi evidente quanto sia conveniente cercare di ridurre il più possibile il fondo. In generale avremo: $S_{\min} = \alpha\sqrt{2B}$ a seconda del livello di confidenza.

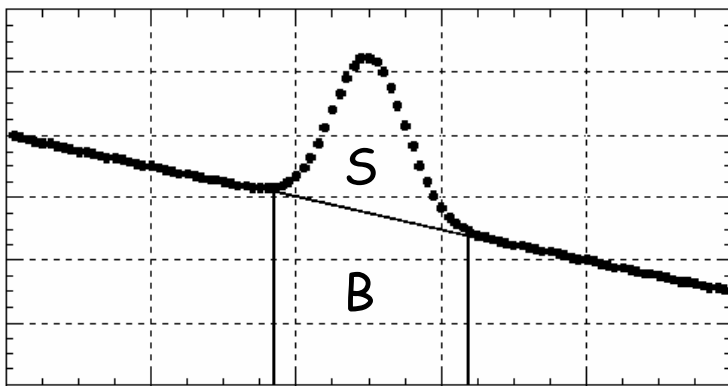


Fig. 20.3 sottrazione del fondo B e valutazione del conteggio netto S

Capitolo 21

Applicazioni della radioattività: le datazioni archeologiche e geologiche

21.1 Criterio di base della radiodatazione

Dato un campione di materiale contenente all'istante $t = 0$ n_0 nuclei di una sostanza radioattiva, la legge del decadimento radioattivo permette di stabilire una relazione fra il numero di nuclei residui $n(t)$, oppure la loro attività $a(t)$, ed il tempo trascorso t :

$$t = -\frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{n(t)}{n_0}\right) = -\frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{a(t)}{\lambda n_0}\right)$$

La misura di $n(t)$ o di $a(t)$ consente quindi di misurare l'età del campione, intesa come intervallo di tempo che intercorre tra il momento $t=0$ in cui esso ha inglobato la componente radioattiva n_0 e il momento in cui viene eseguita la misura di $n(t)$ o di $a(t)$. Ovviamente, in questo intervallo di tempo il campione deve essere rimasto isolato dall'ambiente esterno. Un materiale radioattivo costituisce quindi un orologio in senso generalizzato e il procedimento per stabilire l'età di un campione per via radioattiva viene detto radiodatazione.

Interessanti applicazioni della radiodatazione si hanno, per esempio, in geologia ed in archeologia, con tecniche differenti a seconda che si datino sostanze inorganiche o sostanze organiche, come verrà spiegato nel seguito.

21.2 Datazione delle rocce

I metodi di datazione delle rocce utilizzano il decadimento di elementi radioattivi contenuti nei minerali. Sappiamo, dallo studio dei decadimenti radioattivi, che un qualsiasi radionuclide (A) si trasforma nel tempo in un nucleo stabile (B). Questa trasformazione può avvenire in modo diretto ($A \rightarrow B$ stabile), oppure attraverso una serie di decadimenti intermedi ($A \rightarrow a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow \dots \rightarrow B$ stabile). Nel primo caso, l'andamento nel tempo dei nuclei di tipo A e B è dato da:

$$n_A(t) = n_A(0) \cdot e^{-\lambda_A t} \quad (1)$$

$$n_B(t) = n_A(0) \cdot (1 - e^{-\lambda_A t}) + n_B(0) \quad (2a)$$

oppure:

$$n_B(t) = n_A(t) \cdot (e^{\lambda_A t} - 1) + n_B(0) \quad (2b)$$

dove con $n_A(t)$ e $n_B(t)$ indichiamo il numero di nuclei all'istante t e con $n_A(0)$ e $n_B(0)$ il numero iniziale di nuclei, e con λ_A la costante di decadimento del nucleo A instabile. Nel secondo caso (catena radioattiva) $n_B(t)$ ha una dipendenza dal tempo più complessa in cui compaiono le costanti di tutti i decadimenti intermedi. La situazione è più semplice per le famiglie radioattive naturali, nelle quali il capostipite ha una vita media estremamente più lunga dei nuclei successivi, e tutti i nuclei della famiglia sono in equilibrio secolare. In queste condizioni le equazioni (1), (2a) e (2b) sono ancora valide. Per la determinazione dell'età di una roccia vengono utilizzate equazioni del tipo (1) e (2b) in cui si suppone che λ_A sia nota e che $n_A(t)$ e $n_B(t)$ siano misurabili.

L'età si misura a partire dall'istante $t=0$ a partire dal quale il sistema è rimasto "chiuso" (ossia isolato dall'ambiente esterno), senza perdite né apporti del radionuclide genitore A e del prodotto di decadimento B . Affinché un radionuclide sia utilizzabile per la datazione devono verificarsi le seguenti condizioni:

- 1) il valore della vita media non deve essere né troppo grande né troppo piccolo rispetto all'intervallo di tempo da misurare;
- 2) deve essere possibile appurare quale frazione del nucleo B è radiogenica (cioè prodotta da A) e quale frazione era già presente al momento della formazione ($t=0$) del minerale;
- 3) il radionuclide A non deve essere un elemento troppo raro o contenuto solo in minerali poco diffusi.

Radio nuclide	Abbondanza relativa %	Prodotto del decadimento	Modo del decadimento	$T_{1/2}$ (anni)
$^{40}_{19}\text{K}$	0.0117	^{40}Ar ^{40}Ca	cattura K, β, γ	1.28×10^9
$^{87}_{37}\text{Rb}$	27.835	^{87}Sr	β	4.75×10^{10}
$^{115}_{49}\text{In}$	95.71	^{115}Sn	β	4.41×10^{14}
$^{138}_{57}\text{La}$	0.090	^{138}Ba ^{135}Ce	cattura K, β	1.05×10^{11}
$^{147}_{62}\text{Sm}$	15.0	^{143}Nd	α	1.06×10^{11}
$^{176}_{71}\text{Lu}$	2.59	^{176}Tb ^{176}Hf	cattura K, β	2.37×10^{11}
$^{187}_{75}\text{Re}$	62.93	^{187}Os	β	4.35×10^{10}
$^{232}_{90}\text{Th}$	100.0	^{208}Pb ^4He	famiglia radioattiva	1.40×10^{10}
$^{235}_{92}\text{U}$	0.72	^{207}Pb ^4He	famiglia radioattiva	7.03×10^8
$^{238}_{92}\text{U}$	99.27	^{206}Pb ^4He	famiglia radioattiva	4.47×10^9

Tabella 21.1

Nella tabella 21.1 sono riportati i più noti nuclei a lungo tempo di dimezzamento. Essi fanno parte dei radionuclidi primordiali. Come si può vedere il ^{40}K decade in ^{40}Ca e ^{40}Ar , ma solo quest'ultimo può essere utilizzato per misure di età: infatti il ^{40}Ca è l'isotopo più abbondante del calcio naturale ed è quindi impossibile distinguere tra il ^{40}Ca radiogenico (cioè prodotto dal decadimento del ^{40}K) e quello già presente nel minerale. I nuclei non utilizzabili per le datazioni sono: ^{115}In , ^{147}Sm (caratterizzati da tempi di dimezzamento troppo lunghi), il ^{138}La e ^{176}Lu (troppo rari). Il ^{187}Re , nonostante sia un elemento raro e scarsamente presente nella maggior parte dei minerali, è stato utilizzato con successo per la misura di età di meteoriti metalliche sulle quali nessuno degli altri metodi poteva essere applicato. Le età valutabili con i vari elementi sono indicate in figura 21.1

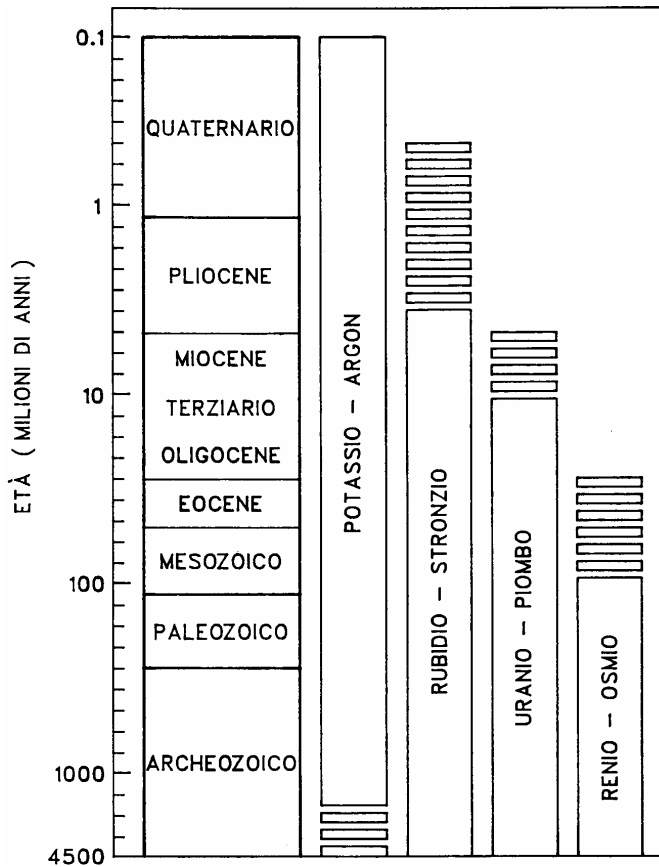


Fig. 21.1 limiti di applicabilità dei metodi di datazione

Analizziamo ora alcune situazioni che si possono presentare nello studio di un campione.

1) la roccia contiene un nucleo A (per esempio ^{238}U) che decade in un nucleo B (per esempio ^{208}Pb) con $n_B(0) = 0$.

In questo caso tutti i nuclei B sono radiogenici, per cui dall'equazione (2b) si ricava:

$$t = \frac{1}{\lambda_A} \ln \left(\frac{n_B(t)}{n_A(t)} + 1 \right) \quad (2c)$$

La misura diretta delle quantità attuali di nuclei A e B ci consente di ricavare l'età.

2) Nella roccia sono presenti gli isotopi stabili B_1 e B_2 di un elemento B e il nucleo radioattivo A che decade in B_1 . Le loro quantità iniziali sono $n_A(0)$, $n_{B_1}(0)$ e $n_{B_2}(0)$. $n_{B_1}(0)$ rappresenta la parte non radiogenica di B_1 . All'istante t (oggi) i nuclei sono presenti nelle quantità:

$$n_A(t) = n_A(0) \cdot e^{-\lambda_A t} \quad (3)$$

$$n_{B_1}(t) = n_A(t) \cdot (e^{-\lambda_A t} - 1) + n_{B_1}(0) \quad (4)$$

$$n_{B_2}(t) = n_{B_2}(0) \quad (5)$$

dove λ_A è nota e le quantità $n_A(t)$, $n_{B1}(t)$ e $n_{B2}(t)$ sono misurabili. Nel secondo membro della (4) il primo addendo rappresenta la parte radiogenica di B_1 e il secondo addendo la parte non radiogenica. Per ottenere l'età della roccia dividiamo la (4) per $n_{B2}(0)$; tenendo conto della (5), si ottiene:

$$\frac{n_{B1}(t)}{n_{B2}(t)} = \frac{n_A(t)}{n_{B2}(t)} \cdot (e^{\lambda_A t} - 1) + \frac{n_{B1}(0)}{n_{B2}(0)}$$

dalla quale ricaviamo:

$$t = \frac{1}{\lambda_A} \ln \left\{ \frac{\frac{n_{B1}(t)}{n_{B2}(t)} - \frac{n_{B1}(0)}{n_{B2}(0)}}{\frac{n_A(t)}{n_{B2}(t)}} + 1 \right\} \quad (6)$$

Questa relazione consente di ricavare l'età della roccia se è determinabile il rapporto

$$k = \frac{n_{B1}(0)}{n_{B2}(0)} \quad (7)$$

Il valore di k può essere ottenuto in diversi modi che dipendono essenzialmente dal metodo di datazione utilizzato. Nel seguito vengono presentati alcuni esempi.

i) metodo del piombo-piombo

Si applica a rocce contenenti isotopi dell'uranio (o torio) e del piombo. Il piombo in natura esiste in 4 isotopi stabili: ^{204}Pb , ^{206}Pb , ^{207}Pb e ^{208}Pb . Di essi solo il piombo 204 non è prodotto per radiogenesi (vedi tabella 21.1) e, in una data roccia, è presente in quantità costante nel tempo: la sua presenza in un minerale ci avverte che una parte del piombo non è radiogenica. Al momento della formazione della crosta terrestre tutti gli isotopi del piombo sono presenti in una certa proporzione, ma con il passare del tempo i decadimenti di ^{238}U , ^{235}U e ^{232}Th arricchiscono il materiale di isotopi del piombo con $A = 206, 207$ e 208 con conseguente aumento dei rapporti $^{206}\text{Pb}/^{204}\text{Pb}$, $^{207}\text{Pb}/^{204}\text{Pb}$ e $^{208}\text{Pb}/^{204}\text{Pb}$. Per questo motivo la composizione isotopica del piombo è in continua evoluzione e presenta differenti composizioni in ere geologiche diverse. In tabella 21.2 vengono riportate le abbondanze isotopiche attuali e quelle al tempo di formazione della terra ricavate dallo studio di meteoriti con contenuto di uranio molto piccolo.

	^{204}Pb	^{206}Pb	^{207}Pb	^{208}Pb
Oggi	1.4%	24.1%	22.1%	52.4%
Oggi	1	17.2	15.8	37.4
$t = 0$	1	4.0	4.4	12.0

Tabella 21.2

Supponiamo, per semplicità, che la roccia R , di cui si vuole definire l'età, contenga solo ^{238}U ; allora nelle formule precedenti si ha: $A = ^{238}\text{U}$, $B_1 = ^{206}\text{Pb}$ e $B_2 = ^{204}\text{Pb}$. Per determinare il rapporto $k = \frac{n_{B1}(0)}{n_{B2}(0)}$ si può ricorrere ad una roccia coeva R' contenente

piombo ma priva di ^{238}U (quindi di diversa composizione chimica). Si fa la ragionevole ipotesi che, al momento della sua formazione R abbia incorporato del piombo con una composizione isotopica uguale a quella di R'. Poiché per la roccia R', a causa dell'assenza di ^{238}U il rapporto fra le abbondanze isotopiche $^{206}\text{Pb}/^{204}\text{Pb}$ è rimasto costante nel tempo, ossia per la roccia R' possiamo scrivere:

$$\frac{n'_{B1}(t)}{n'_{B2}(t)} = \frac{n'_{B1}(0)}{n'_{B2}(0)} = k$$

anche per la roccia R possiamo porre:

$$\frac{n_{B1}(0)}{n_{B2}(0)} = k$$

Nota k , l'età della roccia si calcola tramite la relazione (6):

$$t = \frac{1}{\lambda_A} \ln \left\{ \frac{\frac{n_{B1}(t)}{n_{B2}(t)} - k}{\frac{n_A(t)}{n_{B2}(t)}} + 1 \right\} \quad (8)$$

ii) metodo del potassio-argon

Si applica a rocce contenenti ^{40}K ed il prodotto del suo decadimento ^{40}Ar .

Oltre all'argon di origine radiogenica, in un minerale può essere presente dell'argon di origine atmosferica, rimasto inglobato al momento della sua formazione. L'argon costituisce l'1% circa dell'atmosfera terrestre ed è composto da tre isotopi stabili in proporzione sostanzialmente costante nel tempo: ^{40}Ar (99.6003%), ^{38}Ar (0.0632%) e ^{36}Ar (0.3365%). L'età del minerale può essere determinata tramite la solita relazione (8) ponendo $A=^{40}\text{K}$, $B_1=^{40}\text{Ar}$ e $B_2=^{36}\text{Ar}$ dove il rapporto k dato dalla (7) è valutato tenendo conto che nella roccia inizialmente è contenuto solo argon atmosferico e pertanto:

$$k = \frac{n(^{40}\text{Ar}, t=0)}{n(^{36}\text{Ar}, t=0)} = \frac{99.6\%}{0.336\%} = 296$$

iii) metodo del rubidio-stronzio

Si applica a rocce contenenti la coppia padre-figlio costituita da ^{87}Rb e ^{87}Sr .

Oltre allo stronzio radiogenico, nella roccia può essere inglobato stronzio comune che è composto da quattro isotopi stabili in proporzione praticamente costante nel tempo: ^{84}Sr (0.56%), ^{86}Sr (9.86%), ^{87}Sr (7.00%) e ^{88}Sr (82.58%). L'età della roccia può essere calcolata tramite la relazione (8) ponendo $A=^{87}\text{Rb}$, $B_1=^{87}\text{Sr}$ e, per esempio, $B_2=^{88}\text{Sr}$ (che è il più abbondante). Poiché al momento di formazione della roccia era presente solo stronzio comune:

$$k = \frac{n(^{87}\text{Sr}, t=0)}{n(^{88}\text{Sr}, t=0)} = \frac{7.0\%}{82.58\%} = 0.0847$$

iv) metodo delle rocce isocrone

questo metodo permette di ricavare l'età di una roccia anche se non si ha a disposizione una roccia coeva priva di sostanze radioattive.

Supponiamo di avere campioni di differenti rocce coeve prodotte dal raffreddamento dello stesso materiale originario e contenenti isotopi di Rb e Sr. IL rapporto iniziale fra isotopi della stessa specie ($^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr}$) sarà lo stesso per tutti i campioni, mentre il rapporto fra specie diverse ($^{87}\text{Rb}/^{87}\text{Sr}$) potrà essere diverso a causa della diversa composizione chimica. Poiché hanno la stessa età, i diversi campioni avranno rapporti attuali ($^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr}$)_t diversi in conseguenza dei diversi rapporti iniziali ($^{87}\text{Rb}/^{87}\text{Sr}$)₀. Ciononostante, essendo i campioni coevi, i rapporti $^{87}\text{Rb}/^{87}\text{Sr}$ e $^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr}$ di ciascun campione devono soddisfare, per lo stesso valore di t, alla relazione (6):

$$t = \frac{1}{\lambda_A} \ln \left\{ \frac{\frac{n_{B_1}(t) - n_{B_1}(0)}{n_{B_2}(t) - n_{B_2}(0)} + 1}{\frac{n_A(t)}{n_{B_2}(t)}}} \right\}$$

Pertanto, per differenti campioni coevi, deve risultare uguale il rapporto r:

$$r = \frac{\frac{n_{B_1}(t) - n_{B_1}(0)}{n_{B_2}(t) - n_{B_2}(0)}}{\frac{n_A(t)}{n_{B_2}(t)}}$$

dove $A = ^{87}\text{Rb}$, $B_1 = ^{87}\text{Sr}$ e $B_2 = ^{86}\text{Sr}$. Quindi:

$$\frac{n_{B_1}(t)}{n_{B_2}(t)} = r \cdot \frac{n_A(t)}{n_{B_2}(t)} + \frac{n_{B_1}(0)}{n_{B_2}(0)}$$

Questa relazione mostra che il rapporto $\frac{n_{B_1}(t)}{n_{B_2}(t)}$ è funzione lineare del rapporto attuale

$\frac{n_A(t)}{n_{B_2}(t)}$ e la retta relativa è detta "isocrona".

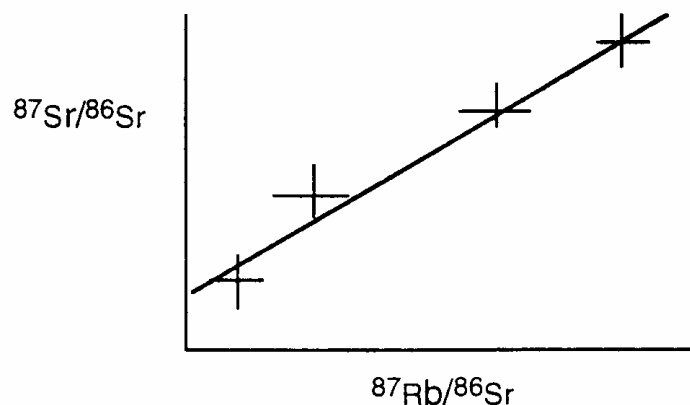


Figura 21.2 diagramma isocrono di rocce coeve

La figura 21.2 mostra un diagramma isocrono. Se i campioni sono coevi i dati si distribuiscono su una retta la cui pendenza è proporzionale all'età dei campioni e l'intersezione con l'asse delle ordinate è il rapporto isotopico all'istante di formazione. Il valore di r viene ricavato graficamente dai valori sperimentali dei precedenti rapporti relativi a differenti campioni di roccia ed è dato dalla pendenza della retta. Una volta noto r , l'età si deduce dalla solita relazione:

$$t = \frac{1}{\lambda_A} \ln(r + 1)$$

21.3 Età della terra

Consideriamo una roccia in cui sono presenti inizialmente i due nuclei radioattivi ^{235}U e ^{238}U che decadono rispettivamente in ^{207}Pb e ^{206}Pb con costanti di decadimento λ_{235} e λ_{238} rispettivamente. Dalla relazione (2a): $n_B(t) = n_A(0) \cdot (1 - e^{-\lambda_A t}) + n_B(0)$, ricaviamo:

$$n(^{207}\text{Pb}, t) - n(^{207}\text{Pb}, t = 0) = n(^{235}\text{U}, t = 0) \cdot (1 - e^{-\lambda_{235} t})$$

$$n(^{206}\text{Pb}, t) - n(^{206}\text{Pb}, t = 0) = n(^{238}\text{U}, t = 0) \cdot (1 - e^{-\lambda_{238} t})$$

Dividendo membro a membro le due equazioni otteniamo:

$$\frac{n(^{207}\text{Pb}, t) - n(^{207}\text{Pb}, t = 0)}{n(^{206}\text{Pb}, t) - n(^{206}\text{Pb}, t = 0)} = \frac{n(^{235}\text{U}, t = 0)}{n(^{238}\text{U}, t = 0)} \cdot \frac{(1 - e^{-\lambda_{235} t})}{(1 - e^{-\lambda_{238} t})} \quad (9)$$

In questa relazione compare il rapporto fra le abbondanze degli isotopi dell'uranio al momento della formazione della roccia. Tale rapporto può essere espresso mediante il rapporto attuale che risulta essere uguale in tutte le rocce. Infatti, applicando la relazione (1): $n_A(t) = n_A(0) \cdot e^{-\lambda_A t}$ ad ^{235}U e ^{238}U si ottiene la seguente relazione:

$$\frac{n(^{235}\text{U}, t = 0)}{n(^{238}\text{U}, t = 0)} = \frac{n(^{235}\text{U}, t) \cdot e^{\lambda_{238} t}}{n(^{238}\text{U}, t) \cdot e^{\lambda_{235} t}} = \frac{0.72\%}{99.27\%} e^{(\lambda_{238} - \lambda_{235})t} = \frac{e^{(\lambda_{238} - \lambda_{235})t}}{138} \quad (10)$$

Utilizzando la relazione (10) nella (9) si ottiene:

$$\frac{n(^{207}\text{Pb}, t) - n(^{207}\text{Pb}, t = 0)}{n(^{206}\text{Pb}, t) - n(^{206}\text{Pb}, t = 0)} = \frac{1}{138} \frac{(e^{\lambda_{235} t} - 1)}{(e^{\lambda_{238} t} - 1)} = \eta$$

Dalla relazione precedente si ottiene:

$$n(^{207}\text{Pb}, t) = \eta \cdot n(^{206}\text{Pb}, t) + [n(^{207}\text{Pb}, t = 0) - \eta \cdot n(^{206}\text{Pb}, t = 0)]$$

e, dividendo per $n(^{204}\text{Pb}, t) = n(^{204}\text{Pb}, t = 0)$:

$$\frac{n(^{207}\text{Pb}, t)}{n(^{204}\text{Pb}, t)} = \eta \cdot \frac{n(^{206}\text{Pb}, t)}{n(^{204}\text{Pb}, t)} + \left[\frac{n(^{207}\text{Pb}, t = 0)}{n(^{204}\text{Pb}, t = 0)} - \eta \cdot \frac{n(^{206}\text{Pb}, t = 0)}{n(^{204}\text{Pb}, t = 0)} \right] \quad (11)$$

Per tutte le rocce aventi la stessa età t , il rapporto η ha lo stesso valore. Inoltre, se i rapporti isotopici iniziali del piombo sono uguali nelle varie rocce la quantità entro parentesi quadra è una costante e la relazione (11) mostra che sussiste una relazione lineare fra le abbondanze attuali di ^{207}Pb e ^{206}Pb nei differenti minerali. Tale dipendenza è messa in evidenza dalle misure sulle abbondanze attuali di ^{207}Pb e ^{206}Pb eseguite su rocce terrestri e lunari e su meteoriti, come illustrato in figura 21.3 dove i dati sperimentali sono distribuiti lungo una retta avente pendenza $\eta = 56$. risulta quindi:

$$\eta = \frac{1}{138} \frac{(e^{\lambda_{235}t} - 1)}{(e^{\lambda_{238}t} - 1)} = 56$$

Tale equazione si può risolvere numericamente o graficamente e si ricava un'età corrispondente a $4.5 \div 4.6 \cdot 10^9$ anni per le rocce appartenenti a differenti corpi del sistema solare.

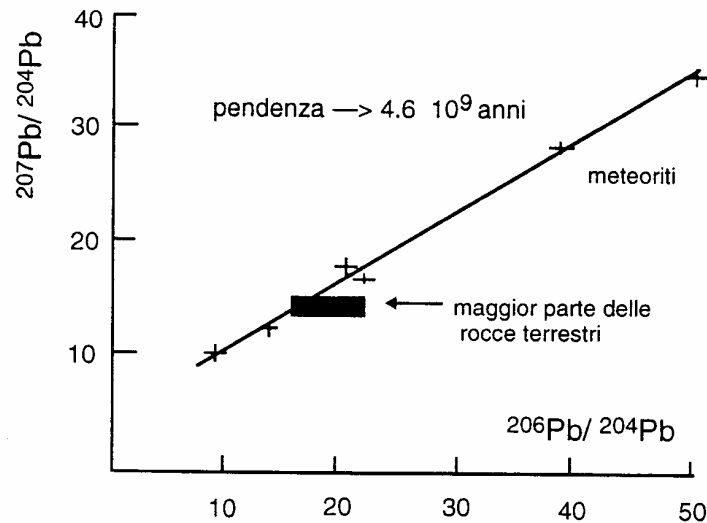
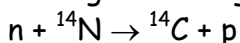


Figura 21.3 diagramma isocrono per meteoriti, rocce lunari e rocce terrestri

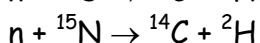
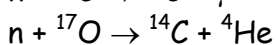
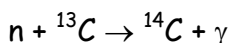
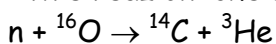
Il fatto che tutti i campioni provenienti da rocce terrestri, lunari e da meteoriti si dispongano approssimativamente lungo la stessa retta suggerisce l'ipotesi che tutti gli oggetti appartenenti al sistema solare si sono formati all'incirca nello stesso periodo, 4.6 miliardi di anni fa.

21.4 Il metodo del Carbonio-14

Il ^{14}C è un isotopo radioattivo del Carbonio. Esso ha un tempo di dimezzamento di 5730 anni, tuttavia, a causa di continui processi di produzione nell'atmosfera, la sua concentrazione è pressoché stabile nel tempo. L'origine del ^{14}C è dovuta ai raggi cosmici. Questi, interagendo con l'atmosfera, producono neutroni i quali, essendo particelle scariche, possono diffondere agevolmente nell'atmosfera ed interagire con gli isotopi di Carbonio, Azoto ed Ossigeno in essa presenti. La reazione di gran lunga più importante, sia per sezione d'urto (1.7 barn) che per abbondanza dell'elemento bersaglio è la seguente:



Altre reazioni che avvengono sono:



Note le sezioni d'urto σ_i , il flusso Φ di neutroni e le abbondanze N_i dei vari elementi nell'atmosfera, si può calcolare il rateo di produzione $R = \Phi \sum_i N_i \sigma_i$. La velocità di produzione di nuclei di ^{14}C risulta: essere $R = 1.0 \cdot 10^{19} \text{ s}^{-1}$, pari a 7.5 kg/anno. Sapendo che siamo in condizioni di equilibrio secolare, cioè i meccanismi di produzione compensano il decadimento, deve essere: $\frac{dn}{dt} = R - \lambda n = 0$ da cui si ricava la quantità totale di ^{14}C presente nell'atmosfera: $n = R/\lambda$. Dai calcoli si ricava: $n = 2.6 \cdot 10^{30}$ nuclei, pari a 60 tonnellate.

La composizione del Carbonio naturale è la seguente:

$$^{12}\text{C} \rightarrow 0.9889$$

$$^{13}\text{C} \rightarrow 1.11 \cdot 10^{-2}$$

$$^{14}\text{C} \rightarrow 1.2 \cdot 10^{-12}$$

Il ^{14}C così formato è rapidamente ossidato in $^{14}\text{CO}_2$ ed entra nelle piante e negli animali attraverso la fotosintesi e la catena alimentare. Un grammo di C naturale contiene $N = \frac{N_0}{A} = 5 \cdot 10^{22}$ atomi di carbonio, e quindi $N' = 6 \cdot 10^{10}$ atomi di ^{14}C . L'attività specifica del C naturale è quindi: $a = N'\lambda = 0.23 \text{ Bq/g}$. Il Carbonio presente in una pianta o un animale vivente ha la stessa composizione isotopica del carbonio atmosferico. Quando l'animale o la pianta muore, il suo scambio di carbonio si arresta ed il ^{14}C decade con un tempo di dimezzamento $T_{1/2} = 5730 \pm 30 \text{ y}$. In questo modo il carbon fossile o il petrolio hanno perso tutto il loro contenuto di ^{14}C , mentre in un albero giovane il Carbonio, grazie al suo contenuto di ^{14}C , ha la stessa attività specifica del Carbonio atmosferico, pari quindi a 0.23 Bq/g. E' così chiaro come si possa datare un oggetto contenente Carbonio organico, misurando la sua attuale attività specifica $a_s(t)$ di Carbonio e conoscendo la attività specifica $a_s(0)$ relativa all'istante della morte.

$$a_s(t) = a_s(0) \cdot \exp(-\lambda t) \rightarrow t = \frac{1}{\lambda} \cdot \ln\left(\frac{a_s(0)}{a_s(t)}\right) = 8033 \ln\left(\frac{a_s(0)}{a_s(t)}\right)$$

Le figure 21.1 e 21.2 riportano curve di calibrazione ottenute misurando campioni di età nota.

Il pioniere di questa tecnica fu il fisico Libby che nel 1949, assieme ad Anderson e Arnold, applicò il metodo di datazione ad un campione di legno di acacia proveniente dalla tomba del faraone Zoser, vissuto durante la Terza Dinastia (2700-2600 a.c.): poiché quindi erano passati circa 4600 anni (cioè un tempo estremamente prossimo a $T_{1/2}$), Libby si aspettava di trovare una concentrazione di ^{14}C dell'ordine del 50% di quella all'equilibrio. E così fu: il conto esatto confermò le sue ipotesi. Anche altri confronti con numerosi reperti egiziani furono positivi.

Variazione del contenuto di ^{14}C nel serbatoio naturale.

Un volta risaliti, dalla attività specifica, alla età del campione, vanno apportate delle correzioni dovute al fatto che per cause diverse il rateo R di produzione di ^{14}C e quindi la sua concentrazione nell'atmosfera non sono propriamente costanti nel tempo.

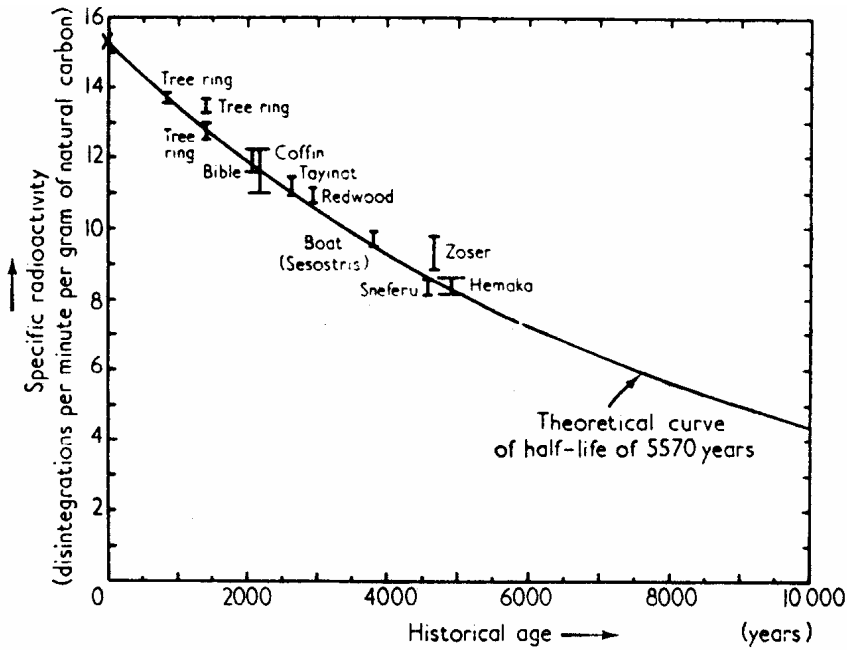


Fig. 21.4 curva di calibrazione del radiocarbonio

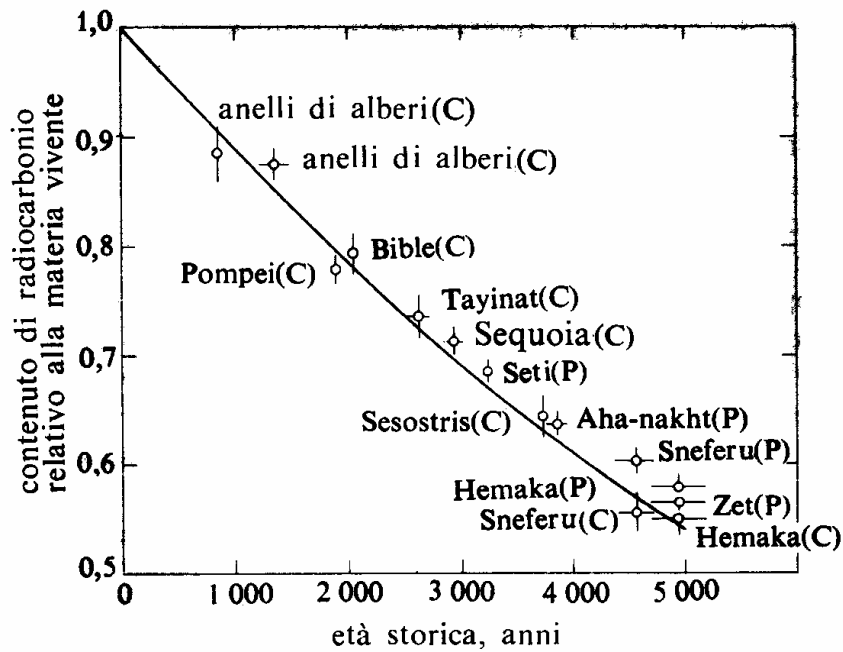


Fig. 21.5 curva di calibrazione del radiocarbonio

Le cause principali sono elencate nel seguito.

- Variazione del flusso Φ di raggi cosmici dovuta alla variazione del campo magnetico terrestre. Questo fenomeno ha una periodicità di 8000 anni ed è stato valutato e quantificato mediante la misura del contenuto di ^{14}C in vecchissimi alberi, quali le sequoie ed i pini aristata. Si è misurata la concentrazione di ^{14}C nei vari anelli di crescita dei tronchi e se ne è dedotto l'andamento temporale. Poiché un singolo albero non vive più di 4000-5000 anni, si è fatto ricorso a varie generazioni di alberi per ricoprire un periodo così lungo: gli uni rispetto agli altri sono stati "sincronizzati" tramite la misura dello spessore relativo dei vari anelli, funzione delle condizioni climatiche annuali.

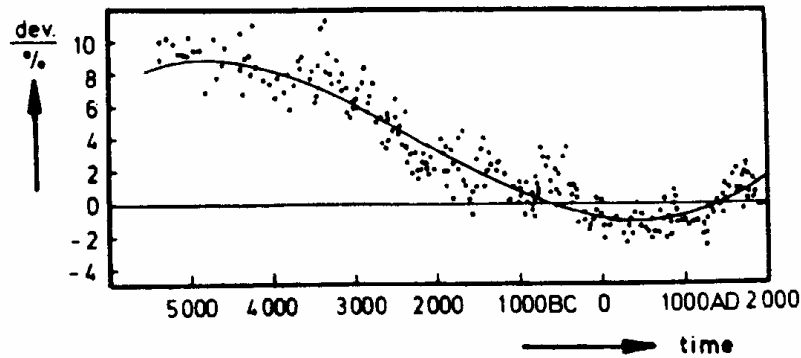


Fig. 21.6 correzioni al metodo del ^{14}C dovute alla variazione del flusso di raggi cosmici

La figura 21.6 mostra appunto questa variazione periodica e la variazione percentuale da apportare alle misure in funzione dell'età.

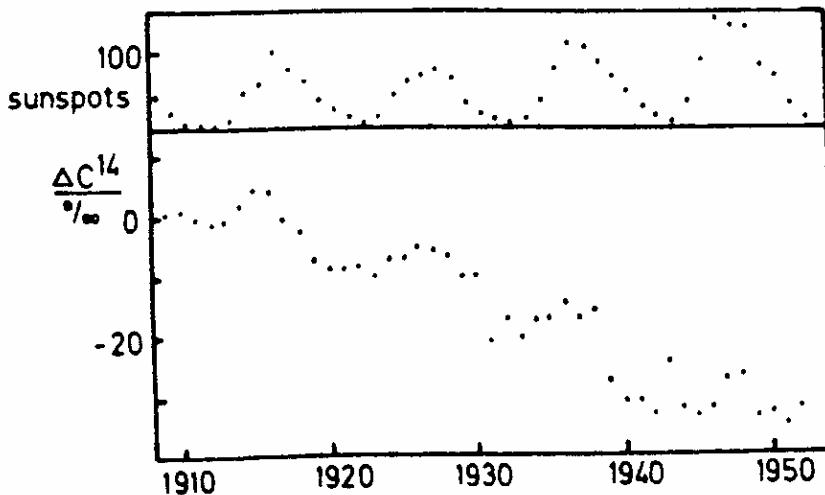


Fig. 21.7 ^{14}C nei vini della Georgia - correlazione con le macchie solari

- Variazione dovuta all'attività solare intensa.

Anche questo effetto è stato misurato ricorrendo ai pini aristata e alle sequoie. Si vede infatti che la curva del grafico precedente presenta una modulazione (di periodo pari a 200 anni) sovrapposta alla portante.

- variazione dovuta alle macchie solari meno intense.

Questo un fenomeno periodico ($T = 11$ anni) è stato osservato chiaramente misurando la concentrazione di ^{14}C nei vini della Georgia. Nella figura 21.7 è chiarissima la correlazione con l'intensità delle macchie solari.

Una stima della correzione da apportare alle misure di datazione, che tiene conto di tutti questi effetti è riportata nella tabella 21.3.

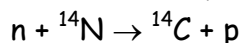
Età	Correzione
0 ÷ 2000 d.c	0
1000 a.c.	100 anni
2000 a.c.	300 anni
3000 a.c.	600 anni
4000 a.c.	800 anni

Tab. 21.3

Vi sono poi altre due cause di variazione della concentrazione di ^{14}C dovute all'uomo, che di fatto impediscono di utilizzare il metodo del radiocarbonio per la datazione di reperti posteriori al 1700 d.c. Questo comunque non rappresenta un problema per noi: lo sarà per i nostri discendenti se essi, tra 2÷3000 anni, volessero datare reperti del giorno d'oggi !

- Con l'avvento dell'era industriale, a causa dell'utilizzo sempre più diffuso del petrolio come combustibile, è stata immessa nell'atmosfera una enorme quantità di carbonio fossile, completamente privo di ^{14}C , ormai decaduto. Questo ha chiaramente rotto l'equilibrio secolare tra produzione e decadimento del ^{14}C . e la concentrazione di ^{14}C è diminuita

- Tra gli anni '50 e gli anni '60 sono state effettuate molte esplosioni nucleari. Come sappiamo, al meccanismo di fissione è associata la produzione di neutroni. Questi neutroni hanno a loro volta interagito con l'atmosfera e, attraverso la reazione:



hanno prodotto un aumento di concentrazione di ^{14}C , tra l'altro in maniera evidentemente non isotropa sulla terra. E' stato calcolato che l'aumento globale medio di ^{14}C in tutto il globo è dell'ordine di 0.5 tonnellate, cioè di qualche %. Localmente si sono verificate variazioni anche di un fattore due.

21.4 Le tecniche di misura del ^{14}C

Dalla formula che fornisce l'età t di un campione: $t = \frac{1}{\lambda} \cdot \ln\left(\frac{a_s(0)}{a_s(t)}\right) = 8033 \ln\left(\frac{a_s(0)}{a_s(t)}\right)$

si vede come sia necessario misurare l'attività specifica attuale $a_s(t)$, ma conoscere l'attività specifica iniziale $a_s(0)$. Questa è fornita da uno standard secondario preparato appositamente in un centro specializzato e fornito a tutti i laboratori di datazione mondiali. Esso è costituito da un campione di acido ossalico $\text{C}_2\text{H}_2\text{O}_4$ (chiamato HOx1) accuratamente calibrato. Questo è comunque uno standard "secondario", in quanto la sua attività specifica viene normalizzata a quella del vero standard primario, costituito da un campione di legno del 1890. A quella data infatti non vi sono ancora correzioni dovute all'effetto del carbone fossile immesso nell'atmosfera a seguito della rivoluzione industriale. L'attività del legno del 1890 viene corretta, tenendo conto del decadimento, alla data 1950 che viene assunta come anno di riferimento per tutte le datazioni (in onore di Libby & coll.) Disponendo dello standard secondario la datazione di un campione viene eseguita procedendo alla misura, nelle stesse condizioni sperimentali, del campione e dello standard.

Esistono essenzialmente due metodi per la determinazione del ^{14}C :

- misure di attività del campione;
- misure di spettrometria di massa.

- Nel primo caso si devono rivelare le particelle β emesse, la cui energia massima vale $E_{\max} = 160 \text{ keV}$. Vengono usati contatori proporzionali o, meglio, scintillatori liquidi. Questi ultimi sono preferiti perché presentano un volume minore e quindi un fondo, dovuto essenzialmente ai raggi cosmici, più basso. In entrambi i casi il rivelatore è schermato con piombo e rame contro la radioattività ambientale e quindi l'unico sorgente di fondo è costituita dai raggi cosmici penetranti: sulla superficie terrestre il loro flusso è pari a circa $2 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}$. Quando si applica questa tecnica è fondamentale conoscere e misurare il contributo del fondo, in modo da poterlo sottrarre. Il fondo deve essere misurato nelle stesse identiche condizioni usate per la misura di campione e standard. Per questo esistono dei campioni contenenti esclusivamente carbonio fossile, quindi completamente privo di ^{14}C che vengono usati allo scopo.

- Una tecnica più moderna e raffinata (ma anche più costosa e complicata) è quella della spettrometria di massa. Il carbonio prelevato del campione da datare costituisce in questo caso la sorgente di un tandem. Il fascio prodotto conterrà quindi nuclei di ^{12}C , ^{13}C e ^{14}C . In figura 21.5 è riportato lo schema di funzionamento di una spettrometro di massa. Il fascio è emesso dalla sorgente I. Esso viene "analizzato" tramite i due magneti di analisi M, uno immediatamente dopo la sorgente, e l'altro dopo la sezione accelerante e successivamente dal filtro di velocità V posto immediatamente prima del rivelatore D.

Le slitte S e le lenti magnetiche L servono a focalizzare il fascio. I magneti filtrano le particelle con una assegnata massa e quindi separano ^{14}C da ^{12}C e ^{13}C . Il filtro di velocità (filtro di Wien) costituito da un campo elettrico \mathbf{E} ed un campo magnetico \mathbf{B} perpendicolari tra loro seleziona invece in base al rapporto e/m ed è quindi in grado di separare ulteriormente ^{12}C , ^{13}C e ^{14}C dal fondo. Variando opportunamente il campo nei magneti M si possono inoltre misurare le intensità ^{12}C , ^{13}C e ^{14}C separatamente e quindi il loro rapporto. Con lo spettrometro di massa si raggiungono elevate sensibilità, e si è in grado di misurare rapporti $^{14}\text{C}/^{12}\text{C} = 10^{-16}$. Fortunatamente non vengono accelerati alla sorgente del tandem ioni ^{14}N negativi (lo ione $^{14}\text{N}^-$ è infatti instabile e decade immediatamente), che avrebbero lo stesso valore di e/m e la stessa velocità degli ioni ^{14}C e non potrebbero essere facilmente distinti

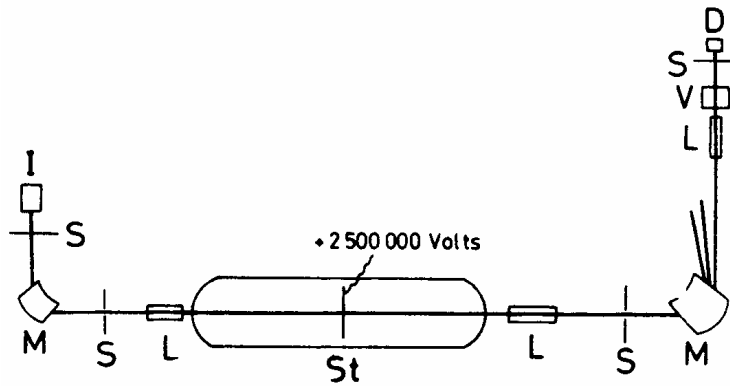


Fig. 21.8 Schema di spettrometro di massa usato per datazioni con il metodo del ^{14}C

L'età del campione è data dalla relazione: $t = \frac{1}{\lambda} \cdot \ln\left(\frac{a_s(0)}{a_s(t)}\right)$

Ma: $a_s(t) = N(t) \cdot \lambda$ e $a_s(0) = N(0) \cdot \lambda$

$$\text{Risulta quindi: } \frac{a_s(0)}{a_s(t)} = \frac{N(^{14}\text{C})_0}{N(^{14}\text{C})_t} = \frac{\frac{N(^{14}\text{C})_0}{N(^{12}\text{C})_0}}{\frac{N(^{14}\text{C})_t}{N(^{12}\text{C})_t}}} = \frac{\frac{N(^{14}\text{C})_0}{N(^{12}\text{C})_0}}{\frac{N(^{14}\text{C})_t}{N(^{12}\text{C})_t}},$$

essendo $N(^{12}\text{C})_0 = N(^{12}\text{C})_t$ in quanto il ^{12}C è stabile. Chiamando $r(0)$ e $r(t)$ rispettivamente: $r(0) = \frac{N(^{14}\text{C})_0}{N(^{12}\text{C})_0}$ e $r(t) = \frac{N(^{14}\text{C})_t}{N(^{12}\text{C})_t}$, possiamo scrivere:

$$t = \frac{1}{\lambda} \cdot \ln\left(\frac{r(0)}{r(t)}\right)$$

Da una misura del rapporto $\frac{N(^{14}\text{C})}{N(^{12}\text{C})}$ si deduce quindi l'età del campione.

Come esempio numerico valutiamo le attività con cui abbiamo a che fare in misure di datazione.

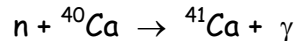
Un capello umano di lunghezza pari a 2 cm contiene circa 1 mg di carbonio in forma di cheratina. Un milligrammo di carbonio contiene $N = N_0 \frac{m}{A} = 5 \cdot 10^{19}$ atomi. Gli atomi di ^{14}C sono quindi: $N' = N \cdot 1.2 \cdot 10^{-12} = 6 \cdot 10^7$ atomi di ^{14}C . L'attività di questo capello è pari a: $a = N' \cdot \lambda = 2.3 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1} = 0.82 \text{ h}^{-1}$.

Vediamo ora altri metodi di datazione.

21.5 Metodo del Calcio 41

Come ultimo metodo vediamo quello basato sul ^{41}Ca .

Il ^{41}Ca è prodotto per cattura neutronica sul ^{40}Ca :



Le abbondanze isotopiche sono le seguenti:

^{40}Ca 0.9696

^{41}Ca $10^{-14} \div 10^{-15}$ (*)

^{42}Ca $6.4 \cdot 10^{-3}$

^{43}Ca $1.45 \cdot 10^{-3}$

^{44}Ca $2.07 \cdot 10^{-3}$

Il ^{41}Ca decade β^+ in ^{41}K con un tempo di dimezzamento $T_{1/2} = 1.04 \cdot 10^5 \text{ y}$

Il calcio si trova in abbondanza nelle ossa degli animali e dell'uomo. Con la sensibilità prevista dagli spettrometri di massa sarebbe possibile datare con precisione fino a qualche decina di milioni di anni fa. Questo rappresenta il sogno degli archeologi ma purtroppo la frazione di ^{41}Ca rispetto al calcio naturale non è determinabile con precisione, come testimonia l'incertezza quotata sopra in (*). Il processo di produzione del ^{41}Ca alla superficie della litosfera ed il successivo trasporto nella biosfera è molto complesso e a tutt'oggi non ancora completamente spiegato.

21.6 Datazione mediante accumulazione di tracce

La radioattività presente nel campione o nelle vicinanze dovuta ai raggi cosmici interagisce con il materiale e lascia delle vere e proprie tracce dovute al danneggiamento da radiazione. Per risalire all'età del campione è necessario conoscere:

- l'intensità di radiazione che ha colpito l'oggetto archeologico, ad esempio l'intensità di dose assorbita per anno \dot{D} . A questo scopo si misura l'intensità di dose attuale del sito archeologico e si fa l'ipotesi che essa non sia cambiata in maniera apprezzabile nel passato.

- La quantità di "danneggiamento", ossia il numero delle tracce provocate dalla dose unitaria. Per questo si irradia artificialmente un campione simile con dosi crescenti e si produce una curva di calibrazione dose-danno.

Dalla misura del danno si risale alla dose archeologica AD. Dalla conoscenza di AD e di

\dot{D} si risale quindi all'età del campione: $t = \frac{AD}{\dot{D}}$

In questo modo si data il campione a partire da un "tempo zero" corrispondente ad una assenza di danno nel campione. Per esempio, nel caso di oggetti di vetro o di ceramica, questo tempo zero corrisponde al momento della soffiatura o della cottura; nel caso di eventi successivi ad eruzioni vulcaniche l'evento azzeratore è proprio il calore sviluppato dall'eruzione.

Vediamo ora brevemente in cosa consiste la datazione con tracce di fissione. Nel cristallo, nel vetro e nell'argilla vi sono impurezze di Uranio con una concentrazione di poche parti per milione (ppm). Degli atomi di Uranio il 99.3% è ^{238}U , il quale decade α con un $T_{1/2} = 4.5 \cdot 10^9$ y, e per fissione spontanea con $T_{1/2} = 8 \cdot 10^{15}$ y. A seguito della fissione spontanea nuclei con massa $A \approx 90$ e $A \approx 140$ sono prodotti con uno sviluppo di energia di circa 200 MeV. Tali ioni pesanti, interagendo con il materiale, producono localmente danneggiamenti microscopici di dimensioni dell'ordine di 10 nm. Attaccando con un opportuno acido il campione si può ingrandire l'incisione fino a dimensioni di $10 \div 20 \mu\text{m}$, visibili quindi al microscopio. Il metodo di datazione consiste nel contare le tracce al microscopio. Vi è una limitazione inferiore di circa 100 tracce/cm² dovuto all'errore statistico, ed una superiore di circa 10^7 tracce/cm² in quanto le tracce perdono individualità. Questi due limiti portano evidentemente ad un limite di datazione, che dipende anche dalla quantità di Uranio presente nel campione.

Questo metodo è stato applicato alla datazione dei primi ominidi dell'Africa orientale, ed è risultato in accordo con il metodo del K-Ar.

Per misurare il contenuto di Uranio del campione, una frazione di questo viene irradiata con neutroni che inducono fissione. Successivamente si contano le tracce e, nota la sezione d'urto di fissione ed il flusso di neutroni, si risale al contenuto di Uranio.