Esercizio 1.

a) Trattandosi di bosoni, la funzione d'onda deve essere pari sotto scambio. Dato che la parte spaziale è pari, la parte di spin deve essere pari.

Quindi $c=a$.

Normalizzazione [f è normalizzata]: $|a|^2+|b|^2+|c|^2=1$

Probabilità : $|b|^2=1/2$

Quindi $|b|=\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad |a|=|c|=\frac{1}{2}$

Se $a=c$ reale, $b=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\alpha}$, $a=\frac{1}{2}$

$$\psi=f(\bar{r}_1,\bar{r}_2)\left(\frac{1}{2}|1\,-1\rangle+\frac{e^{i\alpha}}{\sqrt{2}}|1\,1\rangle+\frac{1}{2}|-1\,1\rangle\right)$$

Per fissare α calcoliamo $\langle\psi|S_{1x}^2S_{2x}^2|\psi\rangle=\left|S_{1x}S_{2x}|\psi\rangle\right|^2$

Dato che $\begin{cases}S_+=S_x+iS_y\\ S_-=S_x-iS_y\end{cases}$ $\qquad S_x=\frac{1}{2}(S_++S_-)$

abbiamo

$$\frac{1}{\hbar}S_{1x}|\psi\rangle=\text{(scriviamo solo la parte di spin)}$$
$$=\frac{1}{2}(S_{1+}+S_{1-})\left(\frac{1}{2}|1\,-1\rangle+\frac{e^{i\alpha}}{\sqrt{2}}|1\,1\rangle+\frac{1}{2}|-1\,1\rangle\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}|0\,1\rangle+\frac{\sqrt{2}}{2}|0\,-1\rangle+e^{i\alpha}|0\,1\rangle\right)$$

$$\frac{1}{\hbar^2}S_{2x}S_{1x}|\psi\rangle=\frac{1}{4}(S_{2+}+S_{2-})\left[\frac{\sqrt{2}}{2}|0\,1\rangle+\frac{\sqrt{2}}{2}|0\,-1\rangle+e^{i\alpha}|0\,1\rangle\right]$$
$$=\frac{1}{4}\left[|0\,0\rangle+|0\,0\rangle+\sqrt{2}e^{i\alpha}|0\,0\rangle\right]$$
$$=\frac{1}{4}(2+\sqrt{2}e^{i\alpha})|0\,0\rangle$$

Reintroducendo f: $\quad S_{2x}S_{1x}|\psi\rangle=f(r_1,r_2)\frac{\hbar^2}{4}(2+\sqrt{2}e^{i\alpha})|00\rangle$

$$\langle\psi|S_{1x}^2S_{2x}^2|\psi\rangle=\frac{\hbar^4}{16}|2+\sqrt{2}e^{i\alpha}|^2=\frac{\hbar^4}{16}(4+2+4\sqrt{2}\cos\alpha)$$
$$=\frac{\hbar^4}{8}(3+2\sqrt{2}\cos\alpha)$$

Il massimo si ottiene per $\alpha = 0$. Quindi lo stato è

$$|\psi\rangle = f(r_1, r_2)\left(\frac{1}{2}|1\,-1\rangle + \frac{1}{2}|-1\;1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\;1\rangle\right)$$

b)

$$H = H_0 + \frac{\omega}{2\hbar}\left(S^2 - S_1^2 - S_2^2\right) = H_0 + \frac{\omega}{2\hbar}\left(S^2 - 4\hbar^2\right)$$

Riscriviamo gli stati in termini di $|S\,S_z\rangle_S$ autofunzioni dello spin totale S^2, S_z

$$|1\,-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}|2\,0\rangle_S + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\,0\rangle_S + \frac{1}{\sqrt{3}}|0\,0\rangle_S$$

$$|-1\;1\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}|2\,0\rangle_S + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\,0\rangle_S + \frac{1}{\sqrt{3}}|0\,0\rangle_S$$

$$|1\;1\rangle = |2\;2\rangle_S$$

$$|\psi\rangle = f(r_1, r_2)\left(\frac{1}{\sqrt{6}}|2\,0\rangle_S + \frac{1}{\sqrt{3}}|0\,0\rangle_S + \frac{1}{\sqrt{2}}|2\;2\rangle_S\right)$$

$$H\left(f(r_1,r_2)|2\;m\rangle_S\right) = E_0 + \frac{\omega}{2\hbar}\left(6\hbar^2 - 4\hbar^2\right) = E_0 + \hbar\omega$$

$$H\left(f(r_1,r_2)|0\,0\rangle_S\right) = E_0 + \frac{\omega}{2\hbar}\left(-4\hbar^2\right) = E_0 - 2\hbar\omega$$

$$\text{Prob}\,(E = E_0 + \hbar\omega) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Prob}\,(E = E_0 - 2\hbar\omega) = \frac{1}{3}$$

[Nota: non è necessario considerare l'evoluto: le probabilità non dipendono da t]

c) Tutte le quantità che appaiono in H sono scalari. Quindi $[H, \vec{J}] = 0$

d) Dato che $[H, \vec{J}] = 0$ le probabilità non dipendono da t. Non è quindi necessario calcolare l'evoluto temporale

La funzione radiale si riscrive come

$$f(\bar r_1, \bar r_2) = N' r_1 r_2 e^{-\alpha(r_1^2+r_2^2)} Y_1^1(\theta_1,\varphi_1) Y_1^1(\theta_2,\varphi_2)$$

Ora $Y_1^1(\theta_1,\varphi_1) Y_1^1(\theta_2,\varphi_2) \longrightarrow \overset{L_1\ L_{1z}}{|1\ 1\rangle}\overset{L_2\ L_{2z}}{|1\ 1\rangle} =$

$$= |\underset{\substack{\uparrow\\ L}}{2}\ \underset{\substack{\uparrow\\ L_z}}{2}\rangle_L \qquad \bar L = \bar L_1 + \bar L_2$$

Quindi

$$\psi = \underbrace{g(r_1, r_2)}_{} |2\ 2\rangle_L \left(\frac{1}{\sqrt6}|2\ 0\rangle_S + \frac{1}{\sqrt2}|2\ 2\rangle_S + \frac{1}{\sqrt3}|0\ 0\rangle_S\right)$$

↳ funzione solo dei moduli r_1, r_2

Cambiamo base: da $|L\ L_z\rangle_L |S\ S_z\rangle_S \longrightarrow |L\ S\ J\ J_z\rangle$

$$|2\ 2\rangle_L |2\ 0\rangle_S = \sqrt{\frac{3}{14}}|2\ 2\ 4\ 2\rangle_J + \frac{1}{\sqrt2}|2\ 2\ 3\ 2\rangle_J + \sqrt{\frac{2}{7}}|2\ 2\ 2\ 2\rangle_J$$

$$|2\ 2\rangle_L |2\ 2\rangle_S = |2\ 2\ 4\ 4\rangle_J$$

$$|2\ 2\rangle_L |0\ 0\rangle_S = |2\ 0\ 2\ 2\rangle_J$$

Quindi

$$\psi = g(r_1,r_2)\left(\frac{1}{\sqrt{28}}|2\ 2\ 4\ 2\rangle_J + \frac{1}{\sqrt{12}}|2\ 2\ 3\ 2\rangle_J + \sqrt{\frac{1}{21}}|2\ 2\ 2\ 2\rangle_J + \frac{1}{\sqrt2}|2\ 2\ 4\ 4\rangle_J + \frac{1}{\sqrt3}|2\ 0\ 2\ 2\rangle_J\right)$$

$$\underset{(J=4)}{\text{Prob}(J^2 = 20\hbar^2)} = \frac{1}{28} + \frac{1}{2} = \frac{15}{28}$$

$$\underset{(J=3)}{\text{Prob}(J^2 = 12\hbar^2)} = \frac{1}{12}$$

$$\underset{J=2}{\text{Prob}(J^2 = 6\hbar^2)} = \frac{1}{21} + \frac{1}{3} = \frac{8}{21}$$

Esercizio 2

a) H_0 è invariante per rotazioni dato che contiene solo scalari. Quindi $[H_0, \vec{L}] = 0$

Sotto parità ($P\vec{r}P = -\vec{r}$, $P\vec{p}P = -\vec{p}$) abbiamo $P|\vec{r}|P = |r|$ e $Pp^2P = p^2$. Quindi $PH_0P = H_0 \Rightarrow [H_0, P] = 0$

$V(x,y) = V(-x,-y) \Rightarrow \quad PVP = V \Rightarrow \quad [P, V] = 0$

Il commutatore $[V, \vec{L}]$ non è nullo dato che V è invariante solo per rotazioni intorno a z.

L'invarianza per rotazioni intorno a z implica $[V, L_z] = 0$

Alternativamente (molto più laborioso) si può notare che

$$V = Ar^2(\sin^2\theta\cos^2\varphi + \sin^2\theta\sin^2\varphi) = Ar^2\sin^2\theta$$

Quindi V non dipende da φ. Allora V commuta con $L_z = -i\hbar\, \partial/\partial\phi \quad \Rightarrow \quad [V, L_z] = 0$

Calcolo degli altri commutatori.

$$[V, L_x] = A[x^2+y^2, L_x] = A[y^2, L_x] =$$
$$= Ay[y, L_x] + A[y, L_x]y =$$
$$= Ay(-i\hbar z) + A(-i\hbar z)y = -2i\hbar Ayz$$

$$[V, L_y] = A[x^2+y^2, L_y] = A[x^2, L_y]$$
$$= Ax[x, L_y] + A[x, L_y]x$$
$$= Ax(i\hbar z) + A(i\hbar z)x = 2i\hbar Axz$$

b) Lo stato fondamentale è non degenere $|n\ l\ l_z\rangle = |1\,0\,0\rangle$

$$|1\,0\,0\rangle \rightarrow R_{10}(r)Y_0^0(\theta,\varphi) = \frac{2}{a_0^{3/2}}e^{-r/a_0}Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{a_0^{3/2}}e^{-r/a_0}$$

$$\Delta E = A \langle 100 | r^2 \sin^2\theta | 100 \rangle$$

$$= A \int d^3r \, \frac{1}{\pi a_0^3} e^{-2r/a_0} r^2 \sin^2\theta \qquad \frac{2r}{a_0} = x$$

$$= \frac{A}{\pi a_0^3} \left(\frac{a_0}{2}\right)^5 \int_0^\infty dx \, x^4 e^{-x} \int \sin^2\theta \, d\cos\theta \int d\varphi \qquad y = \cos\theta$$

$$= \frac{A}{\pi a_0^3} \frac{a_0^5}{2^5} 4! \, 2\pi \int_{-1}^{1} dy \, (1-y^2)$$

$$= \frac{3}{2} A a_0^2 \cdot 2\left(1 - \frac{1}{3}\right) = 2 A a_0^2$$

c) Il primo stato eccitato è 4 volte degenere. Una base è data da $|2\,0\,0\rangle$, $|2\,1\,m\rangle$ $\quad m = \pm 1, 0$

 $n \; \ell \; \ell_z$

Dato che V è pari per parità $PVP = P$

$$\langle 200 | V | 21m \rangle = \langle 200 | P \, PVP \, P | 21m \rangle$$

$$= \langle 200 | (+1) \, V \, (-1) | 21m \rangle$$

$$= - \langle 200 | V | 21m \rangle$$

Quindi $\langle 200 | V | 21m \rangle = 0$

Dato che $[V, L_z] = 0$ abbiamo

$$\langle 21m | [V, L_z] | 21m' \rangle = 0$$

$$\langle 21m | (V\hbar m' - \hbar m V) | 21m' \rangle = 0$$

$$\hbar (m' - m) \langle 21m | V | 21m' \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle 21m | V | 21m' \rangle = 0 \quad \text{se} \quad m \neq m'$$

Quindi la perturbazione è diagonale nella base considerata

Ora

$$\langle 2\,\ell m | V | 2\,\ell m \rangle =$$

$$= A \int d^3r\, R_{2\ell}^2\, |Y_\ell^m|^2\, r^2 \sin^2\theta \qquad [\,|Y_\ell^m|^2 \text{ non dip. da } \phi\,]$$

$$= A \left[\int_0^\infty dr\, r^4 R_{2\ell}^2\right]\left[\int d\cos\theta\, |Y_\ell^m|^2 \sin^2\theta\right]\int d\varphi$$

$$= 2\pi A\, I_\ell\, J_{\ell m}$$

$$I_0 = \int_0^\infty dr\, r^4 \frac{1}{(2a_0)^3}\left(2 - \frac{r}{a_0}\right)^2 e^{-r/a_0} \qquad x = r/a_0$$

$$= \frac{a_0^2}{8}\int_0^\infty dx\, x^4 (4 - 4x + x^2)\, e^{-x}$$

$$= \frac{a_0^2}{8}(4\cdot 4! - 4\cdot 5! + 6!) = \frac{a_0^2}{8}\cdot 4!\,(4 - 20 + 30) = 3\cdot 14\, a_0^2 = 42\, a_0^2$$

$$I_1 = \int_0^\infty dr\, r^4 \frac{1}{(2a_0)^3}\,\frac{r^2}{3a_0^2}\, e^{-r/a_0} \qquad x = r/a_0$$

$$= \frac{a_0^2}{24}\int dx\, x^6 e^{-x} = \frac{a_0^2}{24}\cdot 6! = 30\, a_0^2$$

$$J_{00} = \int d\cos\theta\, \frac{1}{4\pi}\sin^2\theta = \frac{1}{4\pi}\int_{-1}^{1} dy\,(1-y^2) = \frac{1}{4\pi}\cdot 2\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3\pi}$$

$$J_{10} = \int d\cos\theta\, \frac{3}{4\pi}\cos^2\theta \sin^2\theta \qquad \boxed{y = \cos\theta}$$

$$= \frac{3}{4\pi}\int dy\,(1-y^2)\,y^2 = \frac{3}{4\pi}\int dy\,(y^2 - y^4)$$

$$= \frac{3}{4\pi}\cdot 2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{3}{2\pi}\cdot\frac{2}{15} = \frac{1}{5\pi}$$

$$J_{11} = \int d\cos\theta\, \frac{3}{8\pi}\sin^4\theta = \frac{3}{8\pi}\int dy\,(1 - 2y^2 + y^4)$$

$$= \frac{3}{8\pi}\cdot 2\left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) = \frac{3}{4\pi}\cdot\frac{8}{15} = \frac{2}{5\pi}$$

$$J_{1-1} = J_{11}$$

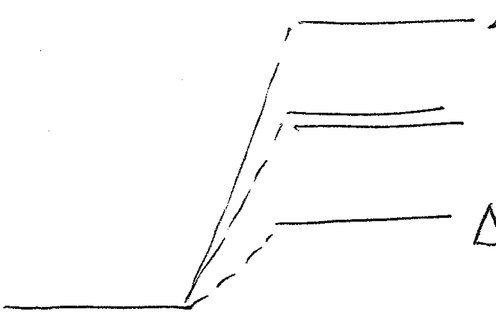
Quindi

$$\langle 200|V|200\rangle = 2\pi A\, I_0\, J_{00}$$
$$= 2\pi A\, 42 a_0^2\, \frac{1}{3\pi} = 28\, A a_0^2$$

$$\langle 21\pm1|V|21\pm1\rangle = 2\pi A\, I_1\, J_{11}$$
$$= 2\pi A \cdot 30 a_0^2\, \frac{2}{5\pi} = 24\, A a_0^2$$

$$\langle 210|V|210\rangle = 2\pi A\, I_1\, J_{10} = 2\pi A\, 30 a_0^2\, \frac{1}{5\pi} = 12\, A a_0^2$$

Il primo stato eccitato si separa



$\Delta E = 28 A a_0^2$ $\quad (L_z = 0)$

$\Delta E = 24 A a_0^2$ deg. 2 $\quad (L_z = \pm 1)$

$\Delta E = 12 A a_0^2$ $\quad (L_z = 0)$

La degenerazione dei livelli con $L_z = \pm 1$ era prevedibile vista la simmetria cilindrica e sotto inversione $\phi \to -\phi$ della Hamiltoniana $H_0 + V$. Quindi la degenerazione è una proprietà ESATTA, non dipendente dalla approssimazione perturbativa.