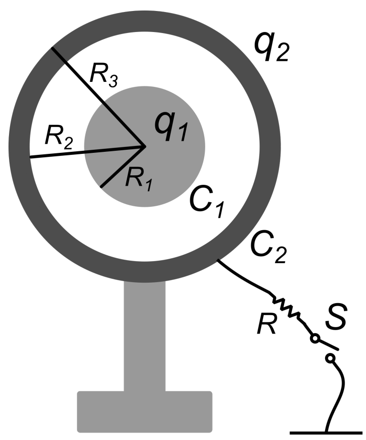
Prova scritta di Fisica II - 17 Gennaio 2024

Nome ______________________ Cognome ______________________ Canale ________

Matricola ______________________ Orale in questo appello ☐ Ritirato/a ☐

Nota Bene: Il formulario vuole essere un supporto qualora non ricordiate alcune formule e non abbiate tempo per ricavarle. Tenete presente che il solo scrivere la formula giusta trovata nel formulario per rispondere ad una domanda **non** porta ad avere alcun punteggio in quella domanda. Si ricorda anche che tutte le risposte vanno correttamente motivate, la sola risposta numerica non è sufficiente per avere punti relativi alla domanda in questione.

Primo Esercizio



Un isolante sferico C_1 di raggio $R_1 = 20$ cm ha una carica $q_1 = -4 \cdot 10^{-8}$ C distribuita uniformemente nel suo volume ed è completamente contenuto e concentrico all'interno di un guscio conduttore sferico C_2 di raggio interno $R_2 = 40$ cm e raggio esterno $R_3 = 45$ cm isolato da terra. Sul conduttore C_2 viene depositata una carica $q_2 = 9 \cdot 10^{-8}$ C.

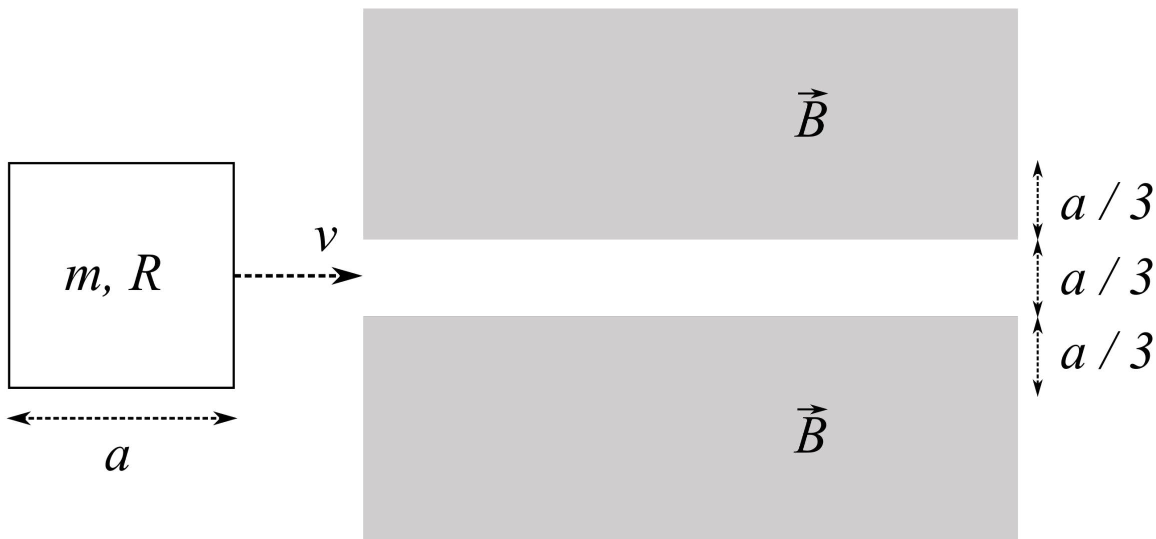
1. Indicare come sono distribuite le cariche nel sistema isolante-conduttore all'equilibrio **(3 punti)**. Calcolare e disegnare l'andamento del campo elettrico generato in tutto lo spazio dal sistema isolante-conduttore. **(3 punti)**.

2. Calcolare la differenza di potenziale elettrico tra la superficie dell'isolante e il conduttore, ΔV_{12}, e tra il conduttore e la terra, $\Delta V_{3\infty}$. **(4 punti)**.

La superficie esterna del conduttore viene messa in contatto con la terra chiudendo l'interruttore S su un filo conduttore di resistenza $R = 10\ \Omega$.

3. Calcolare la differenza tra l'energia elettrostatica del sistema prima e dopo il contatto con la terra **(4 punti)**. Indicare il verso di una eventuale corrente elettrica che attraversa il filo conduttore e l'energia dissipata nella resistenza R durante il processo **(2 punti)**.

Secondo Esercizio



Una spira quadrata di lato $a = 9$ cm, massa $m = 10$ g e resistenza $R = 1\,\Omega$ si muove senza attrito con velocità $v = 100$ cm/s. Al tempo $t = 0$ il terzo superiore e il terzo inferiore della spira entrano in regioni di spazio (in grigio in figura) in cui è presente un campo magnetico di modulo $B = 1$ T ortogonale al piano. Appena la spira entra nelle regioni di campo, in essa si misura una corrente di intensità i che scorre in verso antiorario.

Nel caso in cui v sia mantenuta sempre costante in ogni fase del moto da una forza esterna,

1. Calcolare dopo quanto tempo t_f il terzo superiore e il terzo inferiore della spira sono completamente immersi nella regione di campo **(4 punti)**.

2. Determinare il verso del campo e l'intensità della corrente indotta che scorre nella spira per $0 < t < t_f$ **(6 punti)**;

Nel caso in cui non ci sia alcuna forza esterna che mantiene costante v,

3. Determinare la quantità di energia dissipata sulla resistenza al termine del moto **(6 punti)**.

Soluzione del primo esercizio

1. Utilizzando il teorema di Gauss possiamo trovare la distribuzione di cariche nel sistema e calcolare l'andamento del campo elettrico in funzione del raggio. La carica totale racchiusa all'interno della sfera è nullo in condizioni di equilibrio. Ciò significa che sulla superficie interna del guscio conduttore si distribuisce uniformemente una carica pari a

$$q_{int} = -q_1 = 4 \cdot 10^{-8} \text{ C}$$

Sulla superficie esterna del guscio sferico sarà invece sia la carica depositata q_2 che le cariche q_1 che sono andate a compensare le $-q_1$ interne, quindi:

$$q_{ext} = q_1 + q_2 = 5 \cdot 10^{-8} \text{ C}$$

Il campo elettrico in funzione del raggio è calcolato utilizzando una superficie sferica per il calcolo del flusso con raggio r crescente da 0 a ∞ e valutando le cariche interne alla superficie in funzione di r. Per ragioni di simmetria il campo elettrico sarà sempre ortogonale alla superficie sferica. Nella regione interna all'isolante la carica interna contenuta nella sfera di raggio r e superficie $\Sigma = 4\pi r^2$ è $Q_{int} = q_1 \frac{r^3}{R_1^3}$. Il campo è:

$$E(r < R_1) = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0 \Sigma} = \frac{q_1 r}{4\pi\epsilon_0 R_1^3}$$

Fuori dall'isolante il campo decade come quello di una carica puntiforme q_1:

$$E_1 = E(r = R_1) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1^2}$$

$$E(R_1 < r < R_2) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$E_2 = E(r = R_2) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_2^2}$$

All'interno del conduttore il campo è nullo:

$$E(R_2 < r < R_3) = 0$$

Fuori dal conduttore il campo decade come quello di una carica puntiforme $q_1 + q_2$

$$E_3 = E(r = R_3) = \frac{q_1 + q_2}{4\pi\epsilon_0 R_3^2}$$

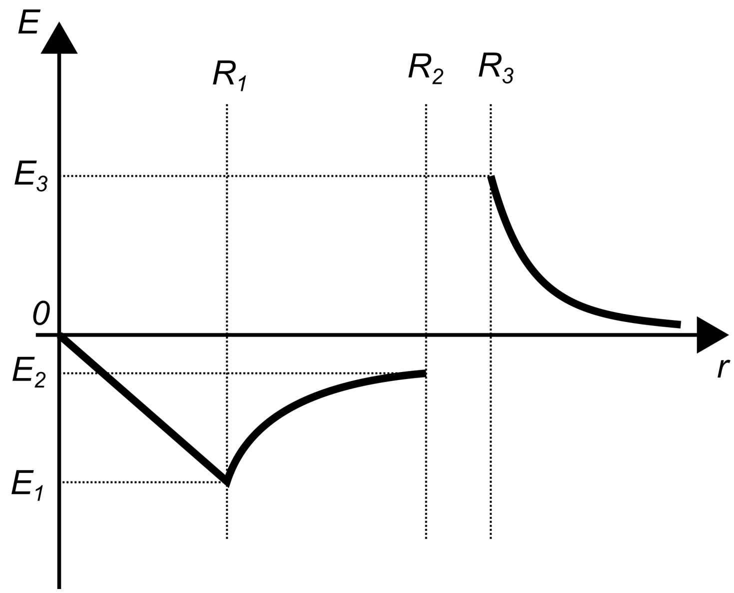


Figura 1. Andamento del campo elettrico.

$$E(r > R_3) = \frac{q_1 + q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

2. Per calcolare la differenza di potenziale si deve integrare il campo rispetto al raggio:

$$\Delta V_{12} = -\int_{R_1}^{R_2} E(r)dr = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right] = 900 \text{ V}$$

$$\Delta V_{3\infty} = -\int_{R_3}^{R_\infty} E(r)dr = \frac{q_1 + q_2}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{R_\infty} - \frac{1}{R_3}\right] = -1000 \text{ V}$$

3. Dopo la messa a terra le cariche (positive) presenti sulla superficie esterna del conduttore lasciano il conduttore scorrendo attraverso la resistenza verso la terra. La distribuzione delle cariche all'interno del guscio conduttore non cambia e la differenza di energia è solo dovuta alla diversa distribuzione delle cariche sulla superficie esterna del guscio conduttore. L'energia iniziale si può calcolare partendo dalla capacità di una sfera carica

$$C = 4\pi\epsilon_0 R$$

come:

$$U = \frac{C}{2\Delta V^2} = \frac{Q^2}{2C} = \frac{(q_1 + q_2)^2}{8\pi\epsilon_0 R_3} = 2.5 \cdot 10^{-5} \text{ J}$$

Che è anche la differenza di energia ΔU tra prima e dopo la messa a terra, essendo una sfera scarica a energia elettrica nulla.

Il verso della corrente è dal conduttore alla terra (le cariche positive lasciano il conduttore) e l'energia dissipata nella resistenza nel processo, dato che è un processo spontaneo, è uguale all'energia persa dal sistema:

$$U_R = \Delta U = 2.5 \cdot 10^{-5} \text{ J}$$

Soluzione del secondo esercizio

1. Poiché la velocità è costante, t_f è pari al tempo che la spira impiega a percorrere la sua lunghezza (a), quindi

$$t_f = \frac{a}{v} = 0.09\,\mathrm{s}$$

2. Poiché la corrente indotta deve generare una forza che si oppone al moto, il campo deve essere entrante. Per calcolare l'intensità della corrente usiamo la legge di Faraday. Il flusso al generico tempo t vale

$$\Phi(\vec{B}) = \frac{2}{3}Bax(t) = \frac{2}{3}Bavt$$

e quindi la forza elettromotrice indotta è

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = -\frac{2}{3}Bav.$$

Di conseguenza, l'intensità di corrente vale

$$i = |\mathcal{E}|\frac{1}{R} = \frac{2}{3}\frac{Bav}{R} = 6 \times 10^{-2}\,\mathrm{A}$$

3. La forza di attrito elettromagnetico rallenta la spira fino a fermarla, quindi l'energia dissipata per effetto Joule è tutta l'energia (cinetica) che possedeva la spira all'inizio, cioè

$$U_R = \frac{1}{2}mv^2 = 5 \times 10^{-3}\,\mathrm{J}$$

NOTA BENE: con i numeri dati nel compito la spira tecnicamente non si ferma (lo farebbe con una resistenza $R = 0.1\ \Omega$, ad esempio) ma raggiunge una velocità limite, e quindi la domanda risultava ambigua. Per questo motivo durante lo svolgimento dello scritto ho detto che si poteva considerare "termine del moto" la situazione in cui la spira si ferma completamente. Per questo motivo abbiamo deciso di essere meno severi nella correzione di questo punto.