1. Studiare la funzione

$$f(x) = \log\left(\frac{|x|}{8+x}\right) + x \ ,$$

e in particolare: dominio, eventuali simmetrie e/o periodicità, insiemi di continuità e di derivabilità, limiti significativi, asintoti; crescenza e decrescenza, estremi relativi e assoluti, eventuali punti di non derivabilità; concavità, convessità, flessi. Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$.

Dominio: $(-8,0)\cup(0,+\infty)$

Continuità e limiti significativi: f è continua nel suo dominio.

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$; $\lim_{x\to-8^+} f(x) = +\infty$

$x=0$ e $x=-8$ asintoti verticali.

$y = x$ asintoto obliquo per $x\to+\infty$.

Derivata prima, monotonia: f è derivabile nel suo dominio.

$$f'(x) = \frac{x^2+8x+8}{x^2+8x} = 1 + \frac{8}{x^2+8x} \quad \forall x \in \text{dom } f.$$

$f'(x) = 0 \iff x = -4 \pm \sqrt{8}$

$f'(x) > 0 \iff x \in (-4-\sqrt{8}, -4+\sqrt{8}) \cup (0,+\infty)$

$f'(x) < 0 \iff x \in (-8, -4-\sqrt{8}) \cup (-4+\sqrt{8}, 0)$

f strettamente crescente in $[-4-\sqrt{8}, -4+\sqrt{8}]$ e in $(0,+\infty)$;

f strettamente decrescente in $(-8, -4-\sqrt{8}]$ e in $[-4+\sqrt{8}, 0)$.

$x = -4-\sqrt{8}$ punto di minimo locale stretto;

$x = -4+\sqrt{8}$ " " massimo " ".

Derivata seconda, concavità, convessità:

$$f''(x) = -\frac{16(x+4)}{(x^2+8x)^2} \quad \forall x \in \text{dom } f$$

$f''(x) = 0 \iff x = -4$;

$f''(x) > 0 \iff x \in (-8,-4)$;

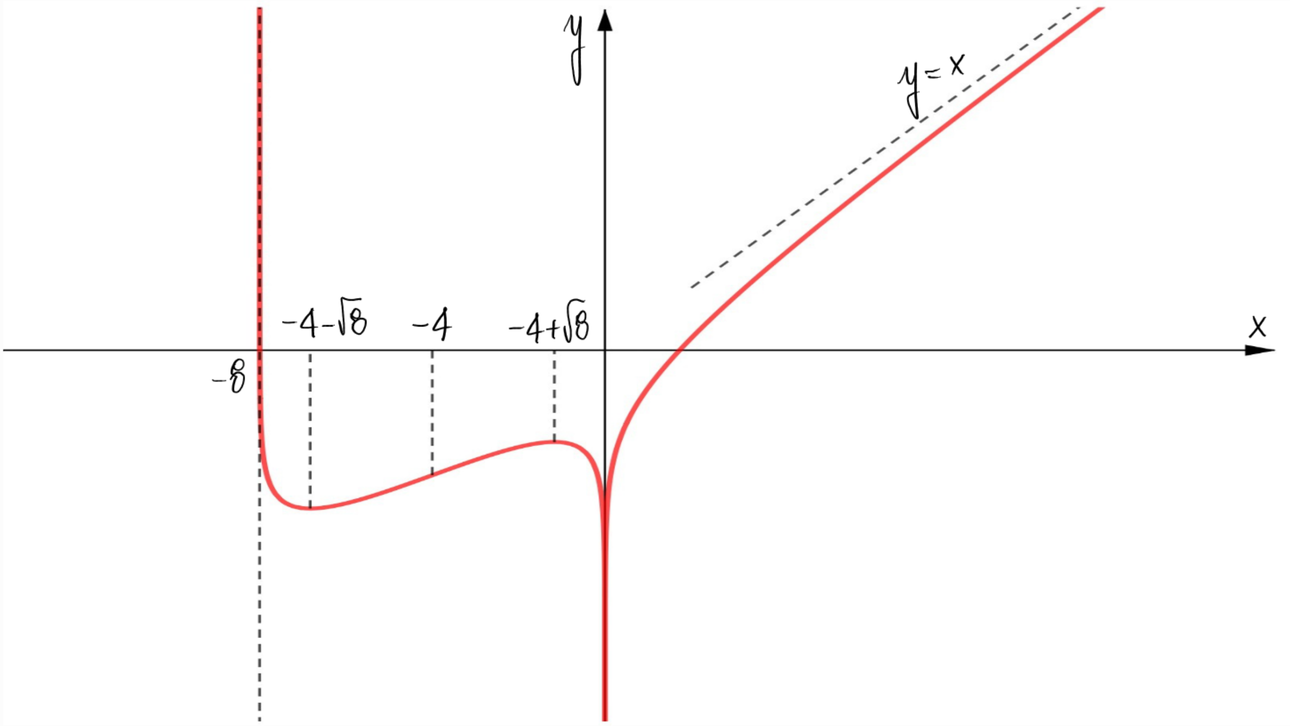
$f''(x) < 0 \iff x \in (-4,0)\cup(0,+\infty)$.

f è strettamente convessa in $(-8,-4]$;

strettamente concava in $[-4,0)$ e in $(0,+\infty)$;

$x=-4$ è punto di flesso.

Segue grafico qualitativo di f.



2. a) Trovare le radici quarte di $\dfrac{4\sqrt{3}+4i}{\sqrt{3}-i}$, e disegnarle nel piano complesso.

b) Trovare tutti i numeri $z \in \mathbb{C}$ tali che $\dfrac{3-z}{3+z}$ sia immaginario puro, e disegnarli nel piano complesso.

a) Prima si calcola $\dfrac{4\sqrt{3}+4i}{\sqrt{3}-i}$ in coord. polari.

$$4\sqrt{3}+4i = 8e^{i\pi/6}$$
$$\sqrt{3}-i = 2e^{-i\pi/6}$$
$$\Rightarrow \frac{4\sqrt{3}+4i}{\sqrt{3}-i} = 4e^{i\pi/3}$$

Le radici quarte valgono $z_k = \sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{\pi}{12}+k\frac{\pi}{2}\right)}$, $k=0,1,2,3$, cioè:

$z_0 = \sqrt{2}\, e^{i\pi/12} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{12}\right)$; $z_1 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{7}{12}\pi}$;

$z_2 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{13}{12}\pi}$; $z_3 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{19}{12}\pi}$.

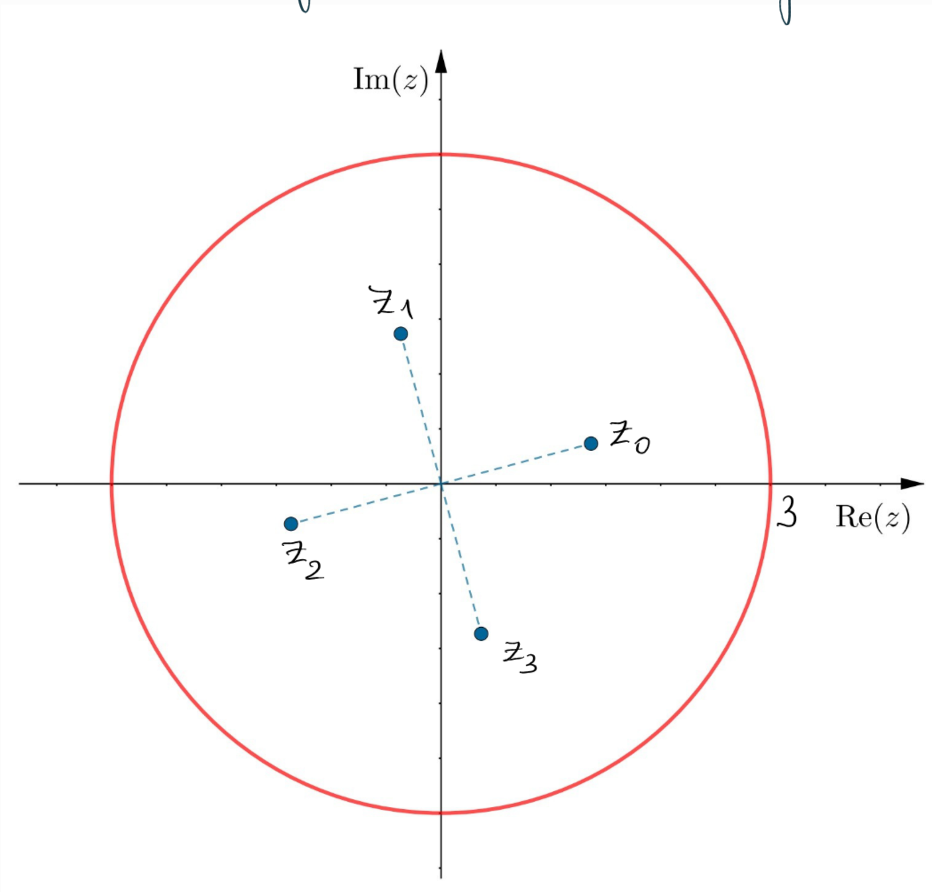
b) Posto $z = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$, si ha

$$\frac{3-z}{3+z} = \frac{3-x-iy}{3+x+iy} = \frac{(3-x-iy)(3+x-iy)}{(3+x)^2+y^2} = \frac{(3-iy)^2-x^2}{(3+x)^2+y^2} =$$

moltiplico e divido per $3+x-iy$

$$= \frac{(9-y^2-x^2)-6iy}{(3+x)^2+y^2} \in \mathbb{R} \iff x^2+y^2=9 \iff |z|=3$$

è la circonferenza di centro l'origine e raggio 3.

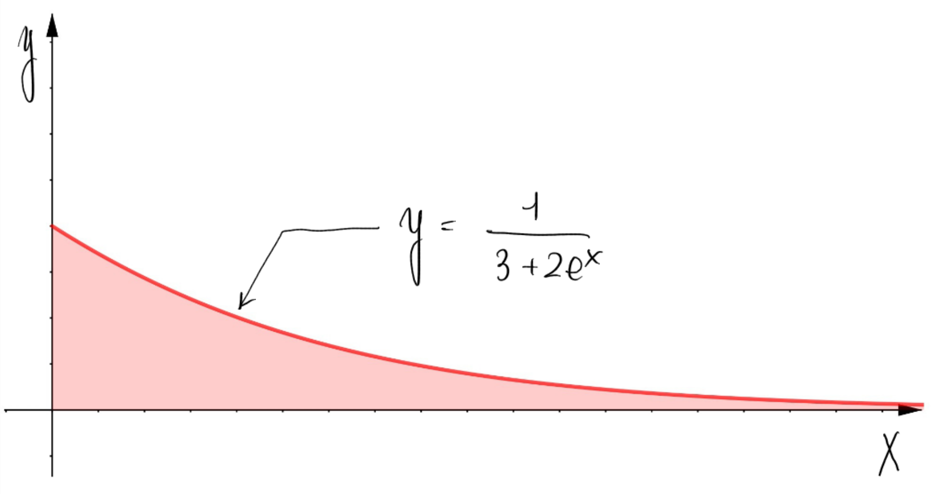


In blu le sol^{ni} di a)

In rosso le sol^{ni} di b).

3. Calcolare l'area della regione (illimitata) del primo quadrante del piano cartesiano compresa tra gli assi cartesiani e il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{1}{3+2e^x}\ .$$



La regione è quella colorata in figura. La sua area è: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{3+2e^x}$

Calcoliamo l'integrale indefinito:

$$\int \frac{dx}{3+2e^x} \underset{\substack{e^x = t \\ dx = \frac{dt}{t}}}{=} \int \frac{dt}{(3+2t)t} \underset{\substack{\text{scomposizione} \\ \text{in fratti semplici}}}{=} \frac{1}{3}\int \left(\frac{1}{t} - \frac{2}{3+2t}\right) dt =$$

$$= \frac{1}{3}\log\left(\frac{t}{3+2t}\right) + c = \frac{1}{3}\log\left(\frac{e^x}{3+2e^x}\right) + c$$

Pertanto

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{3+2e^x} = \lim_{\omega\to+\infty} \int_0^{\omega} \frac{dx}{3+2e^x} = \frac{1}{3}\lim_{\omega\to+\infty}\left[\log\left(\frac{e^\omega}{3+2e^\omega}\right) - \log\left(\frac{1}{5}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left(\log\left(\frac{1}{2}\right) - \log\left(\frac{1}{5}\right)\right) = \frac{1}{3}\log\left(\frac{5}{2}\right)$$

4. Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{n\to+\infty}(2n+\sqrt{n})^{\frac{1}{\log n}}\,, \qquad \lim_{x\to0}\frac{\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}-4}{\operatorname{arctg}(x^2)}\,.$$

a) E' una forma indeterminata del tipo $(+\infty)^0$.

$$(2n+\sqrt{n})^{\frac{1}{\log n}} = e^{\frac{\log(2n+\sqrt{n})}{\log n}} \longrightarrow e \qquad \text{per } n\to+\infty$$

in quanto $\log(2n+\sqrt{n}) = \log n + \underbrace{\log(2+n^{-3/2})}_{\to \log 2} \sim \log n$.

b) Si tratta di una f. i. del tipo $\left(\frac{0}{0}\right)$.

Usando lo sviluppo di Maclaurin $\sqrt{1+t} = 1+\frac{t}{2}-\frac{t^2}{8}+o(t^2)$ per $t\to0$,

$$\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}-4 = 2\sqrt{1+\frac{x}{4}}+2\sqrt{1-\frac{x}{4}}-4$$

$$= 2\left(\cancel{1}+\cancel{\frac{x}{8}}-\frac{x^2}{128}+o(x^2)\right)+2\left(\cancel{1}-\cancel{\frac{x}{8}}-\frac{x^2}{128}+o(x^2)\right)-\cancel{4} =$$

$$= -\frac{x^2}{32}+o(x^2) \qquad \text{per } x\to0$$

Poiché $\operatorname{arctg} x^2 \sim x^2$ per $x\to0$,

il limite vale $-\frac{1}{32}$.

5. a) Trovare lo sviluppo di Maclaurin del terzo ordine di $f(x) = \operatorname{arctg} x - \log(1 + \sin x)$.

b) Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{n}} - \log\left(1 + \sin \frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \frac{\alpha}{n} \right].$$

a) Usando gli sviluppi di Maclaurin

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3) \qquad \text{per } x \to 0$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \qquad \text{''}$$

$$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3) \qquad \text{per } t \to 0,$$

con $t = \sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \longrightarrow 0$ per $x \to 0$,

si ottiene

$$\log(1+\sin x) = \log\left(1 + \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\right) =$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) - \frac{1}{2}\underbrace{\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2}_{= x^2 + o(x^3)} +$$

$$+ \frac{1}{3}\underbrace{\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^3}_{= x^3 + o(x^3)} + \underbrace{o\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)}_{= o(x^3)} =$$

$$= x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} =$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \qquad \text{per } x \to 0$$

Pertanto $f(x) = \cancel{x} - \frac{x^3}{3} + o(x^3) - \cancel{x} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + o(x^3) \qquad \text{per } x \to 0$$

b) Per il precedente punto, il termine a_n della serie vale

$$a_n = f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \frac{\alpha}{n} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) - \frac{\alpha}{n} =$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \alpha\right)\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) \qquad \text{per } n \to +\infty.$$

Pertanto, per confronto asintotico con la serie armonica generalizzata, la serie diverge se $\alpha \neq 1/2$ (precisamente, diverge a $\pm\infty$ a seconda che $\alpha \lessgtr \frac{1}{2}$).

Se invece $\alpha = 1/2$, si ha $a_n \sim -\frac{1}{2n^{3/2}}$, e la serie (che è def^{te} a termini negativi) converge per confronto con la serie armonica generalizzata.