Esercizio 1 ⓐ1

a) Si tratta di due oscillatori indipendenti

(a1) Quindi

$$E = \hbar\omega\left(n_1+\frac{1}{2}\right)+\hbar\omega\left(n_2+\frac{1}{2}\right)$$

$$=\hbar\omega(n_1+n_2+1)$$

autof. $|n_1\, n_2\rangle$
$$\downarrow$$
$$\psi_{n_1}(x_1)\psi_{n_2}(x_2)$$
[$\psi_n(x)$ autof dell'oscillatore armonico]

Livelli più bassi:

fond $n=n_1+n_2=0$ $E=\hbar\omega$ $|0\,0\rangle$ non deg.

I ecc. $n=n_1+n_2=1$ $E=2\hbar\omega$ $|1\,0\rangle, |0\,1\rangle$ deg $=2$

II ecc $n=n_1+n_2=2$ $E=3\hbar\omega$ $|2\,0\rangle, |1\,1\rangle, |0\,2\rangle$ deg 3

Livello con $E=(n+1)\hbar\omega$ deg. $(n+1)$

(a2)

Dobbiamo calcolare gli elementi di matrice di x per l'oscillatore armonico 1 d

Se $a=\dfrac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(p-im\omega q)$ $a^+=\dfrac{-i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(p+im\omega q)$

$$q=\frac{1}{\sqrt{2}}\xi(a+a^+) \qquad \xi=\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$

Calcoliamo

$$\langle n|q|m\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\xi\langle n|(a+a^+)|m\rangle$$

Dato che $a^+|m\rangle\sim|m+1\rangle$, $a^{\cancel{+}}|m\rangle\sim|m-1\rangle$; questo elemento di matrice è non nullo solo per $|n-m|=1$

Quindi

$$\langle n+1|q|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\xi\langle n+1|(a+a^+)|n\rangle$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\xi\sqrt{n+1}$$

$$\langle n-1|q|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\xi\langle n-1|a|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\xi\sqrt{n}$$ [ovviamente è uguale a $\langle n|q|n-1\rangle^*$]

- Stato fond : non deg con autostato $|0\,0\rangle$

$$\Delta E = \langle 0\,0|V|0\,0\rangle = \lambda m\omega^2 \langle 0\,0|x_1 x_2|0\,0\rangle$$
$$= \lambda m\omega^2 \langle 0|x_1|0\rangle\langle 0|x_2|0\rangle = 0$$

- I ecc. : deg 2 con stati $|1\,0\rangle, |0\,1\rangle$

$$\langle 1\,0|V|1\,0\rangle = \langle 0\,1|V|0\,1\rangle = 0$$
$$\langle 1\,0|V|0\,1\rangle = \lambda m\omega^2 \langle 1|x_1|0\rangle\langle 0|x_1|1\rangle$$
$$= \lambda m\omega^2 \frac{\xi^2}{2} = \frac{\lambda}{2} m\omega^2 \frac{\hbar}{m\omega} = \frac{\lambda}{2}\hbar\omega$$

$$V = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\lambda}{2}\hbar\omega \\ \frac{\lambda}{2}\hbar\omega & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{autovalori: } \pm\frac{\lambda}{2}\hbar\omega$$

Degenerazione rimossa $\quad E = 2\hbar\omega \begin{cases} +\frac{\lambda}{2}\hbar\omega \\ -\frac{\lambda}{2}\hbar\omega \end{cases}$

- II ecc. : deg. 3 con stati $|2\,0\rangle, |1\,1\rangle, |0\,2\rangle$

Gli elementi diagonali della matrice della perturbazione sono nulli.

$$\langle 2\,0|V|1\,1\rangle = \lambda m\omega^2 \langle 2|x_1|1\rangle\langle 0|x_2|1\rangle$$
$$= \lambda m\omega^2\, \xi \cdot \frac{\xi}{\sqrt{2}} = \frac{\lambda\hbar\omega}{\sqrt{2}} \quad \left[\begin{matrix}\text{pure uguale a} \\ \langle 0\,2|V|1\,1\rangle\end{matrix}\right]$$

$$\langle 2\,0|V|0\,2\rangle = 0.$$

Se ordiniamo gli elementi $|2\,0\rangle, |1\,1\rangle, |0,2\rangle$

$$\hat{V} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\lambda\hbar\omega}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{\lambda\hbar\omega}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{\lambda\hbar\omega}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{\lambda\hbar\omega}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

(a3)

Autovalori [indicati con μ]

$$\det(V-\mu I) = \begin{pmatrix} -\mu & a & 0 \\ a & -\mu & a \\ 0 & a & -\mu \end{pmatrix} \qquad a = \frac{\lambda}{\sqrt{2}}\hbar\omega$$

$$= -\mu \begin{pmatrix} -\mu & a \\ a & -\mu \end{pmatrix} - a \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & -\mu \end{pmatrix}$$

$$= -\mu(\mu^2 - a^2) + \mu a^2 = -\mu(\mu^2 - 2a^2) \longrightarrow \quad \mu = \begin{cases} 0 \\ \pm\sqrt{2}a \end{cases}$$

La degenerazione è rimossa

$$E = 3\hbar\omega + \begin{cases} +\lambda\hbar\omega \\ +0 \\ -\lambda\hbar\omega \end{cases}$$

b)

(a1) Sono ammessi solo stati pari

fond $n=0$ $E=\hbar\omega$ $|0\,0\rangle$ non deg.

I ecc. $n=1$ $E=2\hbar\omega$ $\frac{1}{\sqrt{2}}(|1\,0\rangle + |0\,1\rangle)$ non deg.

II ecc. $n=2$ $E=3\hbar\omega$ $\frac{1}{\sqrt{2}}(|2\,0\rangle + |0\,2\rangle)$, $|1\,1\rangle$ deg $=2$

(a2)

Come prima $\Delta E = 0$ per lo stato fondamentale

I ecc.

$$\Delta E = \frac{1}{2}(\langle 1\,0| + \langle 0\,1|)\, V\, (|1\,0\rangle + |0\,1\rangle)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\langle 1\,0|V|0\,1\rangle + \langle 0\,1|V|1\,0\rangle\right]$$ (gli altri due termini sono nulli)

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{2}\hbar\omega + \frac{\lambda}{2}\hbar\omega\right) = \frac{\lambda}{2}\hbar\omega$$

$$E = 2\hbar\omega + \frac{\lambda}{2}\hbar\omega$$

(a4)

<u>II ecc</u>:

base : $|2\,0\rangle_s = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|2\,0\rangle + |0\,2\rangle\right)$, $|1\,1\rangle$

I termini diagonali della matrice della perturbazione sono nulli. Infine

$$\langle 1\,1|V|2\,0\rangle_s = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\langle 1\,1|V|2\,0\rangle + \langle 1\,1|V|0\,2\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 2\cdot\frac{\lambda\hbar\omega}{\sqrt{2}} = \lambda\hbar\omega$$

$$V = \begin{pmatrix} 0 & \lambda\hbar\omega \\ \lambda\hbar\omega & 0 \end{pmatrix}$$ autovalori $\pm\lambda\hbar\omega$

Il livello si separa in $3\hbar\omega \pm \lambda\hbar\omega$

c) (a1)

fond $n=0$ $E=\hbar\omega$ $\overset{n_1\,n_2}{|0\,0\rangle}\overset{S\,S_z}{|0\,0\rangle}$ non degenere

Qui $\bar{S}=\bar{S}_1+\bar{S}_2$ è lo spin totale

Iecc $n=1$ $E=\hbar\omega$ $\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\,0\rangle+|0\,1\rangle\right)|0\,0\rangle \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\,0\rangle-|0\,1\rangle\right)|\underset{\overset{\uparrow}{S}}{1}\ \underset{\overset{\uparrow}{S_z}}{m}\rangle\end{cases}$ deg. $1+3=4$

IIecc. $n=2$ $E=2\hbar\omega$

$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|2\,0\rangle+|0\,2\rangle\right)|0\,0\rangle$

$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|2\,0\rangle-|0\,2\rangle\right)|1\,m\rangle$ deg : $1+3+1=5$

$|1\,1\rangle|0\,0\rangle$

(a2)

fond. come prima $\Delta E=0$

I ecc : base : $|10\rangle_S|00\rangle$, $|10\rangle_A|11\rangle$,
$|10\rangle_A|10\rangle$, $|10\rangle_A|1-1\rangle$

dove $|10\rangle_S$ e $|10\rangle_A$ sono $\frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle+|01\rangle)$ e $\frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle-|01\rangle)$ rispettivamente.

Per l'ortogonalità delle funzioni di spin, la matrice delle perturbazione è diagonale

$$\begin{pmatrix} {}_S\langle 10|V|10\rangle_S & 0 & 0 & 0 \\ 0 & {}_A\langle 10|V|10\rangle_A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & {}_A\langle 10|V|10\rangle_A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \langle 10|V|10\rangle_A \end{pmatrix}$$

Calcoliamo

$${}_A\langle 10|V|10\rangle_A = \left(\langle 10| - \langle 01|\right) V \left(|10\rangle - |01\rangle\right)\frac{1}{2}$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\langle 10|V|01\rangle + \langle 01|V|10\rangle\right] = -\frac{\lambda}{2}\hbar\omega$$

$${}_S\langle 10|V|10\rangle_S = +\frac{\lambda}{2}\hbar\omega$$ (già calcolato al punto b)

Lo spettro si separa

$$E = 2\hbar\omega \begin{cases} +\frac{\lambda}{2}\hbar\omega & \text{(non deg.)} \quad \text{(spin 0)} \\ -\frac{\lambda}{2}\hbar\omega & \text{deg. 3} \quad \text{(spin 1)} \end{cases}$$

II ecc. : Ordiniamo la base secondo

$|11\rangle|00\rangle$, $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|20\rangle+|02\rangle\right)|00\rangle \equiv |20\rangle_S|00\rangle$

$|20\rangle_A|11\rangle$, $|20\rangle_A|10\rangle$, $|20\rangle_A|1-1\rangle$

L'ortogonalità delle funzioni di spin implica

$$\left(\begin{array}{cc|ccc}
\langle 11|V|11\rangle_S & \langle 11|V|20\rangle_S & 0 & 0 & 0 \\
{}_S\langle 20|V|11\rangle_S & {}_S\langle 20|V|20\rangle_S & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & \langle 20|V|20\rangle_A & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \langle 20|V|20\rangle_A & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & {}_A\langle 20|V|20\rangle_A
\end{array}\right.$$

La matrice è a blocchi. Dato che $\langle 20|V|20\rangle_A = 0$ il blocco 3×3 (stati di spin 1) ha 3 autovalori nulli. Il blocco 2×2 è già stato considerato al punto b): due autovalori pari a $\pm\lambda\hbar\omega$

Energie

$$E = 3\hbar\omega \begin{cases} +\lambda\hbar\omega & \text{non deg.} \quad \text{Spin} = 0 \\ 0 & \text{deg. } 3 \quad \text{Spin} = 1 \\ -\lambda\hbar\omega & \text{non deg.} \quad \text{Spin} = 0 \end{cases}$$

d)

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2x_1^2 + \frac{1}{2}m\omega^2x_2^2 - m\omega^2x_1x_2$$

$$= \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(x_1-x_2)^2$$

Se $\begin{cases} x = x_2 - x_1 & \text{coord. rel} \\ X = \frac{1}{2}(x_1+x_2) & \text{coord CM} \end{cases}$

$$= \frac{P^2}{2M} + \frac{p^2}{2\mu} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2$$

Nel CM $H = \dfrac{p^2}{2\mu} + \dfrac{1}{2}m\omega^2x^2$ $\qquad \mu = \dfrac{m}{2}$

$$= \frac{p^2}{2\mu} + \frac{1}{2}2\mu\omega^2x^2 = \frac{p^2}{2\mu} + \frac{1}{2}\mu(\sqrt{2}\omega)^2x^2$$

È un oscillatore di pulsazione $\sqrt{2}\omega$

Per particelle distinguibili ⑰

$$E_n = \hbar \sqrt{2}\omega \left(n + \frac{1}{2}\right)$$

Per bosoni solo gli stati pari sotto $x \to -x$ sono accettabili. Quindi n può assumere solo valori pari

$E_0 = \hbar \frac{\sqrt{2}}{2}\omega$ fond.

$E_2 = \hbar \frac{5\sqrt{2}}{2}\omega$ I ecc.

$E_4 = \hbar \frac{9\sqrt{2}}{2}\omega$ II ecc.

· ADDENDUM

È pure possibile risolvere il problema in modo esatto. Se effettuiamo la trasf. canonica

$$\begin{cases} Q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_1+q_2) & P_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_1+p_2) \\ Q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_1-q_2) & P_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_1-p_2) \end{cases}$$

abbiamo

$$H = \frac{1}{2m}(P_1^2+P_2^2) + \frac{1}{2}m\omega^2(Q_1^2+Q_2^2) + \frac{m\omega^2}{2}\lambda(Q_1^2-Q_2^2)$$

$$= \frac{1}{2m}P_1^2 + \frac{1}{2}m\omega^2(1+\lambda)Q_1^2 + \frac{1}{2}m\omega^2(1-\lambda)Q_2^2 + \frac{1}{2m}P_2^2$$

Se $|\lambda| < +1$ si tratta di due oscillatori di pulsazioni $\Omega_1 = \omega\sqrt{1+\lambda}$ $\Omega_2 = \omega\sqrt{1-\lambda}$

Spettro per particelle distinguibili spin 0

$$E(n_1,n_2) = \hbar\Omega_1(n_1+\tfrac{1}{2}) + \hbar\Omega_2(n_2+\tfrac{1}{2})$$

Per valori generici di λ lo spettro è non degenere

Per $\lambda \to 0$

$$E(n_1,n_2) = \hbar\omega\left(1+\frac{\lambda}{2}\right)(n_1+\tfrac{1}{2}) + \hbar\omega\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)(n_2+\tfrac{1}{2}) + O(\lambda^2)$$

$$= \hbar\omega(n_1+n_2+1) + \hbar\omega\frac{\lambda}{2}(n_1-n_2) + O(\lambda^2)$$

Per particelle indistinguibili, notiamo che sotto scambio

$$Q_1 \to Q_1 , \quad Q_2 \to -Q_2$$

Quindi

$E(n_1,n_2) \longrightarrow$ autostato $\psi_{n_1}(Q_1)\psi_{n_2}(Q_2)$

pari sotto scambio per n_2 pari

dispari sotto scambio per n_2 dispari

- Particelle indistinguibili di spin 0.

n_2 deve essere necessariamente pari

- Particelle di spin 1/2 indistinguibili

Gli autostati sono

$$\psi_{n_1}(Q_1)\,\psi_{n_2}(Q_2)\,|\overset{S}{0}\ \overset{S_z}{0}\rangle \qquad n_2 \text{ pari [deg. 1]}$$

$$\psi_{n_1}(Q_1)\,\psi_{n_2}(Q_2)\,|1\ S_z\rangle \qquad n_2 \text{ dispari [deg. 3]}$$

---

controllo dei risultati precedenti

ⓐ

$n_1 = n_2 = 0 \qquad \hbar\omega + 0 + O(\lambda^2)$

$$\begin{cases} n_1 = 0 \quad n_2 = 1 & 2\hbar\omega - \frac{\lambda}{2}\hbar\omega \\ n_4 = 1 \quad n_2 = 0 & 2\hbar\omega + \frac{\lambda}{2}\hbar\omega \end{cases}$$

$$\begin{cases} n_1 = 0 \quad n_2 = 2 & 3\hbar\omega - \lambda\hbar\omega \\ n_1 = 1 \quad n_2 = 1 & 3\hbar\omega \end{cases}$$

$n_1 = 2 \quad n_2 = 0 \qquad 3\hbar\omega + \lambda\hbar\omega$

ⓑ

$n_1 = n_2 = 0 \qquad \hbar\omega$

$n_1 = 1 \quad n_2 = 0 \qquad 2\hbar\omega + \frac{\lambda}{2}\hbar\omega$

$n_1 = 2 \quad n_2 = 0 \qquad 3\hbar\omega + \lambda\hbar\omega$

$n_1 = 0 \quad n_2 = 2 \qquad 3\hbar\omega - \lambda\hbar\omega$

ⓒ

spettro come ⓐ : stati con n_2 disp. deg. 3 ;
n_2 pari deg. 1.

Esercizio 2

a) La Hamiltoniana è invariante per rotazioni e quindi commuta con $\vec{J}$ e commuta pure con L^2 dato che dipende da $p^2, |\vec{r}|$ e $[\vec{L}, \vec{p}^2] = [\vec{L}, |\vec{r}|] = 0$

Quindi scegliamo una base contemporanea di H, J^2, J_z, L^2 e cerchiamo autofunzioni della forma,

$R(r) | L \, J \, J_z >$

Ovviamente L e J non sono indipendenti dato che

$|L - \frac{3}{2}| \leq J \leq |L + \frac{3}{2})$ In particolare J è semiintero.

Dato che $(2\vec{L} \cdot \vec{S} + L^2) = J^2 - S^2 = J^2 - \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \hbar^2$

$$H\left(R(r)|L J J_z>\right) = \frac{p^2}{2M}\left(R(r)|L J J_z>\right) + \frac{k}{r}\hbar^2\left(J(J+1) - \frac{15}{4}\right) \cdot R(r)|L J J_z>$$

Ricordiamo che $H = \frac{p^2}{2M} + \frac{\alpha}{r}$ con $\alpha > 0$ (potenziale repulsivo) non ha traiettorie classiche limitate e quindi non ha stati legati.. Stati legati esistono solo se $\alpha < 0$

Quindi esistono stati legati con $E<0$ solo se

$$\alpha_J = k\hbar^2\left(J(J+1) - \frac{15}{4}\right) < 0$$

$J = \frac{1}{2}$ $\quad \alpha_{1/2} = k\hbar^2\left(\frac{3}{4} - \frac{15}{4}\right) = -3k\hbar^2$

$J = \frac{3}{2}$ $\quad \alpha_{3/2} = 0$

$J = \frac{5}{2}$ $\quad \alpha_{5/2} = k\hbar^2\left(\frac{35}{4} - \frac{15}{4}\right) > 0.$

Quindi vi sono stati legati solo per $J = 1/2$

Determiniamo quindi i possibili valori di L.

Se $L=0$ J è uguale a $3/2$

$L=1$ $J = 1/2, 3/2, 5/2$

$L=2$ $J = 1/2, 3/2, 5/2, 7/2$

solo per $L=1$ e 2 è possibile avere $J=1/2$

$L=3$ $J = 3/2, 5/2, 7/2, 9/2$

ecc.

Quindi vanno considerati solo stati con $\begin{cases} J=1/2 & L=1 \\ J=1/2 & L=2 \end{cases}$

Per questi stati

$$H\left(R(r)\,|L\ \tfrac{1}{2}\ J_z\rangle\right) = \frac{p^2}{2M}\left(R(r)\,|L\ \tfrac{1}{2}\ J_z\rangle - \frac{\alpha}{r} R(r)\,|L\ \tfrac{1}{2}\ J_z\rangle\right.$$

$$\alpha = 3k\hbar^2$$

Quindi abbiamo $H\psi = E\psi$

$$\frac{1}{r}\left(-\frac{\hbar^2}{2M}\right)\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rR)\,|L\ \tfrac{1}{2}\ J_z\rangle + \frac{\hbar^2(L+1)L}{2mr^2} R\,|L\ \tfrac{1}{2}\ J_z\rangle$$

$$-\frac{\alpha}{r}R(r)\,|L\ \tfrac{1}{2}\ J_z\rangle = E\,R(r)\,|L\ \tfrac{1}{2}\ J_z\rangle$$

Otteniamo quindi l'equazione radiale dell'atomo di idrogeno

$$-\frac{\hbar^2}{2Mr}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rR) + \frac{\hbar^2 L(L+1)}{2mr^2}R - \frac{\alpha}{r}R = ER$$

Se

$$E_n = -\frac{M}{2\hbar^2}\frac{\alpha^2}{n^2}$$

troviamo:

$n=1$ una soluzione con $L=0$ $[R_{10}]$

$n=2$ una soluzione con $L=0$ ed una con $L=1$ $[R_{20}, R_{21}]$

$n=3$ sol. con $L=0, 1, 2$ $[R_{30}, R_{31}, R_{32}]$

ecc.

Tenuto conto che solo $L=1$ e $L=2$ sono possibili lo spettro è dato

$n=2$ $\quad E=-\frac{M}{2\hbar^2}\frac{\alpha'}{4}$ $\quad R_{21}|\overset{L}{1}\ \overset{J}{\tfrac{1}{2}}\ J_z\rangle$ $\quad$ deg 2

$n=3$ $\quad E=-\frac{M}{2\hbar^2}\frac{\alpha'}{9}$ $\quad \begin{cases} R_{31}|1\ \frac{1}{2}\ J_z\rangle \\ R_{32}|2\ \frac{1}{2}\ J_z\rangle \end{cases}$ $\quad$ deg. 4

$n=4$ $\quad E=-\frac{M}{2\hbar^2}\frac{\alpha'}{16}$ $\quad \begin{cases} R_{41}|1\ \frac{1}{2}\ J_z\rangle \\ R_{42}|2\ \frac{1}{2}\ J_z\rangle \end{cases}$ $\quad$ deg. 4

ecc.

A parte lo stato fondamentale, tutti i livelli hanno degenerazione 4.

Esplicitando α : $\quad E_n=-\frac{M}{2\hbar^2}\frac{9k^2\hbar^4}{n^2}$ $\quad n: 2,\dots\ \infty$

$$=-\frac{9}{2}k^2M\hbar^2\frac{1}{n^2}$$

b)

$E_2=-\frac{9}{8}Mk^2\hbar^2$ $\quad$ stato fond.

$E_3=-\frac{1}{2}Mk^2\hbar^2$ $\quad$ I ecc.

$E_4=-\frac{9}{32}Mk^2\hbar^2$ $\quad$ II ecc.

Il testo indica che $\quad E<-\frac{1}{3}Mk^2\hbar^2=-\frac{9}{27}Mk^2\hbar^2$

$$<-\frac{9}{32}Mk^2\hbar^2$$

Quindi vanno considerati solo gli stati con $n=2$ e 3. [in totale 6 stati]

Il requisito ii) è $\langle\psi|J_z|\psi\rangle = \hbar/2$.
Dato che $|\psi\rangle$ è somma di autofunzioni di J_z con autovalore $+\hbar/2$ e $-\hbar/2$ questa condizione implica che $|\psi\rangle$ è autofunzione di J_z con autovalore $+\hbar/2$.

DIMOSTRAZIONE FORMALE

p_+ : probabilità di misurare $J_z = +\hbar/2$ su $|\psi\rangle$
p_- : probabilità di misurare $J_z = -\hbar/2$ su $|\psi\rangle$

Quindi $\langle\psi|J_z|\psi\rangle =$ (è un valor medio).-

$$= p_+\frac{\hbar}{2} + p_-\left(-\frac{\hbar}{2}\right)$$

Quindi $\langle\psi|J_z|\psi\rangle = \frac{\hbar}{2} \Longrightarrow \quad p_+ - p_- = 1 \quad p_+ = 1 + p_-$

Dato che $p_+ \leq 1$ e $p_- \geq 0$ (sono probabilità) deve essere $p_- = 0$ e $p_+ = 1 \Rightarrow$ una misura di J_z su $|\psi\rangle$ dà $\hbar/2$ con certezza

Riscriviamo lo spinore usando $|S_z\rangle$

$$|\psi\rangle = f(r)\sin\theta\, e^{-i\varphi}\left|\tfrac{3}{2}\right\rangle$$
$$+\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}f\cos\theta + \frac{g}{\sqrt{3}}\sin\theta\, e^{-i\varphi}\right)\left|\tfrac{1}{2}\right\rangle$$
$$+\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}f\sin\theta\, e^{i\varphi} - \frac{2}{\sqrt{3}}g\cos\theta\right)\left|-\tfrac{1}{2}\right\rangle$$
$$-g\sin\theta\, e^{i\varphi}\left|-\tfrac{3}{2}\right\rangle$$

Ora $\cos\theta = \sqrt{\frac{4\pi}{3}}\,Y_1^0 \longrightarrow \sqrt{\frac{4\pi}{3}}\,|1\,0\rangle$

$$\sin\theta\, e^{+i\varphi} = -\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\,Y_1^1 \longrightarrow -\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\,|1\;1\rangle$$

$$\sin\theta\, e^{-i\varphi} = +\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\,Y_1^{-1} \longrightarrow \sqrt{\frac{8\pi}{3}}\,|1\,-1\rangle$$

$$|\psi\rangle = f\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\,|1\,-1\rangle\left|\frac{3}{2}\right\rangle$$

$$\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}f\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\,|1\,0\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}g\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\,|1\,-1\rangle\right)\left|\frac{1}{2}\right\rangle$$

$$+\left(+\frac{1}{\sqrt{3}}f\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\,|1\,1\rangle - \frac{2}{\sqrt{3}}g\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\,|1\,0\rangle\right)\left|-\frac{1}{2}\right\rangle$$

$$+\,g\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\,|1\,1\rangle\left|-\frac{3}{2}\right\rangle$$

Ricordando che $J_z = L_z + S_z$ vi sono 3 termini che sono autofunzioni di J_z con autovalore $-\hbar/2$:

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{3}}g\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\,|1\,-1\rangle\left|\frac{1}{2}\right\rangle}_{J_z=-1+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}} - \underbrace{\frac{2}{\sqrt{3}}g\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\,|1\,0\rangle\left|-\frac{1}{2}\right\rangle}_{J_z=0-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}} + \underbrace{g\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\,|1\,1\rangle\left|-\frac{3}{2}\right\rangle}_{J_z=1-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}}$$

Quindi la condizione ii) implica $g(r)=0$.
Segue

$$|\psi\rangle = f\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\,|1\,-1\rangle\left|\frac{3}{2}\right\rangle - \frac{2}{\sqrt{3}}f\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\,|1\,0\rangle\left|\frac{1}{2}\right\rangle +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{3}}f\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\,|1\,1\rangle\left|-\frac{1}{2}\right\rangle$$

$$= f(r)\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\left\{|1\,-1\rangle\left|\frac{3}{2}\right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}\,|1\,0\rangle\left|\frac{1}{2}\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}\,|1\,1\rangle\left|-\frac{1}{2}\right\rangle\right\}$$

Notiamo che tutti gli stati in $|\psi\rangle$ hanno $L=1$.
Quindi la condizione i) + ii) implica che $|\psi\rangle$ è combinazione lineare degli stati $n=2$, $n=3$ con $L=1$, $J_z=\frac{1}{2}$.

$$|\psi\rangle = A R_{21}\,|\overset{L}{1}\;\overset{J}{\tfrac{1}{2}}\;\overset{J_z}{\tfrac{1}{2}}\rangle + B R_{31}\,|1\;\tfrac{1}{2}\;\tfrac{1}{2}\rangle$$

$$= \left(A R_{21}(r) + B R_{31}(r)\right)|\overset{L}{1}\;\overset{J}{\tfrac{1}{2}}\;\overset{J_z}{\tfrac{1}{2}}\rangle$$

Per confrontare con l'espressione trovata riscriviamo

$$|1\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1\,-1\rangle|\tfrac{3}{2}\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}}|1\,0\rangle|\tfrac{1}{2}\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}|1\,1\rangle|-\tfrac{1}{2}\rangle$$

(tabella CG $\overset{S}{3/2}\times\overset{L}{1}$)(colonna $\frac{1}{2}\ +\frac{1}{2}$)

Quindi

$$\begin{aligned}|\psi\rangle = (A R_{21}(r) + B R_{31})\Big(&\frac{1}{\sqrt{2}}|1\,-1\rangle|\tfrac{3}{2}\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}}|1\,0\rangle|\tfrac{1}{2}\rangle + \\ &+\frac{1}{\sqrt{6}}|1\,1\rangle|-\tfrac{1}{2}\rangle\Big)\end{aligned}$$

Confrontando otteniamo

$$f(r)\sqrt{\frac{8\pi}{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(A R_{21} + B B_{31})$$

Rimangono da definire A e B. La normalizzazione dello stato impone

$$|A|^2 + |B|^2 = 1$$

La condizione iii) impone $|A|^2 = \frac{3}{4}$

Quindi

$$|A| = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad |B| = \frac{1}{2}$$

Scegliamo $A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $B = \frac{1}{2}e^{i\alpha}$ con α arbitraria

Quindi

$$f(r) = \sqrt{\frac{3}{16\pi}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}R_{21}(r) + \frac{1}{2}e^{i\alpha}R_{31}(r)\right)$$

$$|\psi\rangle = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}R_{21}(r) + \frac{1}{2}e^{i\alpha}R_{31}\right)|1\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\rangle$$

c)

Riscriviamo

$$|\psi\rangle = \underset{\uparrow}{F(r)} \left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}|1\,-1\rangle|\tfrac{3}{2}\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}}|1\,0\rangle|\tfrac{1}{2}\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}|1\,1\rangle|-\tfrac{1}{2}\rangle}_{\text{normalizzato rispetto a } d\Omega \text{ e prodotto scalare spazio spin (è } |1\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\rangle)} \right.$$

normalizzata

$\left[\int dr\, r^4 |F|^2 = 1\right]$

Quindi

$\text{Prob}(L_z = +\hbar) = \frac{1}{6}$

$\text{Prob}(L_z = 0) = \frac{1}{3}$

$\text{Prob}(L_z = -\hbar) = \frac{1}{2}$

d) Se $\quad |\psi\rangle = F(r)|1\,\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\rangle$

$$\langle\psi|r|\psi\rangle = \int dr\, r^2 |F(r)|^2 r \overbrace{\langle 1\,\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}|1\,\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\rangle}^{\to\, = 1}$$

$$= \int_0^\infty dr\, r^3 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} R_{21} + \frac{1}{2} e^{-i\alpha} R_{31}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} R_{21} + \frac{1}{2} e^{i\alpha} R_{31}\right)$$

$$= \int dr\, r^3 \left(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Positivo}}}{\frac{3}{4} R_{21}^2} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Positivo}}}{\frac{1}{4} R_{31}^2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\alpha\, R_{21} R_{31}\right)$$

Quindi, trovare il Max di $\langle\psi|r|\psi\rangle$ corrisponde a trovare il max di

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha \int dr\, r^3 R_{21} R_{31}$$

Se l' integrale è positivo $\quad \alpha = 0$

è negativo $\quad \alpha = \pi$

Calcoliamo l' integrale

$$\int_0^\infty dr\, r^3\, R_{21}(r) R_{31}(r)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{(2a_0)^{3/2}} \frac{4\sqrt{2}}{9} \frac{1}{(3a_0)^{3/2}} \int_0^\infty dr\, r^3 \frac{r^2}{a_0}\left(1-\frac{r}{6a_0}\right) e^{-\frac{5r}{6a_0}}$$

Poniamo $x = \frac{5r}{6a_0}$. A parte una costante moltiplicativa (POSITIVA) abbiamo

$$= (\text{costante} > 0) \cdot \int_0^\infty dx\, x^5 \left(1 - \frac{x}{5}\right) e^{-x}$$

$$= (\text{costate} > 0) \left(5! - \frac{6!}{5}\right) =$$

$$= (\text{costante} > 0)\; 5! \left(1 - \frac{6}{5}\right)$$

$$= (\text{costante} > 0)\; 5! \left(-\frac{1}{5}\right)$$

Quindi l'integrale è negativo e $\alpha = \pi$.

Calcolo esatto dell'integrale

$$\int_0^\infty dr\, r^3 R_{21} R_{31} = -\frac{16}{27}\left(\frac{6}{5}\right)^6 a_0$$

Sebbene non utili per la soluzione del problema

$$\int dr\, r^3 R_{21}^2 = 5a_0$$

$$\int dr\, r^3 R_{31}^2 = \frac{25}{2} a_0$$

Esiste una formula generale:

$$\langle n\, l\, m | r | n\, l\, m \rangle = \frac{1}{2}\left(3n^2 - l(l+1)\right) a_0$$