Esame di Meccanica Quantistica, 09/02/2024

Esercizio 1. Due particelle di uguale massa m sono vincolate a muoversi in una dimensione. La Hamiltoniana è data da $\hat{H}=\hat{H}_0+\lambda\hat{V}$ dove

$$\hat{H}_0=\frac{1}{2m}(\hat{p}_1^2+\hat{p}_2^2)+\frac{1}{2}m\omega^2\left(\hat{x}_1^2+\hat{x}_2^2\right) \qquad\qquad \hat{V}=m\omega^2\hat{x}_1\hat{x}_2.$$

a) Si assuma che le due particelle siano distinguibili di spin 0.

(a_1) Si determini l'energia dei primi 3 livelli di H_0, la degenerazione e una base di autostati.

(a_2) Si assuma $0<\lambda\ll 1$. Si calcoli al primo ordine perturbativo in λ la correzione all'energia dei primi 3 livelli di $\hat{H}_0$ e si discuta l'eventuale rimozione della degenerazione.

b) Si assuma che le due particelle siano indistinguibili e di spin 0. Si risponda nuovamente alle domande a_1 e a_2.

c) Si assuma che le due particelle siano indistinguibili e abbiano spin 1/2. Si risponda nuovamente alle domande a_1 e a_2.

d) Si consideri ora la Hamiltoniana H con $\lambda=-1$.

(d_1) Si scriva H nel sistema di riferimento del centro di massa.

(d_2) Nel sistema di riferimento del centro di massa, si determini l'energia dei primi 3 livelli di $\hat{H}$, la degenerazione e una base di autostati. Si assuma che le due particelle siano indistinguibili e di spin 0.

Esercizio 2. Il moto di una particella di massa M e spin 3/2 è determinato dalla Hamiltoniana

$$H=\frac{p^2}{2M}+\frac{\kappa}{r}\left(2\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{S}+L^2\right)\,,$$

dove $\kappa>0$ è un parametro e $r=|\boldsymbol{r}|$.

a) Si determini lo spettro dei livelli energetici degli stati legati, la relativa degenerazione e le corrispondenti autofunzioni dell'Hamiltoniana.

b) Si considerino gli stati legati descritti da funzioni d'onda spinoriali della forma

$$\psi(r,\theta,\varphi)=\begin{bmatrix} f(r)\sin\theta e^{-i\varphi} \\ -\frac{2}{\sqrt{3}}f(r)\cos\theta+\frac{g(r)}{\sqrt{3}}\sin\theta e^{-i\varphi} \\ -\frac{f(r)}{\sqrt{3}}\sin\theta e^{i\varphi}-\frac{2}{\sqrt{3}}g(r)\cos\theta \\ -g(r)\sin\theta e^{i\varphi} \end{bmatrix}$$

dove $f(r)$ e $g(r)$ sono funzioni di r. Si determinino tutti gli stati ψ per i quali: *i)* una misura dell'energia fornisce con certezza un valore minore di $-M\kappa^2\hbar^2/3$; *ii)* $\langle\psi|J_z|\psi\rangle=\hbar/2$; *iii)* la probabilità che una misura dell'energia fornisca il valore dell'energia dello stato fondamentale è 3/4.

c) Quali sono i risultati possibili di una misura di L_z su tutti gli stati ψ trovati al punto precedente e quali sono le corrispondenti probabilità ?

d) Tra gli stati trovati al punto b), si determini quello per il quale $\langle\psi|r|\psi\rangle$ assume il valore massimo.

Formula utile:

$$\Gamma(n+1) = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = n!$$

Autofunzioni radiali $R_{nl}(r)$ per il problema Coulombiano (a_0 è il raggio di Bohr):

$$\begin{aligned}
R_{10}(r) &= 2\frac{1}{a_0^{3/2}}\, e^{-\frac{r}{a_0}} \\
R_{20}(r) &= \frac{1}{(2a_0)^{3/2}} \left(2 - \frac{r}{a_0}\right) e^{-\frac{r}{2a_0}} \\
R_{21}(r) &= \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{(2a_0)^{3/2}} \frac{r}{a_0}\, e^{-\frac{r}{2a_0}} \\
R_{30}(r) &= 2\frac{1}{(3a_0)^{3/2}} \left(1 - \frac{2r}{3a_0} + \frac{2r^2}{27a_0^2}\right) e^{-\frac{r}{3a_0}} \\
R_{31}(r) &= \frac{4\sqrt{2}}{9} \frac{1}{(3a_0)^{3/2}} \frac{r}{a_0} \left(1 - \frac{r}{6a_0}\right) e^{-\frac{r}{3a_0}} \\
R_{32}(r) &= \frac{2\sqrt{2}}{27\sqrt{5}} \frac{1}{(3a_0)^{3/2}} \left(\frac{r}{a_0}\right)^2 e^{-\frac{r}{3a_0}}\,.
\end{aligned}$$