Esame di Meccanica Quantistica, 24/01/2023

Esercizio 1. a) Si considerino due particelle di spin 1/2 che interagiscono con Hamiltoniana (non si consideri la parte spaziale)

$$H_{\rm spin} = \frac{\alpha}{\hbar} S_{1z} S_{2z}.$$

Si calcolino i livelli di $H_{\rm spin}$ e se ne discuta la degenerazione. Si considerino poi gli tutti gli stati possibili della forma $|SS_z\rangle$, autostati di S^2 e S_z dove $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2$; per ciascuno di essi si calcolino i valori ottenibili in una misura di $H_{\rm spin}$ e le relative probabilità.

b) Si considerino due particelle identiche di spin 1/2 e di massa m. Le due particelle sono vincolate a muoversi lungo una retta (asse x) ed interagiscono con Hamiltoniana $H = H_0 + H_1$, con

$$H_0 = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{m}{4}\omega^2 (x_1 - x_2)^2 \qquad H_1 = -\frac{2\omega}{\hbar} S_{1x} S_{2x}.$$

(Si noti che le componenti dello spin si riferiscono all'asse x). Si determini lo spettro di H nel sistema del centro di massa, specificando la degenerazione dei primi tre livelli.

c) Nel centro di massa le due particelle sono in uno stato normalizzato $|\psi\rangle$ la cui funzione d'onda è

$$\psi(x) = \psi_1(x)\chi_1 + \psi_3(x)\chi_3, \qquad x = x_1 - x_2$$

dove le funzioni $\psi_n(x)$ sono autofunzioni di H_0 nel centro di massa con autovalore $\hbar\omega(n + \frac{1}{2})$; χ_1 e χ_3 sono spinori da determinare. Li si determini richiedendo che: i) la probabilità che S_z sia uguale a $-\hbar$ sia nulla; ii) $|\psi\rangle$ sia un autostato di H_1; iii) $\langle\psi|H_0|\psi\rangle = 2\hbar\omega$.
Se si misura S_z sugli stati $|\psi\rangle$, quali valori si ottengono e con quale probabilità?

d) Per gli stati calcolati al punto c) si determini l'evoluto temporale $|\psi, t\rangle$. Quindi si calcoli il valor medio $\langle\psi, t|(x_1 - x_2)^2|\psi, t\rangle$.

Esercizio 2. Si consideri un sistema di due particelle identiche di spin 1, vincolate ad avere distanza relativa costante ($|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2| = R$). Nel sistema del centro di massa la dinamica è descritta dall'Hamiltoniana

$$H_0 = \frac{\hat{L}^2}{2I} + \alpha\, \hat{\boldsymbol{L}} \cdot \hat{\boldsymbol{S}}$$

dove $\hat{\boldsymbol{L}}$ è il momento angolare, $\hat{\boldsymbol{S}} = \hat{\boldsymbol{S}}_1 + \hat{\boldsymbol{S}}_2$ è lo spin totale, I è il momento di inerzia ed α è un parametro costante. Si assuma $0 < \alpha I \ll 1$. Si risolva il problema nel sistema del centro di massa.

a) Si calcolino i primi quattro livelli energetici e le relative degenerazioni, indicando i corrispondenti autostati di H_0.

b) Si calcoli il valore medio di $\hat{L}_z$, $\hat{L}_x$, $\hat{L}_z^2$, $\hat{L}_x^2$ in funzione del tempo, quando il sistema si trova nel suo primo livello eccitato. Se $L_{z,H}(t)$ è la componente z del momento angolare nella rappresentazione di Heisenberg, si calcolino gli operatori $d\hat{L}_{z,H}/dt$ e $d\hat{L}_{z,H}^2/dt$ ed i loro valori medi sul primo livello eccitato.

c) Si consideri la perturbazione $\Delta H = \epsilon \hat{S}_z \sin\theta\cos\theta\cos\phi$, dove $\theta \in [0, \pi]$ e $\phi \in [-\pi, \pi]$ specificano il vettore $\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$ in coordinate sferiche. Si calcoli la correzione al secondo livello energetico al primo ordine perturbativo nel parametro ϵ.

d) Si consideri la perturbazione $\Delta H = \epsilon \hat{S}_z \sin\theta \cos\theta \cos\phi$, dove $\theta \in [0, \pi]$ e $\phi \in [-\pi, \pi]$ specificano il vettore $\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$ in coordinate sferiche. Si calcoli la correzione al secondo livello eccitato al primo ordine perturbativo nel parametro ϵ.

ESERCIZIO 1

(a)

Gli stati $|S_{1z}\, S_{2z}\rangle$ sono autostati di H_{spin}

Vi sono due livelli

$$E_0 = \frac{\alpha}{\hbar}\left(-\frac{\hbar^2}{4}\right) = -\frac{\alpha\hbar}{4} \qquad \text{base} \quad \overset{S_{1z}\ S_{2z}}{\left|\tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\right\rangle} \ \text{e} \ \left|-\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\right\rangle$$

$$E_1 = \frac{\alpha}{\hbar}\left(\frac{\hbar^2}{4}\right) = \frac{\alpha\hbar}{4} \qquad \text{base} \quad \left|\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\right\rangle \ \text{e} \ \left|-\tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\right\rangle$$

Gli stati $|S\, S_z\rangle$ possibili corrispondono a $S=1$, e $S=0$

Sono anch'essi autostati di H_{spin}

$$\overset{S\ S_z}{|1\,1\rangle} = \overset{S_{1z}\ S_{2z}}{\left|\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\right\rangle} \qquad \text{misura di } H_0 \to \frac{\alpha\hbar}{2} \text{ con prob. } 1$$

$$|1\,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\right\rangle + \left|-\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\right\rangle\right) \qquad \to -\frac{\alpha\hbar}{2} \text{ con prob. } 1$$

$$|1\,-1\rangle = \left|-\tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\right\rangle \qquad \to \frac{\alpha\hbar}{2} \text{ con prob. } 1$$

$$|0\,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\right\rangle - \left|-\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\right\rangle\right) \qquad \to -\frac{\alpha\hbar}{2} \text{ con prob. } 1$$

(b)

Nel CM

$$H_0 = \frac{p^2}{2\mu} + \frac{\mu}{2}\omega^2 x^2 \qquad \text{dove} \begin{cases} x = x_1 - x_2 \\ p \text{ impulso coniugato a } x \end{cases} \qquad \mu = \frac{m}{2}$$

Lo spettro di H_1 è uguale a quello di H_{spin} $(\alpha = -2\omega)$

quindi vi sono due livelli

$$E_0 = \frac{\hbar\omega}{2} \qquad \text{base} \quad \overset{S_{1x}\ S_{2x}}{\left|\tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\right\rangle_x} \quad \overset{S_{1x}\ S_{2x}}{\left|-\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\right\rangle_x}$$

$$\text{oppure} \quad |\underset{S}{0}\ \underset{S_x}{0}\rangle_x \quad |\underset{S}{1}\ \underset{S_x}{0}\rangle_x \qquad S_x = S_{1x} + S_{2x}$$

$$E_0 = -\frac{\hbar\omega}{2} \qquad \text{base} \quad \overset{S_{1x}\ S_{2x}}{\left|\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\right\rangle_x} \quad \left|-\tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\right\rangle_x$$

$$\text{oppure} \quad |\underset{S}{1}\ \underset{S_x}{1}\rangle_x \quad |\underset{S}{1}\ \underset{S_x}{-1}\rangle_x$$

Quindi gli stati possibili per due particelle ③
IDENTICHE sono

$E = \hbar\omega$ $\begin{cases} |1\rangle|11\rangle_x \text{ e } |1\rangle|1-1\rangle_x \\ |0\rangle|00\rangle_x \end{cases}$ deg. 3

~~$E = 2\hbar\omega$~~

$E = 2\hbar\omega$ $|1\rangle|10\rangle_x$ non deg.

$E = 3\hbar\omega$ $\begin{cases} |3\rangle|11\rangle_x \text{ e } |3\rangle|1-1\rangle_x \\ |2\rangle|00\rangle_x \end{cases}$ deg. 3

c) Per utilizzare le condizioni i) e ii) dobbiamo ~~col~~ esprimere le autofunzioni di H_1 nella base $|S\ S_z\rangle$. Notiamo inoltre che, per il principio di Pauli, gli spinori χ_1 e χ_3 devono essere autofunzioni di S^2 con autovalore $2\hbar^2$ $(S=1)$
Infatti $\psi_1(x)$ e $\psi_3(x)$ sono entrambe dispari sotto scambio $(x \to -x)$ e quindi le funzioni di spin devono essere pari sotto scambio.

Dobbiamo quindi esprimere $|1\ S_x\rangle_x$ in termini di $|1\ S_z\rangle_z$

$$S_+ = \hbar \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad S_- = S_+^\dagger = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_x = \frac{1}{2}(S_+ + S_-) = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Gli autovalori di S_x sono $\pm\hbar, 0$

Autovalore $+\hbar$

$$\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \hbar \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\sqrt{2}\, b = a \\ \frac{\sqrt{2}}{2} a + \frac{\sqrt{2}}{2} c = b \\ \frac{1}{2}\sqrt{2}\, b = c \end{cases}$$

$$v = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} b,\ b,\ \frac{\sqrt{2}}{2} b \right)$$

$$\langle v | v \rangle = \frac{|b|^2}{2} + |b|^2 + \frac{|b|^2}{2} = 2|b|^2 \Rightarrow |b| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$v = \left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{2} \right)$$

Autovalore $-\hbar$

$$\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = -\hbar \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} b = a \\ \frac{\sqrt{2}}{2} a + \frac{\sqrt{2}}{2} c = -b \\ \frac{\sqrt{2}}{2} b = -c \end{cases}$$

$$v = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} b,\ b,\ -\frac{\sqrt{2}}{2} b \right)$$

$$\langle v | v \rangle = 2|b|^2 \qquad |b| = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad b = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$v = \left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{2} \right)$$

Autovalore 0

$$\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} b = 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} a + \frac{\sqrt{2}}{2} c = 0 \Rightarrow a + c = 0 \\ \sqrt{2}/2\, b = 0 \end{cases}$$

$$v = (a, 0, -a)$$

$$\langle v | v \rangle = |a|^2 + |a|^2 = 2|a|^2 \qquad a = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$v = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

Autovettori di H_1

Livello $E = \frac{\hbar\omega}{2}$. Una base è $|00\rangle_x$ $|10\rangle_x$
Lo stato con $S=0$ non è possibile per Pauli
Se χ_1 o χ_3 fossero $|10\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle_z - \frac{1}{\sqrt{2}}|1-1\rangle_z$
la probabilità di misurare $S_z = -\hbar$ sarebbe non nulla. Quindi nessun autostato appartenente a questo livello può essere considerato

livello $E = -\frac{\hbar\omega}{2}$. Una base è $\{|11\rangle_x \text{ e } |1-1\rangle_x\}$.
Quindi sono autostati di H_1 tutti i vettori

$$\alpha|11\rangle_x + \beta|1-1\rangle_x$$
$$= \alpha\left(\frac{1}{2}|11\rangle_z + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle_z + \frac{1}{2}|1-1\rangle_z\right)$$
$$+ \beta\left(\frac{1}{2}|11\rangle_z - \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle_z + \frac{1}{2}|1-1\rangle_z\right)$$
$$= \frac{1}{2}(\alpha+\beta)|11\rangle_z + \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha-\beta)|10\rangle_z + \frac{1}{2}(\alpha+\beta)|1-1\rangle_z$$

Se la probabilità di misura di $S_z = -\hbar$ è nulla deve essere $\alpha+\beta=0$; ~~ossia~~ lo stato da ~~usare~~ considerare è

$$\alpha|11\rangle_x - \alpha|1-1\rangle_x = \sqrt{2}\,\alpha\,|10\rangle_z$$

Per normalizzazione $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Quindi vi è un solo autostato di H_1 tale che
a) $S=1$ (richiesto da principio Pauli)
b) non contiene lo stato $|1-1\rangle_z$

Quindi $\chi_1 = a|1\,0\rangle_z = \frac{a}{\sqrt{2}}\left(|1\,1\rangle_x - |1\,-1\rangle_x\right)$

$\chi_3 = b|1\,0\rangle_z = \frac{b}{\sqrt{2}}\left(|1\,1\rangle_x - |1\,-1\rangle_x\right)$

Le costanti a e b sono ancora da determinare

Siamo giunti a

$$\psi(x) = a\psi_1 |\overset{S}{1}\,\overset{S_z}{0}\rangle_z + b\psi_3 |\overset{S}{1}\,\overset{S_z}{0}\rangle_z$$

La condizione di normalizzazione impone

$$|a|^2 + |b|^2 = 1$$

La condizione iii) impone

$$\langle\psi|H_0|\psi\rangle = |a|^2\hbar\omega\left(1+\frac{1}{2}\right) + |b|^2\hbar\omega\left(3+\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{3}{2}\hbar\omega|a|^2 + \frac{7}{2}\hbar\omega|b|^2 = 2\hbar\omega$$

$$\begin{cases} |a|^2+|b|^2=1 \\ 3|a|^2+7|b|^2=4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4|b|^2=1 \\ 4|a|^2=3 \end{cases} \qquad |b| = \frac{1}{2} \quad |a| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Lo stato può essere parametrizzato come

$$\psi(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}\psi_1|1\,0\rangle + \frac{1}{2}e^{i\alpha}\psi_3|1\,0\rangle_z$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\psi_1 + \frac{1}{2}e^{i\alpha}\psi_3\right)|\underset{S}{1}\,\underset{S_z}{0}\rangle_z$$

$\alpha \equiv$ costante arbitraria

[OGNI α corrisponde a STATO <u>DIVERSO</u>]

Se misuriamo S_z su $|\psi\rangle$ otteniamo 0 con probabilità 1.

d)

Dobbiamo calcolare $|\psi\, t\rangle$

Energia di $\psi_1 |10\rangle_z \longrightarrow \hbar\omega\left(1+\frac{1}{2}\right) - \frac{\hbar\omega}{2} = \hbar\omega$

$\psi_3 |10\rangle_z \longrightarrow \hbar\omega\left(3+\frac{1}{2}\right) - \frac{\hbar\omega}{2} = 3\hbar\omega$

Quindi

$$\psi(x,t) = \underbrace{e^{-i\omega t}}_{\text{(eliminabile)}}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\psi_1 + \frac{1}{2}e^{ia}e^{-2i\omega t}\psi_3\right]|1\,0\rangle_z$$

$$= |\psi_{spaz}\rangle |1\,0\rangle_z$$

Dato che $x_1 - x_2 = x$ dobbiamo calcolare

$\langle \psi\, t | x^2 | \psi\, t\rangle =$ ("integriamo" sulla parte di spin)

$$\langle \psi_{spaz} | x^2 | \psi_{spaz}\rangle =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\langle 1| + \frac{1}{2}e^{-ia}e^{2i\omega t}\langle 3|\right) x^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}|1\rangle + \frac{1}{2}e^{ia}e^{-2i\omega t}|3\rangle\right)$$

$$= \frac{3}{4}\langle 1|x^2|1\rangle + \frac{1}{4}\langle 3|x^2|3\rangle$$
$$+ \frac{\sqrt{3}}{4}e^{-ia}e^{2i\omega t}\langle 3|x^2|1\rangle + \frac{\sqrt{3}}{4}e^{ia}e^{-2i\omega t}\langle 1|x^2|3\rangle$$

Per calcolare gli elementi di matrice introduciamo a, a^+:

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2\mu\omega}}\,(a+a^+) = A\,(a+a^+)$$ [Notare che la massa è $\mu = m/2$]

$$x|1\rangle = A\,(a+a^+)|1\rangle = A|0\rangle + \sqrt{2}\,A|2\rangle$$

$$x^2|1\rangle = A^2(a+a^+)|0\rangle + \sqrt{2}\,A^2(a+a^+)|2\rangle$$
$$= A^2|1\rangle + 2A^2|1\rangle + \sqrt{6}\,A^2|3\rangle = 3A^2|1\rangle + \sqrt{6}\,A^2|3\rangle$$

$$x|3\rangle = A(a+a^+)|3\rangle = A\sqrt{3}\,|2\rangle + A\sqrt{4}\,|4\rangle$$

Quindi

$$\langle 1|x^2|1\rangle = |x|1\rangle|^2 = A^2 + 2A^2 = 3A^2$$

$$\langle 3|x^2|3\rangle = |x|3\rangle|^2 = 3A^2 + 4A^2 = 7A^2$$

$$\langle 3|x^2|1\rangle = A^2\sqrt{6}$$

$$\langle 1|x^2|3\rangle = \langle 3|x^2|1\rangle^* = A^2\sqrt{6}$$

Quindi

$$\langle \psi\, t|x^2|\psi\, t\rangle = \frac{3}{4}\cdot 3A^2 + \frac{1}{4}\cdot 7A^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}\left(e^{2i\omega t - i\alpha} + e^{-2i\omega t + i\alpha}\right)A^2\sqrt{6}$$

$$= 4A^2 + \frac{3}{2}\sqrt{2}\cos(2\omega t - \alpha)A^2$$

<u>NOTE ALL'ESERCIZIO</u>

punto a) Gli stati $|S\, S_z\rangle$ sono autostati di H_{spin}. Questo si poteva vedere facilmente notando che

$$H_{spin} = \frac{\alpha}{\hbar} S_{1z} S_{2z} = \frac{\alpha}{2\hbar}\left[(S_{1z}+S_{2z})^2 - S_{1z}^2 - S_{2z}^2\right]$$

Per lo spin 1/2 $\quad S_{1z}^2 = S_{2z}^2 = \frac{\hbar^2}{4}$ per cui

$$H_{spin} = \frac{\alpha}{2\hbar}\left(S_z^2 - \frac{\hbar^2}{2}\right) = \frac{\alpha}{2\hbar}S_z^2 - \frac{\alpha\hbar}{4}$$

punto c)

Il principio di Pauli impone che sia χ_1 sia χ_3 rappresentino una funzione di spin con $S=1$. Quindi utilizzando la base $|S\, S_z\rangle$, sia χ_1 sia χ_3 saranno della forma

$$|\chi\rangle = \alpha|\underset{\substack{\uparrow\\ S}}{1}\;\underset{\substack{\uparrow\\ S_z}}{1}\rangle_z + \beta|1\;0\rangle_z + \gamma|1\;-1\rangle_z$$

La condizione i) implica $\gamma = 0$

Dato che $H_1 = \frac{\alpha}{2\hbar} S_x^2 - \frac{\alpha\hbar}{4}$ [discussione precedente punto a)]

Vogliamo $S_x^2 |\chi\rangle = \lambda |\chi\rangle$ ($|\chi\rangle$ deve essere autofunzione di S_x^2). Nella rappresentazione matriciale

$[\, |1\,1\rangle_z \rightarrow (1,0,0),\ |1,0\rangle_z \rightarrow (0,1,0),\ |1\,-1\rangle_z \rightarrow (0,0,1) \,]$

$|\chi\rangle = (\alpha, \beta, 0)$

$$S_x|\chi\rangle = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2}\beta \\ \sqrt{2}\alpha \\ \sqrt{2}\beta \end{pmatrix}$$

$$S_x^2|\chi\rangle = \frac{\hbar^2}{4}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2}\beta \\ \sqrt{2}\alpha \\ \sqrt{2}\beta \end{pmatrix} = \frac{\hbar^2}{4}\begin{pmatrix} 2\alpha \\ 4\beta \\ 2\alpha \end{pmatrix}$$

Quindi

$S_x^2|\chi\rangle = \lambda|\chi\rangle$ implica $\frac{\hbar^2}{4}\begin{pmatrix} 2\alpha \\ 4\beta \\ 2\alpha \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \frac{\hbar^2}{4} \cdot 2\alpha = \lambda\alpha \\ \frac{\hbar^2}{4} \cdot 4\beta = \lambda\beta \\ \frac{\hbar^2}{4} \cdot 2\alpha = 0 \end{cases}$$

$\rightarrow \alpha = 0 \rightarrow \beta$ deve essere $\neq 0$ (un autovettore non può essere il vettore nullo)

$\rightarrow \hbar^2 = \cancel{\beta}\lambda$

Quindi $|\chi\rangle = |1\,0\rangle_z$ e $S_x^2 |1\,0\rangle_z = \hbar^2 |1\,0\rangle_z$

ESERCIZIO 2

a) Riscriviamo

$$H = \frac{1}{2I} L^2 + \frac{\alpha}{2}(J^2 - L^2 - S^2)$$
$$= \frac{\alpha}{2} J^2 + \frac{1}{2I}(1 - \alpha I) L^2 - \frac{\alpha}{2} S^2$$

Una base è data dagli stati $|L\ S\ J\ J_z\rangle$ autofunzioni di L^2, S^2, J^2, J_z. Qui $S = 0, 1, 2$, $L = 0, 1 \ldots \infty$; per dati L, S, J va da $|L-S|$ a $L+S$.

Vista la condizione $\alpha I \ll 1$, il termine prop. ad α agisce come una perturbazione ~~allo spettro~~ che modifica (poco) lo spettro con $\alpha = 0$

Per $\alpha = 0$ le energie sono $\frac{1}{2I}\hbar^2 \ell(\ell+1)$ $\ell: 0, 1 \ldots$
Vediamo cosa succede per α piccolo

- stati con $\ell = 0$
  La parte spaziale è simmetrica sotto scambio (parità). Quindi S può assumere solo i valori $S = 0$ e $S = 2$. Quindi $J = 0$ (per $S = 0$) e $J = 2$ (per $S = 2$)

$$\begin{array}{lc} & L\ S\ J\ J_z \\ \text{stato} & |0\ 0\ 0\ 0\rangle \end{array} \qquad \text{Energia} = 0$$

$$\text{stato } |0\ 2\ 2\ J_z\rangle \qquad \text{Energia} = \frac{\alpha}{2} 6\hbar^2 - \frac{\alpha}{2} 6\hbar^2 = 0$$

  Lo stato con $E = 0$ ha degenerazione 6

- Stati con $\ell = 1$
  La parte spaziale è antisimmetrica sotto scambio (parità). Quindi S può essere solo pari ad 1

Segue $J = \overset{L}{1} \times \overset{S}{1} = \begin{cases} 2 \\ 1 \\ 0 \end{cases}$

Stati $|1\,1\,0\,0\rangle$

Energia $\cancel{\frac{\alpha}{2}\cdot 2\hbar^2}$ $\frac{\alpha}{2}\cdot 0 + \frac{1}{2I}(1-\alpha I)2\hbar^2 - \frac{\alpha}{2}\cdot 2\hbar^2$

$$= \frac{\hbar^2}{I} - 2\alpha\hbar^2$$

Stati $|1\,1\,1\,J_z\rangle$

Energia $\frac{\alpha}{2}\cdot 2\hbar^2 + \frac{1}{2I}(1-\alpha I)2\hbar^2 - \frac{\alpha}{2}\cdot 2\hbar^2$

$$= \frac{\hbar^2}{I} - \alpha\hbar^2$$

Stati $|1\,1\,2\,J_z\rangle$

Energia $\frac{\alpha}{2}\cdot 6\hbar^2 + \frac{1}{2I}(1-\alpha I)2\hbar^2 - \frac{\alpha}{2}\cdot 2\hbar^2$

$$= \frac{\hbar^2}{I} + \alpha\hbar^2$$

Quindi per $\alpha \neq 0$ $\alpha I \ll 1$ il livello $l=1$ si separa in tre livelli con

$E = \frac{\hbar^2}{I} - 2\alpha\hbar^2$ ($J=0$ non degenere)

$E = \frac{\hbar^2}{I} - \alpha\hbar^2$ ($J=1$ deg. 3)

$E = \frac{\hbar^2}{I} + \alpha\hbar^2$ ($J=2$ deg. 5)

b) Lo stato da considerare è $|1\,1\,0\,0\rangle$, Essendo un autostato di H i valori medi non dipendono da t.

Notiamo che si tratta di uno stato con $J=0$
Quindi è autofunzione di tutte le componenti di $\vec{J}$. Lo possiamo considerare come

$$|1\ 1\ J=0\ J_z=0\rangle$$

ma anche $\langle 1\ 1\ J=0\ J_x=0\rangle$ (o $J_y=0$ oppure $J\cdot\hat{n}=0$ per qualsiasi versore n)

Per calcolare i valori medi di L_z, L_z^2, lo consideriamo come autostato di J_z e passiamo alla base $|L\,S\,L_z\,S_z\rangle$ che scriviamo come $|L_z\,S_z\rangle$. Utilizzando le tavole CG 1×1 ($L=1$, $S=1$) abbiamo

$$|1\ 1\ 0\ \overset{J_z}{0}\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}\,|\overset{L_z}{1}\ \overset{S_z}{-1}\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}}\,|0\ 0\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}\,|-1\ 1\rangle$$

$$L_z|1\,1\,0\,0\rangle = \hbar\sqrt{\frac{1}{3}}\,|1\,-1\rangle - \hbar\sqrt{\frac{1}{3}}\,|-1\ 1\rangle$$

$$\langle 1\ 1\ 0\ 0|L_z|1\ 1\ 0\ 0\rangle = \frac{\hbar}{3} - \frac{\hbar}{3} = 0$$

$$\langle 1 1 0 0|L_z|1 1 0 0\rangle = \left|L_z|1 1 0 0\rangle\right|^2 = \frac{\hbar^2}{3} + \frac{\hbar^2}{3} = \frac{2\hbar^2}{3}$$

Per calcolare il valor medio di L_x è sufficiente notare che lo stato è anche $|1\ 1\ 0\ J_x=0\rangle$ che si può scrivere come [stessa formula di prima]

$$|1\ 1\ 0\ \overset{J_x}{0}\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}\,|\overset{L_x}{1}\ \overset{S_x}{-1}\rangle_x - \sqrt{\frac{1}{3}}\,|\overset{L_x}{0}\ \overset{S_x}{0}\rangle_x + \sqrt{\frac{1}{3}}\,|\overset{L_x}{-1}\ \overset{S_x}{1}\rangle_x$$

Quindi

$$\langle 1100|L_z|1100\rangle = \langle 1100|L_x|1100\rangle = 0$$

$$\langle 1100|L_z^2|1100\rangle = \langle 1100|L_x^2|1100\rangle = \frac{2\hbar^2}{3}$$

(lo stesso vale per L_y, L_y^2 oppure $(L\cdot\hat{n})$, $(L\cdot\hat{n})^2$ con $\hat{n}$ versore)

È pure possibile effettuare il calcolo diretto

Dato che $L_x = \frac{1}{2}(L_+ + L_-)$

$$\begin{cases} L_x |L_z = 1\rangle = \frac{1}{2}(L_+ + L_-)|L_z = 1\rangle = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}|L_z = 0\rangle \\ L_x |L_z = 0\rangle = \frac{1}{2}(L_+ + L_-)|L_z = 0\rangle = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\left(|L_z = 1\rangle + |L_z = -1\rangle\right) \\ L_x |L_z = -1) = \frac{1}{2}(L_+ + L_-)|L_z = -1\rangle = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}|L_z = 0\rangle \end{cases}$$

Quindi

$$L_x |1\,1\,0\,\overset{J_z}{0}\rangle = L_x\left(\frac{1}{\sqrt{3}}|\overset{L_z}{1}\ \overset{S_z}{-1}\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}}|0\,0\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|1\,1\rangle\right)$$

$$= \sqrt{\frac{1}{3}}\frac{\hbar}{\sqrt{2}}|0\,-1\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}}\frac{\hbar}{\sqrt{2}}\left(|1\,0\rangle + |-1\,0\rangle\right)$$

$$+ \sqrt{\frac{1}{3}}\frac{\hbar}{\sqrt{2}}|0\,1\rangle$$

Quindi

$\langle 1\,1\,0\,0|L_x|1\,1\,0\,0\rangle = 0$ [tutti gli stati in $L_x|1\,1\,0\,0\rangle$ sono ortogonali agli stati in $|1\,1\,0\,0\rangle$]

$$\langle 1\,1\,0\,0|L_x^2|1\,1\,0\,0\rangle = \left|L_x|1\,1\,0\,0\rangle\right|^2 = \frac{\hbar^2}{6} + \frac{\hbar^2}{6} + \frac{\hbar^2}{6} + \frac{\hbar^2}{6} = \frac{2}{3}\hbar^2$$

Calcoliamo ora le derivate di $L_{z,H}(t)$

$$L_{z,H} = e^{iHt/\hbar}\, L_z\, e^{-iHt/\hbar}$$

$$\frac{d}{dt}L_{z,H} = \frac{i}{\hbar}e^{iHt/\hbar}[H, L_z]e^{-iHt/\hbar}$$

Ora

$$[H, L_z] = \alpha[\bar{L}\cdot\bar{S}, L_z]$$

$$= \alpha[L_x S_x, L_z] + \alpha[L_y S_y, L_z] + \alpha\cancelto{0}{[L_z S_z, L_z]}$$

$$= \alpha(-i\hbar L_y) S_x + \alpha i\hbar L_x S_y = i\alpha\hbar(-L_y S_x + L_x S_y)$$

Quindi

$$\frac{d}{dt} L_{z,H} = \alpha(L_{y,H} S_{x,H} - L_{x,H} S_{y,H})$$

$$\frac{d}{dt} L^2_{z,H} = L_{z,H} \frac{dL_{z,H}}{dt} + \frac{dL_{z,H}}{dt} L_{z,H}$$

Per quanto riguarda il valor medio, ricordiamo che per ogni operatore A ed ogni stato $|E\rangle$ autostato di H vale

$$\langle E|[H,A]|E\rangle = \langle E|HA - AH|E\rangle$$
$$= \langle E|EA - AE|E\rangle = 0$$

Quindi

$$\langle 1100| \frac{dL_{z,H}}{dt} |1100\rangle =$$
$$= \frac{i}{\hbar} \langle 1100|[H, L_{z,H}]|1100\rangle = 0$$

$$\langle 1100| \frac{dL^2_{z,H}}{dt} |1100\rangle$$
$$= \frac{i}{\hbar} \langle 1100|[H, L^2_{z,H}]|1100\rangle = 0$$

c) CALCOLO DELLA PERTURBAZIONE SUL SECONDO LIVELLO

Lo stato è $\overset{L\;S\;J\;J_z}{|1\,1\,0\,0\rangle}$, non degenere

Dobbiamo calcolare

$$\langle 1\,1\,0\,0|\Delta H|1\,1\,0\,0\rangle$$

Nella base $|L_z\,S_z\rangle$

$$|1\,1\,0\,0\rangle = \sqrt{\tfrac{1}{3}}|1\,-1\rangle - \sqrt{\tfrac{1}{3}}|0\,0\rangle + \sqrt{\tfrac{1}{3}}|-1\,1\rangle$$

so

$$S_z|1\,1\,0\,0\rangle = -\hbar\sqrt{\tfrac{1}{3}}|1\,-1\rangle + \hbar\sqrt{\tfrac{1}{3}}|-1\,1\rangle$$

$$= -\frac{\hbar}{\sqrt{3}}\left(|1\,-1\rangle - |-1\,1\rangle\right)$$

Se $\Delta H = \Delta H_S\, S_z \qquad \Delta H_S = \epsilon \sin\theta\cos\theta\cos\varphi$

abbiamo

$$\langle 1\,1\,0\,0|\Delta H|1\,1\,0\,0\rangle$$

$$= \sqrt{\tfrac{1}{3}}\left(-\frac{\hbar}{\sqrt{3}}\right)\left(\langle 1\,-1| - \langle 0\,0| + \langle -1\,1|\right)\Delta H_S\,\overbrace{\left(|1\,-1\rangle - |-1\,1\rangle\right)}^{\text{questo è } S_z|1100\rangle}$$

$$= -\frac{\hbar}{3}\left(\langle \underset{L_z}{1}|\Delta H_S|\underset{L_z}{1}\rangle - \langle \underset{L_z}{-1}|\Delta H_S|\underset{L_z}{-1}\rangle\right) \qquad \left(\begin{matrix}\text{abbiamo integrato}\\ \text{sullo spin}\end{matrix}\right)$$

REGOLA DI SELEZIONE:

$$\langle \overset{L_z}{m}|\Delta H_S|\overset{L_z}{m'}\rangle = 0 \quad \text{se} \quad |m-m'| \neq 1$$

Infatti $\langle m|\Delta H_S|m'\rangle = \int d\Omega\, F_{1m}(\theta)e^{-im\varphi}\Delta H_S\, F_{1m'}(\theta)e^{im'\varphi}$

$$= \int d\cos\theta\, F_{1m}(\theta)F_{1m'}(\theta)\,\epsilon\sin\theta\cos\theta\,\times$$

$$\times\int d\varphi\cos\varphi\, e^{i(m'-m)\varphi}$$

Ora l'integrale in φ si riscrive

$$\int d\varphi \cos\varphi \, e^{i(m'-m)\varphi} = \frac{1}{2}\int d\varphi \, e^{i(m'-m+1)\varphi} \leftarrow \neq 0 \text{ per } m'-m+1=0$$

$$+\frac{1}{2}\int d\varphi \, e^{i(m'-m-1)\varphi} \leftarrow \neq 0 \text{ per } m'-m-1=0$$

Quindi si può ottenere un risultato non nullo solo se $|m'-m| = 1$.

Gli integrali rimasti quindi sono nulli:

$$\langle 1 | \Delta H_S | 1 \rangle = 0 \qquad (m = m' = 1)$$

$$\langle -1 | \Delta H_S | -1 \rangle = 0 \qquad (m = m' = -1)$$

Quindi al primo ordine perturbativo $\Delta E = 0$.

d) Il secondo livello eccitato ha una base data da $|1\,1\,1\,1\,J_z\rangle$ che possiamo esprimere nella base $|\overset{L}{1}\,\overset{S}{1}\,\overset{J}{1}\,L_z\,S_z\rangle$ (scriviamo solo $|L_z\,S_z\rangle$)

$$\begin{cases} |1\,1\,1\,1\,1\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}}\left(|1\,0\rangle - |0\,1\rangle\right) & J_z = 1 \\ |1\,1\,1\,1\,0\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}}\left(|1\,-1\rangle - |-1\,1\rangle\right) & J_z = 0 \\ |1\,1\,1\,1\,-1\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}}\left(|0\,-1\rangle - |-1\,0\rangle\right) & J_z = 1 \end{cases}$$

[Tabelle CG 1×1]

Dobbiamo calcolare

$$M_{ab} = \langle 1\,1\,1\,a|\,\Delta H\,|1\,1\,1\,b\rangle \qquad \begin{cases} a: -1, 0, 1 \\ b: -1, 0, 1 \end{cases}$$

Utilizzando l'hermiticità basta considerare $a \geq b$.

Se scriviamo $\Delta H = \Delta H_S\, S_z$

$$M_{ab} = \langle 1\,1\,1\,a|\,\Delta H_S\, S_z\,|1\,1\,1\,b\rangle = {}^T\langle a|\,\Delta H_S\, S_z\,|b\rangle^T$$

dove $|a\rangle^T$ è lo stato $|1\,1\,1\,a\rangle$ in cui è stato "tolto" lo stato con $S_z = 0$

$$|1\rangle^T = \sqrt{\frac{1}{2}}\left(\cancel{|\overset{L_z}{1}\,\overset{S_z}{0}\rangle} - |0\,1\rangle\right) = -\sqrt{\frac{1}{2}}|0\,1\rangle$$

$$|0\rangle^T = \sqrt{\frac{1}{2}}\left(|1\,-1\rangle - |-1\,1\rangle\right) \quad \text{[invariato]}$$

$$|-1\rangle^T = \sqrt{\frac{1}{2}}\left(|0\,-1\rangle - \cancel{|-1\,0\rangle}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}}|0\,-1\rangle$$

Per semplificare il calcolo utilizzeremo in modo sistematico

$$\langle \overset{L_z}{m}|\,\Delta H_S\,|\overset{L_z}{m'}\rangle = 0 \quad \text{se } |m - m'| \neq 1$$

$$ {}^{T}\langle 1 | \Delta H_S S_z | 1 \rangle^{T} = \frac{1}{2} \langle 0\,1 | \Delta H_S S_z | 0\,1 \rangle $$
$$ = \frac{\hbar}{2} \langle 0 | \Delta H_S | 0 \rangle = 0 \qquad \boxed{\Delta m = 0} $$

$$ {}^{T}\langle 0 | \Delta H_S S_z | 0 \rangle^{T} = \frac{1}{2} \Big(\langle 1\,-1 | \Delta H_S S_z | 1\,-1 \rangle + \langle -1\,1 | \Delta H_S S_z | -1\,1 \rangle \Big) $$

[$\Delta m = 0$ in entrambi i casi]

$$ = \frac{1}{2} \Big(-\hbar \langle 1 | \Delta H_S | 1 \rangle + \hbar \langle -1 | \Delta H_S | -1 \rangle \Big) = 0 $$

$$ {}^{T}\langle -1 | \Delta H_S S_z | -1 \rangle^{T} = \frac{1}{2} \langle 0\,-1 | \Delta H_S S_z | 0\,-1 \rangle $$
$$ = -\frac{\hbar}{2} \langle 0 | \Delta H_S | 0 \rangle = 0 \qquad [\Delta m = 0] $$

$$ {}^{T}\langle 1 | \Delta H_S S_z | 0 \rangle^{T} = -\sqrt{\tfrac{1}{2}} \langle 0\,1 | \Delta H_S S_z | \Big(\sqrt{\tfrac{1}{2}} \Big) \Big(| 1\,-1 \rangle - | -1\,1 \rangle \Big) $$
$$ = + \frac{1}{2} \langle 0\,1 | \Delta H_S S_z | -1\,1 \rangle = $$
$$ = + \frac{\hbar}{2} \langle 0 | \Delta H_S | -1 \rangle $$

$$ {}^{T}\langle 1 | \Delta H_S S_z | -1 \rangle^{T} = -\frac{1}{2} \langle 0\,1 | \Delta H_S S_z | 0\,-1 \rangle = 0 \qquad \left[\begin{array}{l} \text{ortogonalità} \\ \text{stati di spin} \end{array} \right] $$

$$ {}^{T}\langle 0 | \Delta H_S S_z | -1 \rangle^{T} = \sqrt{\tfrac{1}{2}} \Big(\langle 1\,-1 | - \langle -1\,1 | \Big) \Delta H_S S_z \sqrt{\tfrac{1}{2}} | 0\,-1 \rangle $$
$$ = \frac{1}{2} \langle 1\,-1 | S_z | 0\,-1 \rangle = -\frac{\hbar}{2} \langle 1 | \Delta H_S | 0 \rangle $$

Vi sono quindi due soli elementi di matrice da calcolare

$$ {}_{L_z}\langle 0 | \Delta H_S | -1 \rangle_{L_z} $$

$$ {}_{L_z}\langle 1 | \Delta H_S | 0 \rangle_{L_z} $$

$$\langle 1|\Delta H_S|0\rangle = \epsilon \int d\Omega\, Y_1^{1*} \sin\theta \cos\varphi \cos\theta\, Y_1^0$$

$$= \epsilon \left(-\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\right)\left(\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\right) \int d\Omega\, \sin\theta e^{-i\varphi} \sin\theta \cos\theta \cos\varphi \cos\theta$$

$$= -\frac{3\epsilon}{4\pi\sqrt{2}} \int d\cos\theta\, \sin^2\theta \cos^2\theta \int d\varphi \cos\varphi\, e^{-i\varphi}$$

$[\cos\theta = x]$

$$= -\frac{3\epsilon}{4\pi\sqrt{2}} \int_{-1}^{1} dx\, (1-x^2)x^2 \underbrace{\int d\varphi\, \frac{1}{2}(1+e^{-2i\varphi})}_{\pi}$$

$$= -\frac{3\epsilon}{4\sqrt{2}} \cdot 2 \int_0^1 dx\, (x^2-x^4)$$

$$= -\frac{3\epsilon}{2\sqrt{2}} \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5\right]_0^1 = -\frac{3\epsilon}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right) = -\frac{\epsilon}{5\sqrt{2}}$$

$$\langle 0|\Delta H_S|-1\rangle = \epsilon \int d\Omega\, Y_1^{0*} \sin\theta\cos\theta\cos\varphi\, Y_1^{-1} \qquad \left(\begin{array}{l} Y_1^0 \text{ è reale} \\ Y_1^{-1} = -Y_1^{1*} \end{array}\right)$$

$$= -\epsilon \int d\Omega\, Y_1^0 \sin\theta\cos\theta\cos\varphi\, Y_1^{1*}$$

$$= -\langle 1|\Delta H_S|0\rangle = \frac{\epsilon}{5\sqrt{2}}$$

Quindi

$$M_{10} = \frac{\hbar}{2}\langle 0|\Delta H_S|-1\rangle = \frac{\epsilon\hbar}{10\sqrt{2}} \qquad M_{01} = M_{10}^* = \frac{\epsilon\hbar}{10\sqrt{2}}$$

$$M_{0-1} = -\frac{\hbar}{2}\langle +1|\Delta H_S|0\rangle = \frac{\epsilon\hbar}{10\sqrt{2}} \qquad M_{-10} = M_{0-1}^* = \frac{\epsilon\hbar}{10\sqrt{2}}$$

Tutti gli altri elementi di matrice sono nulli

Quindi la matrice $M_{ab} = \langle a | \Delta H | b \rangle$ sugli stati è (2.11)

$$M = \begin{pmatrix} 0 & A & 0 \\ A & 0 & A \\ 0 & A & 0 \end{pmatrix} \qquad A = \frac{\epsilon\hbar}{10\sqrt{2}}$$

Dobbiamo calcolare gli autovalori di tale matrice

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & A & 0 \\ A & -\lambda & A \\ 0 & A & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda \det \begin{vmatrix} -\lambda & A \\ A & -\lambda \end{vmatrix} - A \det \begin{vmatrix} A & A \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda(\lambda^2 - A^2) + \lambda A^2 = -\lambda(\lambda^2 - 2A^2)$$

Quindi gli autovalori sono $\lambda = 0 \quad \lambda = \pm\sqrt{2}A$

Il livello si separa in tre livelli con

$$\begin{cases} \Delta E = \dfrac{\epsilon\hbar}{10} \\ \Delta E = 0 \\ \Delta E = -\dfrac{\epsilon\hbar}{10} \end{cases}$$

Esame di Meccanica Quantistica, 10/02/2023

Esercizio 1. Una particella di massa m, è vincolata a muoversi in una dimensione spaziale nell'intervallo $[-L/2, L/2]$.
All'istante $t = 0$ lo stato della particella è descritto dalla seguente funzione d'onda:

$$\psi(x) = \mathcal{N}\varphi(x) + \frac{2i}{3}\psi_2(x), \qquad \varphi(x) \equiv \begin{cases} A\,x + B & \text{se } |x| < \dfrac{L}{3} \\ \psi_3(x) & \text{se } \dfrac{L}{3} < |x| < \dfrac{L}{2} \end{cases}$$

dove A, B sono numeri complessi e $\mathcal{N}$ è reale e positivo. Le autofunzioni dell'Hamitoniana $\psi_n(x)$ sono le seguenti:

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2}{L}}\cos\Big(\dfrac{n\pi}{L}x\Big) & \text{se } n \text{ dispari} \\ \sqrt{\dfrac{2}{L}}\sin\Big(\dfrac{n\pi}{L}x\Big) & \text{se } n \text{ pari.} \end{cases}$$

1. Determinare $A, B, \mathcal{N}$ in maniera tale che la funzione sia continua nell'intervallo $[-L/2, L/2]$ e normalizzata. Si rappresenti graficamente la densità di probabilità al variare di x.
2. Si calcolino le probabilità che una misura di energia fornisca un risultato rispettivamente minore, uguale o maggiore di $E = 2\hbar^2\pi^2/(mL^2)$.
3. Si calcoli il valor medio dell'operatore parità al variare del tempo.

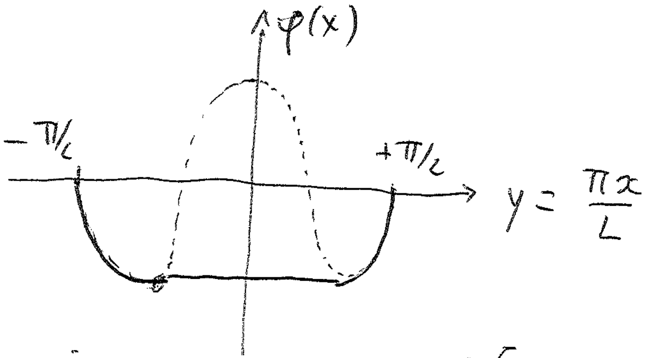
Esercizio 2. Una particella di massa m si muove in una dimensione con Hamiltoniana $H = p^2/(2m) + V(x)$, dove $V(x) = \varepsilon\cosh(x/a_0)$.

1. Si calcoli lo spettro dei livelli energetici nel limite di approssimazione armonica (sviluppo di Taylor al secondo ordine) del potenziale intorno al suo minimo. Si indichi una base corrispondente di autofunzioni dell'Hamiltoniana $H_0 = p^2/(2m) + V_0(x)$, dove $V_0(x)$ è il potenziale armonico che approssima $V(x)$.
2. Si identifichi il parametro adimensionale ξ, funzione dei parametri del sistema, che controlla l'espansione perturbativa di H a partire dal termine imperturbato H_0.
3. Si determini la correzione ai livelli energetici utilizzando la teoria delle perturbazioni al primo ordine in ξ. Si derivi la condizione per cui la correzione perturbativa calcolata sia piccola e la si confronti con la stima di ξ effettuata al punto precedente.
4. Si determini la correzione al ket di stato corrispondente al primo livello eccitato utilizzando la teoria delle perturbazioni al primo ordine in ξ.
5. Il sistema si trova in uno stato quantistico la cui funzione d'onda è
$$\psi(x) = A\,x\exp\left(-\frac{\sqrt{\varepsilon m}x^2}{2\hbar a_0}\right)$$
dove A è un fattore di normalizzazione. Utilizzando la teoria delle perturbazioni al primo ordine in ξ, si determinino i possibili risultati che una misura di H sullo stato quantistico $|\psi\rangle$ può fornire, unitamente alle corrispondenti probabilità.

Esercizio 1

1. La funzione $\psi(x)$ è continua se $\varphi(x)$ è continua
Quindi deve essere

$$\begin{cases} A\frac{L}{3} + B = \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{3\pi}{L}\frac{L}{3}\right) = -\sqrt{\frac{2}{L}} \\ A\left(-\frac{L}{3}\right) + B = \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{3\pi}{L}\left(-\frac{L}{3}\right)\right) = -\sqrt{\frac{2}{L}} \end{cases} \Longrightarrow \begin{array}{l} A = 0 \\ B = -\sqrt{\frac{2}{L}} \end{array}$$



$$\begin{cases} \varphi(x) \text{ è pari} \\ \varphi(x) < 0 \text{ reale} \end{cases}$$
Funzione continua
con derivata continua

Per il calcolo di N [nota bene: reale positivo]

$$\langle\psi|\psi\rangle = \int_{-L/2}^{L/2} dx \left(N^2 \varphi^2(x) + \frac{4}{9}\psi_2(x)^2\right)$$

[Qui è stato utilizzato: N, φ, ψ_2 sono REALI]

$$= N^2 \int_{-L/2}^{L/2} dx\, \varphi^2(x) + \frac{4}{9}$$

[$\psi_2(x)$ è normalizzata]

Ora

$$\int_{-L/2}^{L/2} dx\, \varphi^2(x) = B^2 \int_{-L/3}^{L/3} dx + 2 \int_{L/3}^{L/2} dx\, \psi_3^2(x) = B^2 \cdot \frac{2L}{3} + 2 \int_{L/3}^{L/2} dx\, \psi_3(x)^2$$

abbiamo utilizzato il fatto che ψ_3 è pari.

Infine

$$\int_{L/3}^{L/2} dx\, \psi_3(x)^2 = \frac{2}{L} \int_{L/3}^{L/2} dx \cos^2 \frac{3\pi x}{L} \qquad \frac{3\pi x}{L} = y \qquad x = \frac{L}{3\pi} y$$

$$= \frac{2}{L}\frac{L}{3\pi} \int_{\pi}^{3\pi/2} dy \cos^2 y = \frac{1}{3\pi} \int_{\pi}^{3\pi/2} dy\, (1 + \cos 2y)$$

$$= \frac{1}{3\pi} \left[y + \frac{1}{2}\sin 2y \right]_{\pi}^{3\pi/2} = \frac{1}{3\pi}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{6}$$

Raccogliendo i risultati otteniamo

$$\langle\psi|\psi\rangle = N^2\left(B^2\cdot\frac{2L}{3} + 2\cdot\frac{1}{6}\right) + \frac{4}{9}$$

$$= N^2\left(\frac{4}{3}+\frac{1}{3}\right) + \frac{4}{9} = \frac{5N^2}{3} + \frac{4}{9}$$

Quindi $\langle\psi|\psi\rangle = 1$ implica

$$\frac{5N^2}{3} + \frac{4}{9} = 1 \longrightarrow \frac{5N^2}{3} = \frac{5}{9} \quad N^2 = \frac{1}{3} \quad N = \frac{1}{\sqrt{3}}$$ [il testo poneva $N>0$]

NOTA: In questo problema la fase di N ha un significato fisico. Se il testo non avesse indicato $N>0$ (ossia N reale positivo) avremmo solamente ricavato $|N|^2 = \frac{1}{3}$ e quindi $N = \frac{1}{\sqrt{3}}e^{i\alpha}$ con α arbitrario. Ad ogni valore di α corrisponde uno STATO FISICO diverso.

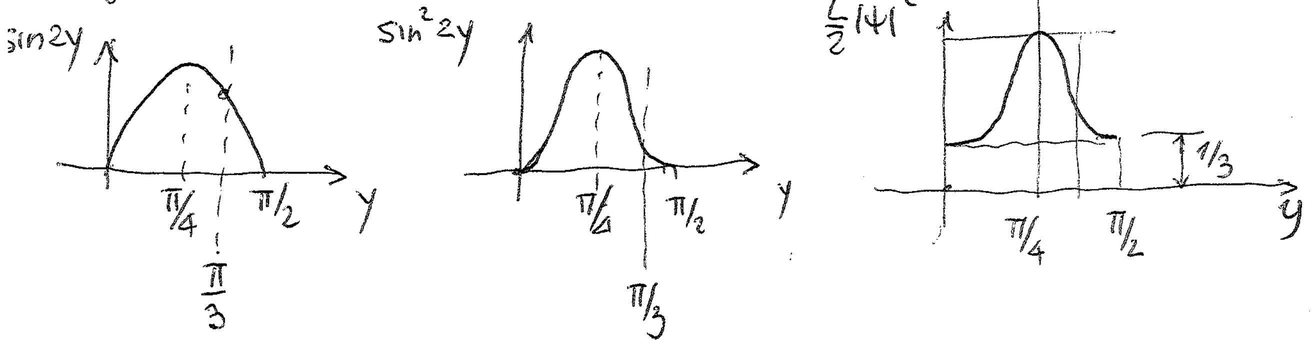
GRAFICO: La probabilità è $|\psi|^2 = \frac{1}{3}\varphi^2 + \frac{4}{9}\psi_2^2$

Se definiamo $y = \frac{\pi x}{L}$

$$\frac{L}{2}|\psi|^2 = \begin{cases} \frac{1}{3} + \frac{4}{9}\sin^2 2y & |y| < \frac{\pi}{3} \\ \frac{1}{3}\cos^2 3y + \frac{4}{9}\sin^2 2y & \frac{\pi}{3} < |y| < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Notare: $|\psi|^2$ è pari in y, continua e con derivata continua [perchè $\varphi(x)$ ha tale proprietà]

a) grafico per $|y| < \frac{\pi}{3}$ (basta fare il grafico per $y>0$)



Nell'intervallo $\frac{\pi}{3}<|y|<\frac{\pi}{2}$ la funzione $\frac{L}{2}|\psi|^2$ è decrescente e vale (ovviamente) zero per $y=\frac{\pi}{2}$ [necessariamente $\psi(\pm\frac{L}{2})=0$]

Per dimostrarlo:

$$f(y)=\frac{1}{3}\cos^2 3y+\frac{4}{9}\sin^2 2y$$

$$f'(y)=\frac{1}{3}\,2\cos 3y\,(-\sin 3y)\cdot 3+\frac{4}{9}\cdot 2\sin 2y\cos 2y\cdot 2$$

$$=-2\cos 3y\sin 3y+\frac{16}{9}\sin 2y\cos 2y$$

$$=-\sin 6y+\frac{8}{9}\sin 4y$$

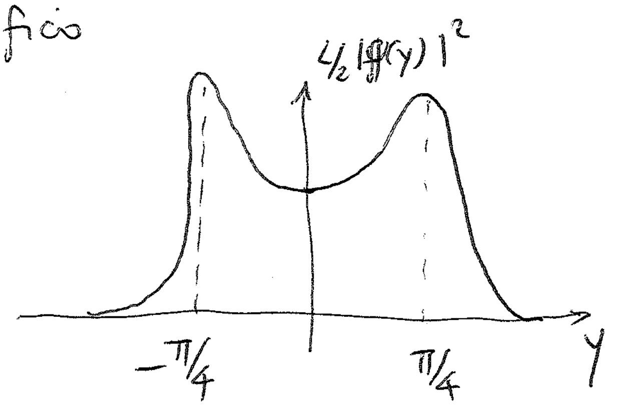
Se $y\in[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}]$, $6y\in[2\pi,3\pi]\underset{\substack{\uparrow\\ \text{equivalente}}}{\approx}[0,\pi]$ $\quad \sin 6y\geq 0$

per periodicità

$y\in[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}]$, $4y\in[\frac{4\pi}{3},2\pi]\overset{\downarrow}{\approx}[-\frac{2\pi}{3},0]$ $\quad \sin 4y\leq 0$

Quindi $f'(y)\leq 0$ in $[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}]\Rightarrow f(y)$ decresce. $f'(\frac{\pi}{2})=0$

Grafico



simmetrico in $(y\leftrightarrow -y)$

2. I livelli della buca sono

$$E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} n^2$$

Quindi $E_2 = \dfrac{2\hbar^2\pi^2}{mL^2}$

Quindi la domanda richiede di calcolare

a. la probabilità $p(E_1)$ che $E = E_1$, che coincide con la probabilità che $E < E_2$

b. la probabilità $p(E_2)$ che $E = E_2$

c. la probabilità $p(E > E_2)$

Quest'ultima può essere dedotta dalla condizione $\sum P(E_n) = 1$, ossia

$$p(E_1) + p(E_2) + p(E > E_2) = 1$$

da cui

$$p(E > E_2) = 1 - p(E_1) - p(E_2)$$

Basta quindi calcolare a. e b.

Per calcolare a., dobbiamo calcolare $\langle \psi_1 | \psi \rangle$ dato che $P(E_1) = |\langle \psi_1 | \psi \rangle|^2$

Dato che $|\psi_1\rangle$ è pari e $|\psi_2\rangle$ è dispari sotto $x \to -x$ abbiamo $\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = 0$. Quindi

$$\langle \psi_1 | \psi \rangle = N \langle \psi_1 | \varphi \rangle + \frac{2i}{3} \underbrace{\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle}_{(=0)} = N \langle \psi_1 | \varphi \rangle$$

Inoltre dato che φ e ψ_1 sono pari sotto $x \to -x$

$$\langle \psi_1 | \varphi \rangle = \int_{-L/2}^{L/2} dx\, \psi_1(x)\, \varphi(x) = 2 \int_0^{L/2} dx\, \psi_1(x)\, \varphi(x)$$

$$= 2 \int_0^{L/3} dx\, B\, \psi_1(x) + 2 \int_{L/3}^{L/2} dx\, \psi_1(x)\, \psi_3(x)$$

Abbiamo

$$\int_0^{L/3} dx\, \psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \int_0^{L/3} dx \cos\frac{\pi x}{L}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{L}} \cdot \frac{L}{\pi} \sin\frac{\pi x}{L}\Big|_0^{L/3}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{L}}\, \frac{L}{\pi} \sin\frac{\pi}{3} = \sqrt{\frac{2}{L}}\, \frac{L}{\pi}\, \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\int_0^{L/3} dx\, B\,\psi_1(x) = -\sqrt{\frac{2}{L}} \cdot \sqrt{\frac{2}{L}} \cdot \frac{L}{\pi}\, \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{2}{L}\, \frac{L}{\pi}\, \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{\pi}$$

Per calcolare il secondo integrale notiamo che

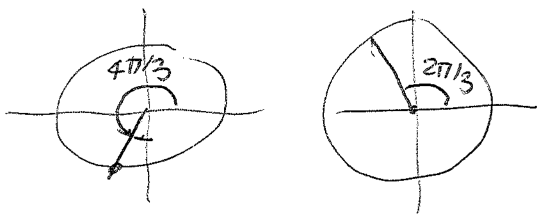
$$\int_{L/3}^{L/2} dx \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\frac{\pi x}{L} \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{3\pi x}{L}\right) \qquad \frac{\pi x}{L} = y \qquad dx = \frac{L}{\pi} dy$$

$$\boxed{\begin{aligned} \cos y \cos 3y &= \frac{1}{4}(e^{iy} + e^{-iy})(e^{3iy} + e^{-3iy}) \\ &= \frac{1}{4}\left(e^{4iy} + e^{2iy} + e^{-2iy} + e^{-4iy}\right) \\ &= \frac{1}{2}(\cos 4y + \cos 2y) \end{aligned}}$$

$$= \frac{2}{L} \cdot \frac{L}{\pi} \int_{\pi/3}^{\pi/2} dy \cos y \cos 3y$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_{\pi/3}^{\pi/2} dy\, \frac{1}{2}(\cos 4y + \cos 2y)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{4}\sin 4y + \frac{1}{2}\sin 2y\right]_{\pi/3}^{\pi/2}$$



$$= -\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{4}\sin\frac{4\pi}{3} + \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= -\frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{4}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{2\pi}\cdot\left(+\frac{\sqrt{3}}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{8\pi}$$

$$\langle \psi_1 | \varphi \rangle = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{\pi}\right) + 2\,\frac{\sqrt{3}}{8\pi} = -\frac{9}{4\pi}\sqrt{3}$$

Segue prob (misura $E = E_1$) $= \frac{81}{16\pi^2} \cdot 3 \cdot N^2 = \frac{81}{16\pi^2}$

Per calcolare prob (E_2) calcoliamo

$$\langle \psi_2 | \psi \rangle = \underbrace{\mathcal{N} \langle \psi_2 | \varphi \rangle}_{\substack{\text{uguale a zero} \\ \psi_2(x) \text{ dispari} \\ \varphi(x) \text{ pari per} \\ x \to -x}} + \frac{2i}{3} \underbrace{\langle \psi_2 | \psi_2 \rangle}_{\substack{\text{uguale a } 1 \\ \text{per normalizzazione}}} = \frac{2i}{3}$$

$$P(E = E_2) = \frac{4}{9}$$

$$P(E > E_2) = 1 - \frac{4}{9} - \frac{81}{16\pi^2}$$

3.

Dobbiamo calcolare (I = inversione spaziale/parità)

$$\langle \psi t | I | \psi t \rangle =$$

$$= \langle \psi | e^{iHt/\hbar} I e^{-iHt/\hbar} | \psi \rangle$$

L'Hamiltoniana relativa alla buca infinita è invariante (pari) per $x \to -x$, quindi

$$[H, I] = 0 \implies e^{iHt/\hbar} I e^{-iHt/\hbar} = I$$

Il valor medio non dipende dal tempo.

Dato che $\varphi(x)$ è pari e $\psi_2(x)$ è dispari sotto $x \to -x$

$$I\psi(x) = \mathcal{N} I \varphi(x) + \frac{2i}{3} I \psi_2(x)$$

$$= \mathcal{N} \varphi(x) - \frac{2i}{3} \psi_2(x)$$

Quindi

$$\langle \psi | I | \psi \rangle = \left(\mathcal{N} \langle \varphi | - \frac{2i}{3} \langle \psi_2 | \right) \left(\mathcal{N} | \varphi \rangle - \frac{2i}{3} | \psi_2 \rangle \right)$$

$$= \mathcal{N}^2 \langle \varphi | \varphi \rangle - \frac{4}{9} \underbrace{\langle \psi_2 | \psi_2 \rangle}_{=1 \text{ per normalizzazione}} - \underbrace{\frac{2\mathcal{N}i}{3} \langle \psi_2 | \varphi \rangle - \frac{2\mathcal{N}i}{3} \langle \varphi | \psi_2 \rangle}_{\substack{\text{integrali nulli perché} \\ \psi_2 \text{ è dispari e} \\ \varphi \text{ pari sotto } x \leftrightarrow -x.}}$$

Quindi

$$\langle \psi | I | \psi \rangle = \frac{1}{3}\langle \varphi|\varphi\rangle - \frac{4}{9}$$

La quantità $\langle\varphi|\varphi\rangle$ non è pari ad 1 ($|\varphi\rangle$ non è normalizzata). Il suo valore si ottiene da quanto calcolato al punto 1.

$$\langle\varphi|\varphi\rangle = B^2\,\frac{2L}{3} + 2\int_{L/3}^{L/2} dx\, \psi_3(x)^2$$

$$= \frac{4}{3} + \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$$

Segue

$$\langle \psi | I | \psi \rangle = \frac{1}{3}\cdot\frac{5}{3} - \frac{4}{9} = \frac{5}{9} - \frac{4}{9} = \frac{1}{9}$$

Esercizio 2 (8)

Sviluppo di $\cosh x = \sum_{n\,pari} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} \dots$

<u>DIMOSTRAZIONE</u>

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}$$

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left[\frac{1+(-1)^n}{2}\right]}_{\substack{\text{vale } 0 \text{ per } n \text{ dispari} \\ 1 \text{ per } n \text{ pari}}} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n\,pari} \frac{x^n}{n!}$$

1. Nell'approssimazione armonica $V(x) = \frac{\epsilon}{2}\left(\frac{x^2}{a_0^2}\right) = \frac{\epsilon}{2}\left(\frac{x}{a_0}\right)^2$

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}\frac{\epsilon}{a_0^2}x^2$$

Per definire la pulsazione ω, ricordiamo che l'Hamiltoniana in termini di m ed ω è:

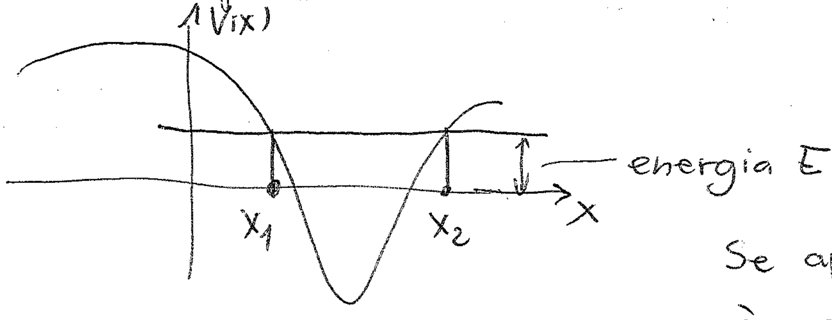
$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \Longrightarrow m\omega^2 = \frac{\epsilon}{a_0^2} \qquad \omega = \frac{1}{a_0}\sqrt{\frac{\epsilon}{m}}$$

Lo spettro è $E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$

2. Dobbiamo individuare le condizioni per cui si può espandere $V(x)$ in potenze di x e considerare il termine x^2 come termine "imperturbato" ed i termini successivi come perturbazioni

Cominceremo con il discutere il problema in ambito classico

Ricordiamo che dato un qualsiasi $V(x)$, il moto di una particella classica avviene nella zona $V(x)<E$

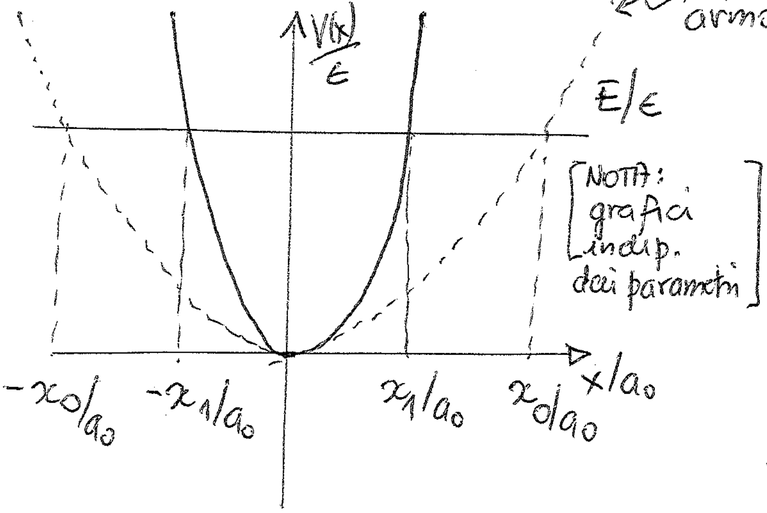


Il moto avviene nell'intervallo $[x_1, x_2]$

Se approssimiamo $V(x)$ con $V_{appr}(x)$ è necessario $V(x) \simeq V_{appr}(x)$ dove $E>V(x)$

Il nostro problema:

approssimazione armonica $\frac{\epsilon}{2a_0^2}x^2/\epsilon$



È evidente che la approssimazione peggiora al crescere di E/ϵ.
Quindi è naturale assumere $E/\epsilon \ll 1$ (adimensionale)

PIÙ FORMALE:

Nel grafico si confronta il potenziale $V(x)$ con la sua approssimazione armonica. La particella soggetta a $V(x)$ si muove in $[-x_1, x_1]$, mentre in approssimazione armonica il moto è supposto avvenire in $[-x_0, x_0]$.

Quando possiamo sviluppare $V(x)$? Quando $|x/a_0| \ll 1$ per tutti i valori accessibili al moto. Quindi otteniamo la condizione $x_1/a_0 \ll 1$. ~~Ma se quando $x=x_1$~~,
Ma se $V(x)$ è ben approssimato dal potenziale armonico abbiamo anche $x_0/a_0 \ll 1$ e quindi

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}\frac{\epsilon}{a_0^2}x^2 = \frac{1}{2}\epsilon\left(\frac{x_0^2}{a_0^2}\right)$$

quando $x=x_0 \rightarrow p=0$ [p è l'impulso]

Segue $E/\epsilon = \frac{1}{2}\left(\frac{x_0}{a_0}\right)^2 \ll 1$ che è la condizione di prima

Tutte queste considerazioni si estendono al caso quantistico. Infatti, una condizione di autoconsistenza dell'approssimazione è che $x/a_0 \ll 1$ nell'intervallo di valori di x in cui le autofunzioni $\psi_n(x)$ sono "significativamente" diverse da zero. Una stima di questo intervallo è l'intervallo CLASSICO $[-x_0, x_0]$ e quindi l'approssimazione $x_0/a_0 \ll 1$ è vera anche quantisticamente. Quindi in generale richiediamo

$$\frac{E}{\epsilon} = \frac{\hbar\omega}{\epsilon}\left(n+\frac{1}{2}\right) \ll 1$$

Il che ci permette di definire

$$\xi = \frac{\hbar\omega}{\epsilon} = \frac{\hbar}{\epsilon}\frac{1}{a_0}\sqrt{\frac{\epsilon}{m}} = \frac{\hbar}{a_0}\frac{1}{\sqrt{\epsilon m}}$$

La condizione diventa $\xi\left(n+\frac{1}{2}\right) \ll 1$. [$\xi n \ll 1$ per grandi n] [$\xi \ll 1$ per n piccolo]

NOTA: a) ϵ <u>NON</u> È il parametro perturbativo. L'approssimazione migliora al <u>CRESCERE</u> di ϵ

b) fissati i parametri del sistema, ossia a ξ fissato, l'approssimazione funziona solo per un numero finito di livelli con $n \ll n_{max} = \frac{1}{\xi}$

Vogliamo ora far vedere che per $\xi \ll 1$ ($\xi n \ll 1$ per grandi n) i termini successivi dello sviluppo possono essere considerati come termini perturbativi

Notiamo che

$$\hbar\omega = \frac{\hbar\omega^2}{\omega} = \frac{\hbar}{\omega}\,\frac{1}{a_0^2}\,\frac{\epsilon}{m} = \frac{\epsilon}{a_0^2}\,\frac{\hbar}{m\omega}$$

$$\xi = \frac{\hbar\omega}{\epsilon} = \frac{1}{a_0^2}\,\frac{\hbar}{m\omega}$$

Questa scrittura ci fornisce un'altra interpretazione della condizione $\xi \ll 1$. Ricordiamo che

$$X = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,(a+a^\dagger) \qquad A = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$

$$= \frac{A}{\sqrt{2}}\,(a+a^\dagger)$$

che mostra che A è la scala di lunghezze intrinseca nel problema. Quindi $\xi = \frac{A^2}{a_0^2}$ e $\xi \ll 1$ equivale a $\frac{A}{a_0} \ll 1$ che è esattamente l'argomento classico.

Consideriamo ora la espressione perturbativa per l'energia

$$\Delta E_n = \langle n|\, \epsilon\left(\cosh\frac{x}{a_0} - 1 - \frac{1}{2}\frac{x^2}{a_0^2}\right)|n\rangle$$

$$= \epsilon \sum_{p=2}^{\infty} \frac{1}{(2p)!} \langle n|x^{2p}|n\rangle \frac{1}{a_0^{2p}}$$

$$= \epsilon \sum_{p=2}^{\infty} \frac{1}{(2p)!}\,\frac{1}{2^p}\left(\frac{A}{a_0}\right)^{2p} \underbrace{\langle n|(a+a^\dagger)^{2p}|n\rangle}_{\text{numero (dipendente da } n)}$$

$$= \epsilon \sum_{p=2}^{\infty} \frac{1}{(2p)!}\,\frac{1}{2^p}\,\xi^{p} \langle n|(a+a^\dagger)^{2p}|n\rangle$$

Serie in ξ: il termine dominante è $p=2$. per $\xi \ll 1$ [in realtà per $\xi n \ll 1$ a grandi n. Lo discuteremo

NOTA BENE: Non si tratta CONCETTUALMENTE dello sviluppo perturbativo standard sebbene TECNICAMENTE si proceda nello stesso modo.
Nel nostro caso anche il termine di ordine 0 è PERTURBATIVO

$$E = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right) = \epsilon\left(n+\frac{1}{2}\right)\xi \ll 1$$

3. Consideriamo come perturbazione

$$\Delta V = \frac{\epsilon}{4!\,a_0^4}x^4$$

Quindi sul livello n-esimo abbiamo

$$\Delta E_n = \langle n|\Delta V|n\rangle = \frac{\epsilon}{24a_0^4}\langle n|x^4|n\rangle$$

$$= \frac{\epsilon}{24\,a_0^4}\left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^2\langle n|(a+a^+)^4|n\rangle$$

$$= \frac{\epsilon}{96}\xi^2\langle n|(a+a^+)^4|n\rangle = \frac{\epsilon}{96}\xi^2\left|\,(a+a^+)^2|n\rangle\right|^2$$

$$(a+a^+)|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle + \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$$

$$(a+a^+)^2|n\rangle = \sqrt{n}\,(a+a^+)|n-1\rangle + \sqrt{n+1}\,(a+a^+)|n+1\rangle$$

$$= \sqrt{n}\sqrt{n-1}\,|n-2\rangle + n|n\rangle + (n+1)|n\rangle + \sqrt{(n+1)(n+2)}\,|n+2\rangle$$

$$= \sqrt{n(n-1)}\,|n-2\rangle + (2n+1)|n\rangle + \sqrt{(n+1)(n+2)}\,|n+2\rangle$$

ben definito anche per $n=0,1$ (il prefattore si annulla in questi due casi)

$$\left|(a^++a)^2|n\rangle\right|^2 = n(n-1) + (2n+1)^2 + (n+1)(n+2)$$

$$= 6n^2 + 6n + 3 = 3(2n^2+2n+1)$$

Quindi $\Delta E_n = \frac{\epsilon}{32}\xi^2(2n^2+2n+1)$ e

(13)

$$\frac{E_n}{\epsilon} = \xi\left(n+\frac{1}{2}\right) + \frac{\xi^2}{32}(2n^2+2n+1) + \dots$$

Per grandi n abbiamo

$$\frac{E_n}{\epsilon} \approx (\xi n) + \frac{(\xi n)^2}{16}$$

per cui sembra che il parametro che debba essere piccolo sia sempre ξn, ossia che debba valere $(\xi n) \ll 1$

<u>TUTTAVIA</u>: in teoria perturbativa la condizione di validità della teoria perturbativa è

$$\frac{\Delta E_n}{|E_n - E_{n-1}|} \ll 1$$

↑spaziatura dei livelli

che implica $\frac{\xi^2 n^2 \epsilon}{\epsilon \xi} = \xi n^2 \ll 1$ $\quad n \ll n_{max} \sim \frac{1}{\sqrt{\xi}}$

molto più restrittiva

CURIOSITÀ: al crescere dell'ordine perturbativo il vincolo che si ottiene dalla teoria perturbativa diventa sempre più stringente DOVUTO al fatto che la serie perturbativa <u>DIVERGE</u>

4.

Indichiamo con $|\psi_n\rangle$ lo stato che converge a $|n\rangle$ per $\xi \to 0$ [nel limite, non per $\xi = 0$].

$$|\psi_1\rangle = |1\rangle + \sum_{n \neq 1} |n\rangle \frac{\langle n|\Delta V|1\rangle}{E_1 - E_n}$$

$$= |1\rangle + \frac{\epsilon}{96}\xi^2 \sum_{n\neq 1} |n\rangle \frac{\langle n|(a+a^+)^4|1\rangle}{\hbar\omega(1-n)}$$

$$= |1\rangle + \frac{\xi}{96}\sum_{n\neq 1} |n\rangle \frac{\langle n|(a+a^+)^4|1\rangle}{(1-n)}$$

Vogliamo ora discutere quali valori ~~po~~ siano possibili per n nelle somma. Prima osservazione:

$(a+a^+)^4|p\rangle = \sum_k b_k |k\rangle$ dove la somma su k si estende da $(p-4)$ a $p+4$. Nel nostro caso $p=1$, otterremo $0 \leq n \leq 5$. Vi è poi un vincolo relativo all'inversione spaziale.

Ricordiamo $I|n\rangle = (-1)^n |n\rangle$ e $IxI = -x$, $Ix^4I = +x^4$

Quindi

$$\langle n|x^4|1\rangle = \langle n|\underbrace{II}_{I^2=1}x^4\underbrace{II}_{I^2=1}|1\rangle =$$

$$= \langle n|I\,(Ix^4I)\,I|1\rangle =$$

$$= (-1)^n \langle n|\, x^4\, (-1)|1\rangle$$

$$= (-1)^{n+1}\langle n|x^4|1\rangle$$

Se $n+1$ è dispari

$$\langle n|x^4|1\rangle = -\langle n|x^4|1\rangle \Rightarrow \langle n|x^4|1\rangle = 0$$

Quindi $n+1$ deve essere pari, ossia n deve essere dispari. Quindi dobbiamo considerare solo

$n=3$ e $n=5$

(15)

$$|\psi_1\rangle = |1\rangle + \frac{\xi}{96}\left[|3\rangle \frac{\langle 3|(a+a^+)^4|1\rangle}{1-3} + |5\rangle \frac{\langle 5|(a+a^+)^4|1\rangle}{1-5} \right]$$

Ora

$$\langle 3|(a+a^+)^4|1\rangle = \left((a+a^+)^2|3\rangle, (a+a^+)^2|1\rangle \right) = \text{(formule trovate al 3.)}$$

$$= \left(\sqrt{6}|1\rangle + 7|3\rangle + \sqrt{4\cdot 5}\,|5\rangle, 3|1\rangle + \sqrt{6}|3\rangle \right)$$

$$= 3\sqrt{6} + 7\sqrt{6} = 10\sqrt{6}$$

$$\langle 5|(a+a^+)^4|1\rangle = \langle 5|a^{+4}|1\rangle \quad \text{(tutti gli altri termini non sono rilevanti)}$$

$$= \sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{4}\cdot\sqrt{5} = 2\sqrt{30}$$

Quindi

$$|\psi_1\rangle = |1\rangle + \frac{\xi}{96}\left[-\frac{10\sqrt{6}}{2}|3\rangle - \frac{1}{4}2\sqrt{30}|5\rangle \right]$$

$$= |1\rangle - \frac{\xi}{96}\left(5\sqrt{6}|3\rangle + \frac{1}{2}\sqrt{30}|5\rangle \right)$$

Era anche possibile (ma molto più lungo) calcolare prima $(a+a^+)^4|1\rangle$ e poi fare i prodotti scalari

$$(a+a^+)|1\rangle = |0\rangle + \sqrt{2}|2\rangle$$

$$(a+a^+)^2|1\rangle = a^+|0\rangle + \sqrt{2}(a+a^+)|2\rangle$$

$$= |1\rangle + 2|1\rangle + \sqrt{6}|3\rangle = 3|1\rangle + \sqrt{6}|3\rangle$$

$$(a+a^+)^3|1\rangle = 3(a+a^+)|1\rangle + \sqrt{6}(a+a^+)|3\rangle$$

$$= 3|0\rangle + 3\sqrt{2}|2\rangle + 3\sqrt{2}|2\rangle + 2\sqrt{6}|4\rangle$$

$$= 3|0\rangle + 6\sqrt{2}|2\rangle + 2\sqrt{6}|4\rangle$$

$$(a+a^\dagger)^4|1\rangle = 3a^\dagger|0\rangle + 6\sqrt{2}(a+a^\dagger)|2\rangle + 2\sqrt{6}(a+a^\dagger)|4\rangle$$
$$= 3|1\rangle + 12|1\rangle + 6\sqrt{5}|3\rangle + 4\sqrt{6}|3\rangle + 2\sqrt{30}|5\rangle$$
$$= 15|1\rangle + 10\sqrt{6}|3\rangle + 2\sqrt{30}|5\rangle$$

Riotteniamo quindi i risultati precedenti

5.

Notiamo che $\dfrac{\sqrt{\varepsilon m}}{\hbar a_0} = \dfrac{m\omega}{\hbar}$ per cui

$$\psi(x) = A\exp\left(-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}\right) = |1\rangle \quad (\text{se supponiamo } \langle\psi|\psi\rangle = 1)$$

Per determinare i valori misurabili di H dobbiamo esprimere $|1\rangle$ in termini delle autofunzioni $|\psi_n\rangle$ autofunzioni di H.

Il risultato del punto 4. fornisce

$$|1\rangle = |\psi_1\rangle + \frac{\xi}{96}\left(5\sqrt{6}|3\rangle + \frac{1}{2}\sqrt{30}|5\rangle\right) + O(\xi^2)$$

Visto che $|n\rangle = |\psi_n\rangle + O(\xi)$ possiamo sostituire $|3\rangle$ e $|5\rangle$ con $|\psi_3\rangle$ e $|\psi_5\rangle$ e quindi

$$|1\rangle = |\psi_1\rangle + \frac{\xi}{96}\left(5\sqrt{6}|\psi_3\rangle + \frac{1}{2}\sqrt{30}|\psi_5\rangle\right) + O(\xi^2)$$

Da questa espressione possiamo calcolare direttamente Prob $(H = E_3)$ e Prob $(H = E_5)$ ad ordine ξ^2, mentre non è calcolabile direttamente Prob $(H = E_1)$ [per un calcolo diretto è necessario calcolare le correzioni alla funzione d'onda ad ordine ξ^2]. Lo si può comunque ottenere in modo indiretto. [E_1, E_3, E_5 sono gli autostati esatti di H tali che $E_n = \hbar\omega(n+\frac{1}{2}) + O(\xi)$]

$$P(H=E_3) = \frac{\xi^2}{96^2}(5\sqrt{6})^2 = \frac{25}{1536}\xi^2$$

a meno di termini $O(\xi^3)$

$$P(H=E_5) = \frac{\xi^2}{96^2}\left(\frac{\sqrt{30}}{2}\right)^2 = \frac{5}{6144}\xi^2$$

$$P(H=E_1) = 1 - P(H=E_3) - P(H=E_5) = 1 - \frac{35}{2048}\xi^2$$

Notiamo infine che

$$7\hbar\sqrt{\frac{\epsilon}{m}}\frac{1}{2a_0} = \frac{7}{2}\hbar\omega = \left(3+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega = E_{min}$$

Dato che $E_3 = \left(3+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega + \xi\cdot(\text{numero positivo}) > E_{min}$

$$\text{Prob}\left(H > \frac{7}{2}\hbar\omega\right) = \text{Prob}(H=E_3) + \text{Prob}(H=E_5) = \frac{35}{2048}\xi^2$$

Esame di Meccanica Quantistica, 26/04/2023

Esercizio 1. Si consideri, in 3 dimensioni, una particella di spin 1 con Hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 + \frac{\alpha}{\hbar}J^2$$

dove $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S}$ è il momento angolare totale e $0 < \alpha < \omega/6$.

a) Si calcolino le energie e le degenerazioni dei primi 4 livelli.

b) Si consideri una particella nello stato

$$|\psi\rangle = AR_1(r)\cos\theta\,|1\rangle_S,$$

dove $|1\rangle_S$ è un autostato normalizzato di S_z con autovalore $\hbar$ e $R_1(r)$ è l'autofunzione radiale del livello $n = 1$ della Hamiltoniana dell'oscillatore armonico isotropo tridimensionale (Hamiltoniana H con $\alpha = 0$). La funzione $R_1(r)$ è normalizzata secondo

$$\int_0^\infty r^2 dr\,|R_1(r)|^2 = 1.$$

Si calcoli $|A|$ in modo che lo stato sia normalizzato e si determinino i possibili valori ottenibili in una misura di H con le relative probabilità.

c) Si calcoli l'evoluto temporale di $|\psi\rangle$ e si calcolino i valori medi di L_z, S_z, J_z, L^2 e J^2 su ψ al tempo t. Per tutti i casi in cui il risultato non dipende da t, si discuta se tale indipendenza poteva essere predetta a priori.

d) Si consideri la perturbazione $V(x) = \lambda(xS_x)^2$. Si calcolino le correzioni all'energia dovute a tale perturbazione sullo stato fondamentale di H e si discuta l'eventuale rimozione della degenerazione.

Esercizio 2. Si consideri una particella libera in una dimensione. La particella ha massa m e spin 0. Si considerino le seguenti funzioni d'onda normalizzate:

$$\begin{aligned}
\psi_1(x) &= \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} e^{ik_0x}e^{-\frac{\alpha}{2}(x-x_0)^2},\\
\psi_2(x) &= \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} e^{-ik_0x}e^{-\frac{\alpha}{2}(x+x_0)^2},\\
\psi_3(x) &= \mathcal{N}[\psi_1(x) + \psi_2(x)],
\end{aligned}$$

dove k_0, x_0, α sono parametri reali positivi e $\mathcal{N}$ è una costante di normalizzazione supposta nota.

1) Si calcoli il valor medio dell'operatore posizione $\hat{x}$ nei tre casi, assumendo che la particella sia in uno stato descritto rispettivamente da $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ e $\psi_3(x)$. Si calcoli la densità di probabilità $\pi(x)$ per misure di posizione su $\psi_1(x)$ e $\psi_2(x)$. Si faccia un grafico qualitativo delle due densità di probabilità a fissato x_0 per $\alpha = 1/x_0^2$ e $\alpha = 4/x_0^2$, e si discuta cosa succede nel limite $\alpha \gg 1/x_0^2$. Si faccia il grafico qualitativo della densità di probabilità per misure di posizione su $\psi_3(x)$ solo nel limite $\alpha \gg 1/x_0^2$.

2) Si calcoli il valor medio dell'operatore impulso $\hat{p}$, assumendo che la particella sia in uno stato descritto rispettivamente da $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ e $\psi_3(x)$. Si calcoli la densità di probabilità per misure di

impulso su $\psi_1(x)$ e $\psi_2(x)$. Si faccia un grafico qualitativo delle due densità di probabilità a fissato k_0 per $\alpha = k_0^2$ e $\alpha = k_0^2/4$, e si discuta cosa succede nel limite $\alpha \ll k_0^2$. Si faccia il grafico qualitativo della densità di probabilità per misure di impulso su $\psi_3(x)$ solo nel limite $\alpha \ll k_0^2$.

3) Si determini il valor medio dell'operatore parità $\hat{\mathcal{P}}$ per la stato descritto da $\psi_3(x)$.

4) Si determinino i valori medi degli operatori $\hat{x}, \hat{p}$ e $\hat{\mathcal{P}}$ ad un generico istante di tempo $t > 0$ assumendo che al tempo $t = 0$ il sistema sia nello stato $\psi_3(x)$. Suggerimento: è possibile fare il calcolo senza determinare direttamente l'evoluto temporale $\psi_3(x,t)$.

Si supponga ora che la particella abbia spin 1/2 e che lo stato del sistema sia dato da

$$|\psi\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\psi_1(x)|+\rangle + i\sqrt{\frac{1}{3}}\psi_2(x)|-\rangle.$$

5) Si determinino i valori medi degli operatori $\hat{x}$ e $\hat{p}$ sullo stato $|\psi\rangle$.

Per la risoluzione del problema potrebbero essere (in)utile il seguente risultato:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2+bx+c}\,dx \quad = \quad \sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{\frac{b^2}{4a}+c} \qquad \text{con } \mathrm{Re}\,a > 0$$

a) **I esercizio**

In assenza del termine prop. a J^2 i livelli hanno energie $E = \hbar\omega(n + \frac{3}{2})$ ed i seguenti valori del momento angolare

$E = \frac{3}{2}\hbar\omega$ $\quad L = 0$ (non degenere in assenza di spin)

$E = \frac{5}{2}\hbar\omega$ $\quad L = 1$ (deg. = 3 in assenza di spin)

$E = \frac{7}{2}\hbar\omega$ $\quad L = \begin{cases} 0 \\ 2 \end{cases}$ (deg = 6 in assenza di spin)

Consideriamo l'effetto del termine proporzionale ad α.

1) livello $E = \frac{3}{2}\hbar\omega$

Ha $L=0$, Quindi J può assumere solo il valore 1.

Quindi $E = \frac{3}{2}\hbar\omega + \frac{\alpha}{\hbar}\hbar^2 2 = \frac{3}{2}\hbar\omega + 2\hbar\alpha$

Lo stato ha degenerazione 3 (i possibili stati corrispondono a $J_z = \pm 1, 0$)

2) livello $E = \frac{5}{2}\hbar\omega$

Ha $L = 1$. Quindi J è compreso tra $|L-S| = 0$ e $L+S = 2$: J assume i valori $J = 0, 1, 2$

Nuovi livelli

$J=0 \quad E = \frac{5}{2}\hbar\omega$ (non degenere)

$J=1 \quad E = \frac{5}{2}\hbar\omega + \frac{\alpha}{\hbar}(2\hbar^2) = \frac{5}{2}\hbar\omega + 2\hbar\alpha$ (deg. 3)

$J=2 \quad E = \frac{5}{2}\hbar\omega + \frac{\alpha}{\hbar}6\hbar^2 = \frac{5}{2}\hbar\omega + 6\hbar\alpha$ (deg. 5)

3) Dato che $\alpha < \frac{\omega}{2}$, $\frac{7}{2}\hbar\omega > \frac{5}{2}\hbar\omega + 6\hbar\alpha$.

Quindi i livelli successivi non sono richiesti

I primi 4 livelli sono

$n \quad \ell \quad J \quad J_z$

1) $n=0 \quad L=0 \quad J=1$ stati $|0\,0\,1\,J_z\rangle$ deg. 3

$E = \frac{3}{2}\hbar\omega + 2\hbar\alpha$

2) $n=1 \quad L=1 \quad J=0$ stati $|1\,1\,0\,0\rangle$ deg 1

$E = \frac{5}{2}\hbar\omega$

3) $n=1 \quad L=1 \quad J=1$ stati $|1\,1\,1\,J_z\rangle$ deg. 3

$E = \frac{5}{2}\hbar\omega + 2\hbar\alpha$

4) $n=1 \quad L=1 \quad J=2$ stati $|1\,1\,2\,J_z\rangle$ deg. 5

$E = \frac{5}{2}\hbar\omega + 6\hbar\alpha$

Domanda b)

Possiamo riscrivere la funzione d'onda come

$$|\psi\rangle = A\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\, R_1(r)\, Y_1^0(\theta)\, |1\rangle_S$$

$$= A\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\, \psi_{110}(\vec{r})\, |1\rangle_S$$

dove $\psi_{110}(\vec{r})$ è l'autofunzione normalizzata della Hamiltoniana dell'oscillatore isotropo con $n=1$, $\ell=1$, $\ell_z=0$. Quindi

$$|A|\sqrt{\frac{4\pi}{3}} = 1 \qquad |A| = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}$$

Scegliamo $A = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}$ per cui

$$|\psi\rangle = \overset{n\ \ell\ \ell_z}{|1\ 1\ 0\rangle}\overset{s_z}{|\uparrow\rangle} \longrightarrow \text{(tabelle CG } 1\times 1)$$

$$= \sqrt{\tfrac{1}{2}}\, \underset{n\ \ell\ s\ j\ j_z}{|1\ 1\ 1\ 2\ 1\rangle} - \sqrt{\tfrac{1}{2}}\, \underset{n\ \ell\ s\ j\ j_z}{|1\ 1\ 1\ 1\ 1\rangle}$$

sono autostati di H

energia di $|1\ 1\ 1\ 2\ 1\rangle = \frac{5}{2}\hbar\omega + 6\hbar\alpha \equiv E_2$

$|1\ 1\ 1\ 1\ 1\rangle = \frac{5}{2}\hbar\omega + 2\hbar\alpha \equiv E_1$

Quindi

$$\text{prob}\left(E = \tfrac{5}{2}\hbar\omega + 6\hbar\alpha\right) = \tfrac{1}{2}$$

$$\text{prob}\left(E = \tfrac{5}{2}\hbar\omega + 2\hbar\alpha\right) = \tfrac{1}{2}$$

c) Calcoliamo l'evoluto temporale $\left[\overset{\text{notazione semplificata}}{|j\ j_z\rangle_J = |1\ 1\ 1\ j\ j_z\rangle}\right]$

$$|\psi(t)\rangle = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\, e^{-iE_2 t/\hbar}\, |2\ 1\rangle_J - \sqrt{\tfrac{1}{2}}\, e^{-iE_1 t/\hbar}\, |1\ 1\rangle_J$$

$$= \sqrt{\tfrac{1}{2}}\, e^{i(E_1 - E_2)t/\hbar}\, |2\ 1\rangle_J - \sqrt{\tfrac{1}{2}}\, |1\ 1\rangle_J \quad \text{(eliminata fase)}$$

$$= \sqrt{\tfrac{1}{2}}\, e^{-4i\alpha t}\, |2\ 1\rangle_J - \sqrt{\tfrac{1}{2}}\, |1\ 1\rangle_J$$

Per calcolare i valori medi di L_z e S_z dobbiamo cambiare base

$$|1\ 1\ 1\ j\ j_z\rangle = |j\ j_z\rangle_J \longrightarrow \overset{n\ \ell}{|1\ 1\ \ell_z\rangle}\overset{s}{|1\ s_z\rangle} = \overset{\text{(notazione semplificata)}}{|\ell_z\ s_z\rangle_{LS}}$$

$$|\psi(t)\rangle = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\, e^{-4i\alpha t}\left(\sqrt{\tfrac{1}{2}}\, |1\ 0\rangle_{LS} + \sqrt{\tfrac{1}{2}}\, |0\ 1\rangle_{LS}\right)$$

$$- \sqrt{\tfrac{1}{2}}\left(\sqrt{\tfrac{1}{2}}\, |1\ 0\rangle_{LS} - \sqrt{\tfrac{1}{2}}\, |0\ 1\rangle_{LS}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(e^{-4i\alpha t} - 1\right)|1\ 0\rangle_{LS} + \tfrac{1}{2}\left(e^{-4i\alpha t} + 1\right)|0\ 1\rangle_{LS}$$

Quindi

$\langle\psi(t)|L_z|\psi(t)\rangle =$

$\langle\psi(t)|L_z\left(\frac{1}{2}(e^{-4i\alpha t}-1)|1\ 0\rangle_{LS}+\frac{1}{2}(e^{-4i\alpha t}+1)|0\ 1\rangle_{LS}\right)$

$= \frac{1}{2}(e^{-4i\alpha t}-1)\hbar\ \langle\psi(t)|1\ 0\rangle_{LS}$

$= \frac{1}{2}(e^{-4i\alpha t}-1)\hbar\ \frac{1}{2}(e^{4i\alpha t}-1) = \frac{\hbar}{4}|e^{-4i\alpha t}-1|^2$

$= \frac{\hbar}{4}(2-2\cos 4\alpha t) = \frac{\hbar}{2}(1-\cos 4\alpha t)$

$\langle\psi(t)|S_z|\psi(t)\rangle$

$= \langle\psi(t)|S_z\left(\frac{1}{2}(e^{-4i\alpha t}-1)|1\ 0\rangle_{LS}+\frac{1}{2}(e^{-4i\alpha t}+1)|0\ 1\rangle_{LS}\right)$

$= \frac{1}{2}(e^{-4i\alpha t}+1)\hbar\ \langle\psi(t)|0\ 1\rangle_{LS}$

$= \frac{1}{2}(e^{-4i\alpha t}+1)\hbar\ \frac{1}{2}(e^{4i\alpha t}+1) =$

$= \frac{\hbar}{4}(2+2\cos 4\alpha t) = \frac{\hbar}{2}(1+\cos 4\alpha t)$

Per calcolare i valori medi di J_z, J_z, L^2 utilizziamo la base $|n\ l\ s\ j\ j_z\rangle$

$\langle\psi(t)|J_z|\psi(t)\rangle = \langle\psi(t)|J_z\left(\sqrt{\frac{1}{2}}e^{-4i\alpha t}|2\ 1\rangle_J - \sqrt{\frac{1}{2}}|1\ 1\rangle_J\right)$

$= \hbar\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle = \hbar$

$\langle\psi(t)|J^2|\psi(t)\rangle = \langle\psi(t)|J^2\left(\sqrt{\frac{1}{2}}e^{-4i\alpha t}|2\ 1\rangle_J - \sqrt{\frac{1}{2}}|1\ 1\rangle_J\right)$

$= \langle\psi(t)|\sqrt{\frac{1}{2}}e^{-4i\alpha t}6\hbar^2|2\ 1\rangle_J - \sqrt{\frac{1}{2}}2\hbar^2|1\ 1\rangle_J$

$= \sqrt{\frac{1}{2}}e^{-4i\alpha t}6\hbar^2\sqrt{\frac{1}{2}}e^{4i\alpha t} - \sqrt{\frac{1}{2}}2\hbar^2\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$

$= 3\hbar^2+\hbar^2 = 4\hbar^2$

$\langle\psi(t)|L^2|\psi(t)\rangle = 2\hbar^2$ (tutti i termini hanno $L=1$)

I valori medi di J_z, J^2, ed L^2 non dipendono da t (5)
dato che tali operatori commutano con H.

Domanda d)

Lo stato fondamentale è uno stato con $l=0$ $S=1$, $J=1$
Si può scegliere una base in cui S_x è diagonale
ossia data da $\overset{n}{|0}\ \overset{l}{0}\ \overset{s}{1}\ \overset{s_x}{S_x}\rangle$. Se ordiniamo la
base secondo $|0\,0\,1\,1\rangle, |0\,0\,1\,0\rangle, |0\,0\,1\,-1\rangle$ la
matrice associata alla perturbazione è

$$= \begin{pmatrix} \lambda \langle 0|x^2|0\rangle \hbar^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda\langle 0|x^2|0\rangle\hbar^2 \end{pmatrix}$$

dove $|0\rangle$ è lo stato fondamentale dell'oscillatore
armonico 3Dimensionale. Nella base cartesiana

$$|0\rangle = \underbrace{|0\rangle_x |0\rangle_y |0\rangle_z}_{\text{stati fondamentali oscillatore 1D}}$$

per cui

$$\langle 0|x^2|0\rangle = {}_x\langle 0|x^2|0\rangle_x = \left| x|0\rangle_x \right|^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}$$

Quindi

$\Delta E = 0$ 1 stato $(S_x = 0)$

$\Delta E = \lambda \hbar^2 \frac{\hbar}{2m\omega}$ deg. 2 $(S_x = \pm 1)$

La degenerazione è parzialmente rimossa

Esercizio 2 . Domanda 1)

Per il calcolo notiamo che $|\psi_1|^2 = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/2} e^{-\alpha(x-x_0)^2}$ e $|\psi_2|^2 = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/2} e^{-\alpha(x+x_0)^2}$ sono Gaussiane centrate in x_0 e $-x_0$, rispettivamente. Quindi possiamo concludere

$\langle\psi_1|x|\psi_1\rangle = x_0$ e $\langle\psi_2|x|\psi_2\rangle = -x_0$

Era ovviamente possibile fare anche il calcolo diretto

$$\langle\psi_1|x|\psi_1\rangle = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-\alpha(x-x_0)^2} x \qquad x = x_0 + y$$

$$= \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} dy\,(x_0+y)\, e^{-\alpha y^2}$$

$$= \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/2}\left[x_0\int_{-\infty}^{+\infty} dy\, e^{-\alpha y^2} + \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dy\, y\, e^{-\alpha y^2}}_{=0 \text{ perchè dispari per } y\to -y}\right]$$

$$= x_0\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/2}\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{1/2} = x_0$$

Per calcolare $\langle\psi_2|x|\psi_2\rangle$ basta notare $|\psi_1|^2 \to |\psi_2|^2$ mandando $x_0 \to -x_0$. Quindi $\langle\psi_2|x|\psi_2\rangle = -x_0$.

Per calcolare $\langle\psi_3|x|\psi_3\rangle$ notiamo che $\psi_1(-x) = \psi_2(x)$ per cui

$\psi_3(-x) = N(\psi_1(-x) + \psi_2(-x)) = N(\psi_2(x) + \psi_1(x)) = \psi_3(x)$

La funzione $\psi_3(x)$ è pari; quindi

$\langle\psi_3|x|\psi_3\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, x|\psi_3(x)|^2 = 0$ perchè l'integrando è dispari

GRAFICI :

$\Pi_1(x) = |\psi_1(x)|^2 = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/2} e^{-\alpha(x-x_0)^2}$

Ricordiamo che una Gaussiana di media μ e varianza σ^2 è proporzionale a $e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

Quindi $|\psi_1|^2$ ha media x_0 e deviazione standard, $\frac{1}{2\sigma^2} = \alpha$, $\sigma = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}$

Quindi, al crescere di α, σ diminuisce.

Per $\alpha = 1/x_0^2$ $\quad \sigma = \dfrac{x_0}{\sqrt{2}}$

$\alpha = 4/x_0^2$ $\quad \sigma = \dfrac{x_0}{2\sqrt{2}}$ $\Big\}$ diminuisce di un fattore 2

Lo stesso vale per $\Pi_2(x) = |\psi_2(x)|^2$

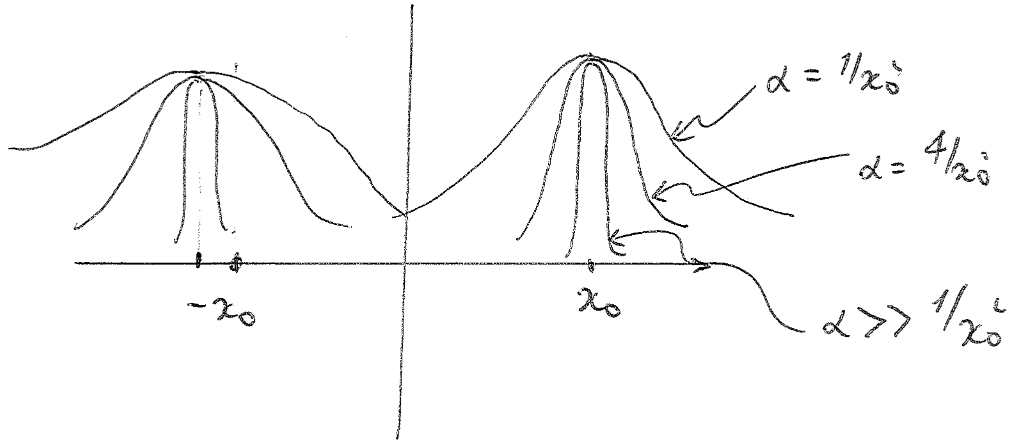
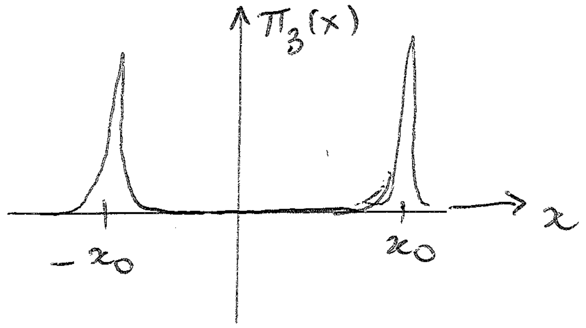


Grafico di $\dfrac{|\psi_3|^2}{N^2} = |\psi_1 + \psi_2|^2 = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + \underbrace{\psi_1^* \psi_2 + \psi_1 \psi_2^*}_{\text{trascurabili per } \alpha \gg 1/x_0^2}$

Quindi $\Pi_3(x) \approx N^2 \left(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 \right) = N^2 \left(\Pi_1(x) + \Pi_2(x) \right)$

[NOTA: sebbene non richiesto, è immediato calcolare N^2 nel limite $\alpha / x_0^2 \gg 1$ dalla formula precedente: $N^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow |N| = \frac{1}{\sqrt{2}}$]



Domanda 2)

$$\langle\psi_1|p|\psi_1\rangle = (-i\hbar)\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \psi_1^* \frac{d}{dx}\psi_1$$

Ora $\frac{d\psi_1}{dx} = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4}\left[ik_0 - \alpha(x-x_0)\right] e^{ik_0x} e^{-\frac{\alpha}{2}(x-x_0)^2}$

$$= \left[ik_0 - \alpha(x-x_0)\right]\psi_1(x)$$

Quindi

$$\langle\psi_1|p|\psi_1\rangle = -i\hbar\int_{-\infty}^{+\infty} dx\,\left[ik_0 + \alpha x_0 - \alpha x\right]|\psi_1(x)|^2$$

$$= -i\hbar\Big[(ik_0+\alpha x_0)\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dx\,|\psi_1(x)|^2}_{=1 \text{ per normalizzazione}} - \alpha\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, x\,|\psi_1(x)|^2}_{=x_0 \text{ (punto 1)}}\Big]$$

$$= -i\hbar\left[ik_0 + \cancel{\alpha x_0} - \cancel{\alpha x_0}\right] = \hbar k_0$$

Non è necessario calcolare direttamente $\langle\psi_2|p|\psi_2\rangle$. Basta notare che $\psi_2(x)$ si ottiene da ψ_1 con $k_0 \to -k_0$, $x_0 \to -x_0$. Quindi

$$\langle\psi_2|p|\psi_2\rangle = -\hbar k_0$$

Infine notiamo che $\psi_3(x)$ è pari e quindi la sua derivata è dispari: $\psi_3'(x) = -\psi_3'(x)$
[formalmente: $\psi_3(x) = \psi_3(-x) \Rightarrow$ (deriviamo) $\psi_3'(x) = -\psi_3'(-x)$]

Quindi

$$\langle\psi_3|p|\psi_3\rangle = -i\hbar\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \underset{\text{pari}}{\underset{\uparrow}{\psi_3^*}}\; \underset{\text{dispari}}{\underset{\uparrow}{\psi_3'(x)}} \longrightarrow \text{integrale} = 0$$

Più formale: Se I è l'operatore di inversione spaziale

$$\langle\psi_3|p|\psi_3\rangle = \langle\psi_3|\underbrace{II}_{I^2=1}\,p\,\underbrace{II}_{I^2=1}|\psi_3\rangle = \langle\psi_3|I(IpI)I|\psi_3\rangle$$

$$= \langle\psi_3|(-p)|\psi_3\rangle$$

$$= -\langle\psi_3|p|\psi_3\rangle$$

Quindi $\langle\psi_3|p|\psi_3\rangle = 0$

Per calcolare la distribuzione di probabilità dobbiamo passare alla rappresentazione dell'impulso

$$\tilde{\psi}_1(p) = \int dx \, \frac{e^{-ipx/\hbar}}{\sqrt{2\pi\hbar}} \psi_1(x) \qquad \text{Se} \quad k = p/\hbar$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} \int dx \, e^{-ikx} e^{ik_0 x} e^{-\frac{\alpha}{2}(x-x_0)^2}$$

$$\int dx \, \exp\left[-ikx + ik_0 x - \frac{\alpha}{2}(x-x_0)^2\right]$$

Utilizzeremo la formula di integrazione riportata nel testo

$$-ikx + ik_0 x - \frac{\alpha}{2}(x-x_0)^2 = -\frac{\alpha}{2}x^2 + x(-ik + ik_0 + \alpha x_0) - \frac{\alpha x_0^2}{2}$$

Identifichiamo

$$a = \frac{\alpha}{2}$$

$$b = \alpha x_0 + i(k_0 - k)$$

$$c = -\frac{\alpha x_0^2}{2}$$

$$\frac{b^2}{4a} + c = \frac{1}{4}\frac{2}{\alpha}\left[\alpha x_0 + i(k_0-k)\right]^2 - \frac{\alpha x_0^2}{2}$$

$$= \frac{1}{2\alpha}\left[\alpha^2 x_0^2 - (k_0-k)^2 + 2i\alpha x_0(k_0-k)\right] - \frac{\alpha x_0^2}{2}$$

$$= \cancel{\frac{\alpha x_0^2}{2}} - \frac{1}{2\alpha}(k-k_0)^2 + i x_0(k_0-k) - \cancel{\frac{\alpha x_0^2}{2}}$$

Quindi

$$\tilde{\psi}_1(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4}\sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}}\, e^{ix_0(k_0-k)} e^{-\frac{1}{2\alpha}(k-k_0)^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\hbar}}\frac{1}{(\alpha\pi)^{1/4}} e^{ix_0(k_0-k)} e^{-\frac{1}{2\alpha}(k-k_0)^2}$$

Per ricavare $\tilde{\psi}_2(p)$ notiamo che $\psi_2(x)$ si ottiene da $\psi_1(x)$ con $x_0 \to -x_0$, $k_0 \to -k_0$. Quindi

$$\tilde{\psi}_2(p) = \frac{1}{\sqrt{\hbar}} \frac{1}{(\alpha\pi)^{1/4}} e^{i x_0 (k_0 + k)} e^{-\frac{1}{2\alpha}(k+k_0)^2}$$

Infine $\tilde{\psi}_3(p) = \mathcal{N}\left(\tilde{\psi}_1(p) + \tilde{\psi}_2(p)\right)$

Notiamo che $\tilde{\psi}_1(-p) = \tilde{\psi}_2(p)$ per cui $\tilde{\psi}_3(-p) = \psi_3(p)$ [pari]

GRAFICI

$$\pi_1(p) = |\tilde{\psi}_1(p)|^2 = \frac{1}{\hbar}\frac{1}{\sqrt{\alpha\pi}} e^{-\frac{1}{\alpha}\left(\frac{p}{\hbar} - k_0\right)^2}$$

$$= \frac{1}{\hbar}\frac{1}{\sqrt{\alpha\pi}} e^{-\frac{1}{\alpha\hbar^2}(p - \hbar k_0)^2}$$

È una Gaussiana centrata in $p = \hbar k_0$ [avremmo potuto ricavare $\langle \psi_1 | p | \psi_1 \rangle$ direttamente da qui]

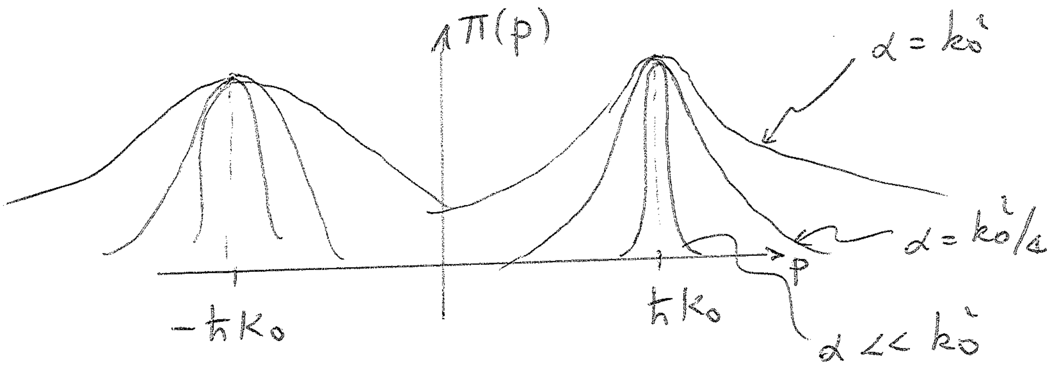
La deviazione standard è

$$\frac{1}{2\sigma^2} = \frac{1}{\alpha\hbar^2} \qquad \sigma = \hbar\sqrt{\frac{\alpha}{2}}$$

Quindi, al decrescere di α, σ diminuisce

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Per } \alpha = k_0^2 & \sigma = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} k_0 \\ \alpha = \frac{k_0^2}{4} & \sigma = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \frac{k_0}{2} \end{array}\right\} \text{diminuisce di un fattore } 2$$

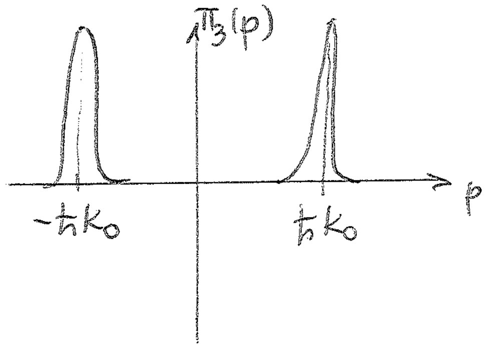
Lo stesso vale per $|\tilde{\psi}_2(p)|^2$



Nel limite $\alpha \ll k_0^2$ possiamo scrivere

$$|\tilde{\psi}_3(p)|^2 = \mathcal{N}^2 \left(|\tilde{\psi}_1(p)|^2 + |\tilde{\psi}_2(p)|^2 \right)$$

senza termini misti (trascurabili). Quindi



Domanda 3

Dato che $\psi_3(x)$ è pari $\langle \psi_3 | \hat{P} | \psi_3 \rangle = +1$

Domanda 4

Dato che $[p, H] = [P, H] = 0$ abbiamo

$$\langle \psi_3(t) | p | \psi_3(t) \rangle = \underset{(t=0)}{\langle \psi_3 | p | \psi_3 \rangle} = 0$$

$$\langle \psi_3(t) | P | \psi_3(t) \rangle = \underset{(t=0)}{\langle \psi_3 | P | \psi_3 \rangle} = +1$$

Per calcolare il valor medio di x, ricordiamo che i valori medi soddisfano le eq. di Hamilton:
Dato che $(p = m\dot{x})$ abbiamo

$$\langle \psi_3(t) | p | \psi_3(t) \rangle = m \frac{d}{dt} \langle \psi_3(t) | x | \psi_3(t) \rangle$$

$$\downarrow$$

$$0 = \frac{d}{dt} \langle \psi_3(t) | x | \psi_3(t) \rangle \Rightarrow \text{non dipende da } t$$

$$\langle \psi_3(t) | x | \psi_3(t) \rangle = \langle \psi_3 | x | \psi_3 \rangle = 0$$

Domanda 5

$$\langle \psi | x | \psi \rangle = \frac{2}{3} \langle \psi_1 | x | \psi_1 \rangle + \frac{1}{3} \langle \psi_2 | x | \psi_2 \rangle$$

per l'ortogonalità delle funzioni di spin

$$= \frac{2}{3} x_0 + \frac{1}{3}(-x_0) = \frac{x_0}{3}$$

$$\langle \psi | p | \psi \rangle = \frac{2}{3} \langle \psi_1 | p | \psi_1 \rangle + \frac{1}{3} \langle \psi_2 | p | \psi_2 \rangle$$

$$= \frac{2}{3} \hbar k_0 + \frac{1}{3} (-\hbar k_0) = - \frac{\hbar k_0}{3}$$

Esame di Meccanica Quantistica, 27/06/2023

Esercizio 1. Si considerino due osservabili A e B la cui espressione nella base ortonormale completa $\{|\alpha\rangle, |\beta\rangle, |\gamma\rangle\}$ è la seguente:

$$\begin{aligned} A =& a\,|\alpha\rangle\langle\beta| + a\,|\beta\rangle\langle\alpha| + 2a\,|\gamma\rangle\langle\gamma| \\ B =& 3b\,|\alpha\rangle\langle\alpha| + 2b\,|\beta\rangle\langle\beta| + 3b\,|\gamma\rangle\langle\gamma| + b\,|\alpha\rangle\langle\gamma| + b\,|\gamma\rangle\langle\alpha|\,, \end{aligned}$$

dove a, b sono due parametri reali con opportune dimensioni.

a) Si determinino gli autovalori ed una base di autovettori di A e B. Si dica se esistono autostati simultanei di A e B.

b) Uno stato fisico $|\psi\rangle$ viene preparato nel seguente modo: si effettua una misura di A, ottenendo come risultato il valore a; immediatamente dopo si effettua una misura di B, ottenendo come risultato un valore minore di $3b$. Si determini l'espressione di $|\psi\rangle$ nella base $\{|\alpha\rangle, |\beta\rangle, |\gamma\rangle\}$ e il valor medio di A su $|\psi\rangle$.

c) Si determinino i possibili risultati di una misura di A sullo stato $|\psi\rangle$ e le corrispondenti probabilità.

Esercizio 2. Si considerino due particelle identiche di spin 1/2 vincolate a muoversi su una circonferenza ($x = R\cos\phi$, $y = R\sin\phi$, $z = 0$) e soggette alla Hamiltoniana

$$H_0 = \frac{\omega}{\hbar}(L_{1z}^2 + L_{2z}^2) + B\omega(S_{1z} + S_{2z}),$$

con $0 < B \ll 1$. I pedici 1 e 2 si riferiscono alle due particelle.

a) Si calcolino le energie, le degenerazioni ed una base di autostati per i primi 4 livelli.

b) Si consideri la perturbazione

$$V = \epsilon\hbar\omega(\cos 2\phi_1 + \cos 2\phi_2),$$

dove ϕ_1 e ϕ_2 sono le posizioni angolari delle due particelle. Assumendo che $\epsilon \ll B$, si calcolino le energie dello stato fondamentale e del primo livello eccitato al primo ordine perturbativo in ϵ.

c) Si consideri la famiglia di stati con funzione d'onda spinoriale normalizzata

$$\psi_0 = A\sin(\phi_1 - \phi_2)\chi_a + B\chi_b,$$

dove χ_a e χ_b sono spinori normalizzati, ciascuno dei quali fornisce uno stato di spin delle due particelle. Gli stati ψ_0 godono delle seguenti proprietà: (i) Una misura di S_z ($\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2$ è lo spin totale del sistema) su ψ_0 fornisce sempre 0. (ii) Si misura L_z su ciascuna particella, ottenendo due valori $m_a\hbar$ e $m_b\hbar$. La probabilità di ottenere $m_a = m_b$ è pari a 1/2.
Si determinino χ_a e χ_b e si specifichino i valori possibili delle costanti A e B (si ricordi che ψ_0 è normalizzata).

d) Si assuma che al tempo $t = 0$ il sistema sia in uno degli stati ψ_0 e che il sistema evolva con Hamiltoniana H_0. Sia ψ_t l'evoluto temporale al tempo t. Si calcolino i possibili valori ottenibili in una misura di S^2, $L_z = L_{1z} + L_{2z}$ ed H_0 su ψ_t. Si determinino anche le relative probabilità.

Esercizio 1

a) Rappresentazione matriciale

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2a \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3b & 0 & b \\ 0 & 2b & 0 \\ b & 0 & 3b \end{pmatrix}$$

Matrice A

$$\det|A - \lambda I| = \begin{pmatrix} -\lambda & a & 0 \\ a & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2a-\lambda \end{pmatrix} = (2a-\lambda)(\lambda^2 - a^2) = 0 \quad < \begin{matrix} \lambda = 2a \\ \lambda = a \\ \lambda = -a \end{matrix}$$

Autovettori di A

$\lambda = 2a$

$$\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = 2a\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} a\beta = 2a\alpha \\ a\alpha = 2a\beta \\ 2a\gamma = 2a\gamma \end{cases} \qquad \alpha = \beta = 0$$

$|2a\rangle = (0, 0, 1)$ [si poteva dedurre a priori vista la struttura a blocchi della matrice]

$\lambda = a$

$$\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} a\beta = a\alpha \\ a\alpha = a\beta \\ 2a\gamma = a\gamma \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = \beta \\ \gamma = 0 \end{cases} \xrightarrow{} \text{Normalizzazione} \quad \alpha = \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$|a\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$

$\lambda = -a$

$$\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = -a\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} a\beta = -a\alpha \\ a\alpha = -a\beta \\ 2a\gamma = -a\gamma \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = -\beta \\ \gamma = 0 \end{cases} \qquad \text{Normalizzaz.} \downarrow \quad \alpha = -\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$|-a\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$

Matrice B

$$\det = \begin{pmatrix} 3b-\lambda & 0 & b \\ 0 & 2b-\lambda & 0 \\ b & 0 & 3b-\lambda \end{pmatrix} = (2b-\lambda)\det\begin{pmatrix} 3b-\lambda & b \\ b & 3b-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (2b-\lambda)\left[(3b-\lambda)^2 - b^2\right] = (2b-\lambda)\left[8b^2 - 6b\lambda + \lambda^2\right]$$
$$= (2b-\lambda)(\lambda-4b)(\lambda-2b)$$

$$\lambda = \begin{cases} 4b \\ 2b \\ 2b \end{cases} \Big] \text{ deg. } 2$$

$\lambda = 4b$

$$\begin{pmatrix} 3b & 0 & b \\ 0 & 2b & 0 \\ b & 0 & 3b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = 4b\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} 3b\alpha + \gamma b = 4b\alpha \\ 2b\beta = 4b\beta \\ b\alpha + 3b\gamma = 4b\gamma \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta = 0 \\ \gamma = \alpha \end{cases} \xrightarrow[\text{norm.}]{} \quad \beta = 0, \ \gamma = \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad |4b\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$\lambda = 2b$

$$\begin{pmatrix} 3b & 0 & b \\ 0 & 2b & 0 \\ b & 0 & 3b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = 2b\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} 3b\alpha + \gamma b = 2b\alpha \\ 2b\beta = 2b\beta \\ b\alpha + 3b\gamma = 2b\gamma \end{cases}$$

Vi è una sola equazione $\alpha = -\gamma$

Possibile base <u>ORTOGONALE</u> $\left[\langle 2b,1|2b,2\rangle = 0\right]$

$$\begin{cases} |2b,1\rangle = (0,1,0) \\ |2b,2\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \end{cases}$$

Non ci sono autostati simultanei, come si vede per calcolo diretto.

Infatti se uno degli autovettori $|v\rangle$ di A fosse autovettore di B dovrebbe essere tale che

$$|v\rangle = |4b\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \qquad \text{(cond A)}$$

oppure

$$|v\rangle = \alpha|2b,1\rangle + \beta|2b,2\rangle$$
$$= \left(\frac{\beta}{\sqrt{2}}, \alpha, -\frac{\beta}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{per qualche } \alpha,\beta \qquad \text{(cond B)}$$

È immediato verificare che la cond. A non è mai verificata, per confronto diretto
Analogamente, è possibile verificare che non esistono α, β tali che $|v\rangle$ sia autovettore di A

Si noti che $C = [A, B] \neq 0$, ma questo non è rilevante per rispondere alla domanda. $C \neq 0$ implica che non esiste una <u>base</u> di autovettori comuni, ma non esclude l'esistenza di <u>qualche</u> autovettore comune.

In ogni caso, se $A|v\rangle = \lambda v$ e $B|v\rangle = \mu|v\rangle$ allora $C|v\rangle = 0$. Quindi, condizione NECESSARIA per avere un autovettore comune, è l'esistenza di un autovettore nullo di C, ossia $\det C = 0$.
Quindi, se $\det C \neq 0$, allora non vi sono autovettori comuni. Questa osservazione permette di giungere in modo molto più lungo e laborioso alla conclusione che A e B non hanno autovettori comuni.

b) Dopo la prima misura, il sistema si trova nell'autostato di A con autovalore a, ossia

$$|\psi_{ini}\rangle = |a\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

Nella misura di B si ottiene un risultato minore di $3b$ e quindi si ottiene $2b$.
Lo stato finale si ottiene quindi proiettando $|\psi_{ini}\rangle$ sul sottospazio generato da $|2b,1\rangle$ e $|2b,2\rangle$

$$\langle 2b,1|\psi_{ini}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\langle 2b,2|\psi_{ini}\rangle = \frac{1}{2}$$

Quindi $$|\psi_{ini}\rangle \xrightarrow[\text{misura}]{} \frac{1}{\sqrt{2}}|2b,1\rangle + \frac{1}{2}|2b,2\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$$

Lo stato va normalizzato: $\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$

$$= \frac{3}{4}$$

$$|\psi\rangle = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, -1)$$

$$\langle\psi|A|\psi\rangle = \frac{a}{6}(1,2,-1)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{a}{6}(1,2,-1)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{a}{6}(2+2+2) = a$$

c) Esprimiamo $|\psi\rangle$ nella base di A

$$\langle a|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\langle -a|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$\langle 2a|\psi\rangle = -\frac{1}{\sqrt{6}}$$

Quindi

$$P(a) = \frac{3}{4}$$

$$P(-a) = \frac{1}{12} \qquad \langle\psi|\psi\rangle = \frac{3}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{6} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1 \quad \text{ok}$$

$$P(2a) = \frac{1}{6} \qquad \langle\psi|A|\psi\rangle = \frac{3}{4}a + \frac{1}{12}(-a) + \frac{1}{6}2a$$

$$= a\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{12} + \frac{1}{3}\right) = a \quad \text{ok}$$

Esercizio 2

Domanda a)

Ricordiamo che gli autovalori di L_z sono $\hbar m$, $m \in \mathbb{Z}$ con funzione d'onda (sulla circonferenza) normalizzata

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} = f_m(\varphi)$$

Una base di autostati di H_0 (non consideriamo Pauli)

$$|m_1\rangle_1 |m_2\rangle_2 |S\ S_z\rangle = |m_1\ m_2\ S\ S_z\rangle \qquad E = \hbar\omega(m_1^2 + m_2^2) + B\hbar S_z$$

$\vec{S}$ totale $= \vec{S}_1 + \vec{S}_2$

Lo spin totale può assumere i valori 0, 1.

Livelli più bassi (senza Pauli)

- $m_1 = m_2 = 0 \qquad E = B\hbar\omega S_z$

- $\begin{cases} m_1 = \pm 1 & m_2 = 0 \\ m_1 = 0 & m_2 = \pm 1 \end{cases} \qquad E = \hbar\omega + B\hbar\omega S_z$

Imponiamo Pauli

- $m_1 = m_2 = 0$
  La parte spaziale è $|0\rangle_1 |0\rangle_2$, pari.
  Quindi la parte di spin è dispari $\Longrightarrow S = 0$

STATO FOND: $\underset{m_1\ m_2\ S\ S_z}{|0\ 0\ 0\ 0\rangle}$ non degenere

- $m_1 = \pm 1 \quad m_2 = 0$, e $m_1 = 0,\ m_2 = \pm 1$

Definiamo delle funzioni d'onda spaziali pari o dispari sotto scambio

$$\left.\begin{aligned} |1\ 0\rangle_S &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\overset{m_1}{|1\rangle_1} \overset{m_2}{|0\rangle_2} + \overset{m_1}{|0\rangle_1} \overset{m_2}{|1\rangle_2} \right) \\ |-1\ 0\rangle_S &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|-1\rangle_1 |0\rangle_2 + |0\rangle_1 |-1\rangle_2 \right) \end{aligned}\right\} \xrightarrow[\text{spaziale}]{\text{pari}} \quad \text{spin } S = 0$$

$$\left.\begin{aligned} |1\ 0\rangle_A &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|1\rangle_1 |0\rangle_2 - |0\rangle_1 |1\rangle_2 \right) \\ |-1\ 0\rangle_A &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|-1\rangle_1 |0\rangle_2 - |0\rangle_1 |-1\rangle_2 \right) \end{aligned}\right\} \xrightarrow[\text{spaziale}]{\text{dispari}} \quad \text{spin } S = 1$$

Vi sono quindi 3 ulteriori livelli

- $|1\,0\rangle_A\,|\underset{S}{1}\;\underset{S_z}{-1}\rangle\;,\;|-1\;0\rangle_A\,|1\;-1\rangle$

$$E = \hbar\omega - B\hbar\omega \qquad \text{deg. } 2$$

- $\begin{cases} |1\,0\rangle_A\,|1\;0\rangle & |-1\;0\rangle_A\,|1\;0\rangle \\ |1\,0\rangle_S\,|0\;0\rangle & |-1\;0\rangle_S\,|0\;0\rangle \end{cases}$ deg. 4 $\quad E = \hbar\omega$

- $|1\,0\rangle_A\,|1\;1\rangle \qquad |-1\;0\rangle_A\,|1\;1\rangle$ deg. 2 $\quad E = \hbar\omega + B\hbar\omega$

Domanda b)

caso 1 stato fondamentale

$$|0\,0\rangle|0\,0\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}|0\,0\rangle = \frac{1}{2\pi}|0\,0\rangle$$

$$\langle \text{fond}|V|\text{fond}\rangle = \frac{\epsilon\hbar\omega}{(2\pi)^2}\int_{-\pi}^{\pi} d\varphi_1 d\varphi_2\,(\cos 2\varphi_1 + \cos 2\varphi_2) = 0$$

caso 2 I eccitato

Lo stato è degenere, base $|1\,0\rangle_A|1\,-1\rangle\,,\;|-1\,0\rangle_A|1\,-1\rangle$

Dobbiamo calcolare 3 elementi di matrice

$${}_A\langle 1\;0|\langle 1\,-1|\,V\,|1\;0\rangle_A|1\,-1\rangle = {}_A\langle 1\;0|V|1\;0\rangle_A$$

$${}_A\langle -1\;0|\langle 1\,-1|\,V\,|-1\,0\rangle_A\,|1\,-1\rangle = {}_A\langle -1\,0|\,V\,|-1\,0\rangle_A$$

$${}_A\langle -1\,0|\langle 1\,-1|\,V\,|1\,0\rangle_A\,|1\,-1\rangle = {}_A\langle -1\,0|\,V\,|\,1\,0\rangle_A$$

[Il quarto elemento di matrice segue dalla hermiticità di V]

Ora

$$|\pm1\ 0\rangle_A = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\pm1\rangle|0\rangle - |0\rangle|\pm1\rangle\right) \longrightarrow \text{funz. d'onda}$$

$$\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\pm i\varphi_1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\pm i\varphi_2}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{\pm i\varphi_1} - e^{\pm i\varphi_2}\right)$$

Ricordiamo che

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\varphi\, e^{im\varphi}\cos 2\varphi = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} d\varphi\, e^{im\varphi}\left(e^{2i\varphi} + e^{-2i\varphi}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} d\varphi\left(e^{i(m+2)\varphi} + e^{i(m-2)\varphi}\right) = \begin{cases} \pi & \text{per } m = \pm 2 \\ 0 & \text{per } m \neq \pm 2 \end{cases}$$

Calcolo di ${}_A\langle\pm1\ 0|V|\pm1\ 0\rangle_A$ [per semplicità omettiamo $\epsilon\hbar\omega$]

Ora $\left|\frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{\pm i\varphi_1} - e^{\pm i\varphi_2}\right)\right|^2 =$

$$\frac{1}{8\pi^2}\left(1 + 1 - e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} - e^{-i(\varphi_1-\varphi_2)}\right)$$

Quindi

$${}_A\langle\pm1\ 0|V|\pm1\ 0\rangle_A = \frac{1}{8\pi^2}\int d\varphi_1 d\varphi_2 \left(\cos 2\varphi_1 + \cos 2\varphi_2\right)$$

$$\underbrace{\left(2 - e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} - e^{-i(\varphi_1-\varphi_2)}\right)}$$

NON VI SONO TERMINI CON $m=2,-2$ ossia $e^{\pm 2i\varphi_1}$ o $e^{\pm 2i\varphi_2}$.

Quindi l'integrale è nullo

Calcolo di [omettiamo $\epsilon\hbar\omega$]

$_1\langle 1\, 0 | V | -1\, 0\rangle_A$

Nota che $\frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}(e^{i\varphi_1}-e^{i\varphi_2})^* \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-i\varphi_1}-e^{-i\varphi_2})$

$$= \frac{1}{8\pi^2}(e^{-i\varphi_1}-e^{-i\varphi_2})^2 = \frac{1}{8\pi^2}\left(e^{-2i\varphi_1}+e^{-2i\varphi_2}-2e^{-i(\varphi_1+\varphi_2)}\right)$$

Quindi

$$_A\langle 1\, 0 | V | -1\, 0\rangle_A = \int d\varphi_1\, d\varphi_2\, (\cos 2\varphi_1 + \cos 2\varphi_2)\, \frac{1}{8\pi^2}\left(e^{-2i\varphi_1}+e^{-2i\varphi_2}-\underbrace{2e^{-i(\varphi_1+\varphi_2)}}_{m=-1 \;\to\; \text{dà zero}}\right)$$

$$= \frac{1}{8\pi^2}\int d\varphi_1 d\varphi_2 \Big[\cos 2\varphi_1 e^{-2i\varphi_1} + \underbrace{\cos 2\varphi_1 e^{-2i\varphi_2}}_{\text{dà zero}} + \underbrace{\cos 2\varphi_2 e^{-2i\varphi_1}}_{\text{dà zero}} + \cos 2\varphi_2 e^{-2i\varphi_2}\Big]$$

$$= \frac{1}{8\pi^2}\left[\pi\cdot 2\pi + 2\pi\cdot\pi\right] = \frac{1}{2}$$

Quindi la matrice della perturbazione è

$$V = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\epsilon\hbar\omega}{2} \\ \frac{\epsilon\hbar\omega}{2} & 0 \end{pmatrix} \qquad (\text{Reintrodotto } \epsilon\hbar\omega)$$

Autovalori $\lambda = \pm\frac{\epsilon\hbar\omega}{2}$

Il livello si separa con $\Delta E = \pm\frac{1}{2}\hbar\omega$

c) $\left[f_m(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} \right]$

Riscriviamo ψ_0 in termini di autofunzioni di L_z

$$\psi_0 = \frac{A}{2i}\left(e^{i\varphi_1} e^{-i\varphi_2} - e^{-i\varphi_1} e^{i\varphi_2}\right)\chi_a + B\chi_b$$

$$= \frac{A\pi}{i}\Big(\underbrace{f_1(\varphi_1) f_{-1}(\varphi_2)}_{(*1)} - \underbrace{f_{-1}(\varphi_1) f_1(\varphi_2)}_{(*2)}\Big)\chi_a + 2\pi B \underbrace{f_0(\varphi_1) f_0(\varphi_2)}_{(*3)}\chi_b$$

Guardando le proprietà di scambio della parte spaziale concludiamo che χ_a è uno spinore con $S=1$, χ_b con $S=0$. Quindi (i) implica $\chi_a = |1\,0\rangle$, $\chi_b = |0\,0\rangle$.

Per imporre la condizione (ii) notiamo che

(*1) ha $m_1 = 1,\ m_2 = -1 \qquad m_1 \neq m_2$

(*2) ha $m_1 = -1,\ m_2 = 1 \qquad m_1 \neq m_2$

(*3) ha $m_1 = 0 \quad m_2 = 0 \qquad m_1 = m_2$

Quindi $|2\pi B|^2 = \frac{1}{2} \qquad |B| = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{2\pi}$

[NB: quando si calcolano le probabilità è necessario che gli stati siano normalizzati. Per questo bisogna introdurre $f_m(\varphi)$] $\quad f_m(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi}$

La condizione di normalizzazione è [tutti gli stati che appaiono sono normalizzati]

$$|A\pi|^2 \cdot 2 + 4\pi^2 |B|^2 = 1$$

$$2\pi^2 |A|^2 + \frac{1}{2} = 1 \qquad |A|^2 = \frac{1}{4\pi^2}$$

Possiamo porre $\quad A = \frac{i}{2\pi} \quad B = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{2\pi} e^{i\alpha}$ $\quad \left(\begin{array}{c}\alpha \text{ fase} \\ \text{arbitraria}\end{array}\right)$

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{2}\left(|1\rangle_1 |-1\rangle_2 - |-1\rangle_1 |1\rangle_2\right)|1\,0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\alpha} |0\rangle_1 |0\rangle_2 |0\,0\rangle$$

d) L_z, S^2 e (ovviamente) H_0 commutano con H_0
Le probabilità richieste non dipendono da t.
Non è necessario calcolare ψ_t

- L_z Dato che $m_1 + m_2 = 0$ per tutti gli stati
  otteniamo prob $(L_z = 0) = 1$

- S^2 Prob $(S^2 = 0) = \frac{1}{2}$

  Prob $(S^2 = 2\hbar^2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

H_0

Energia di $|1\rangle_1 |-1\rangle_2 |1\,0\rangle \longrightarrow \hbar\omega(1+1) = 2\hbar\omega$

$|-1\rangle_1 |1\rangle_2 |1\,0\rangle \longrightarrow \hbar\omega(1+1) = 2\hbar\omega$

$|0\rangle_1 |0\rangle_2 |0\,0\rangle \longrightarrow 0$

Quindi

Prob $(E = 2\hbar\omega) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

Prob $(E = 0) = \frac{1}{2}$

Esame di Meccanica Quantistica, 12/07/2023

Esercizio 1. La dinamica di una particella di spin $s = 3/2$ è governata dalla seguente Hamiltoniana:

$$\hat{H} = V_{xx}\hat{S}_x^2 + V_{yy}\hat{S}_y^2 + V_{zz}\hat{S}_z^2$$

dove V_{xx}, V_{yy} e V_{zz} sono parametri noti soggetti al vincolo $V_{xx} + V_{yy} + V_{zz} = 0$.

a) Si dimostri che l'Hamiltoniana può essere riscritta nella seguente forma

$$\hat{H} = A(3\hat{S}_z^2 - \hat{\mathbf{S}}^2) + B(\hat{S}_+^2 + \hat{S}_-^2).$$

Si esprimano A e B in termini di V_{xx} e V_{yy}.

b) Si esprima $\hat{H}$ in rappresentazione matriciale utilizzando la base $\{|-s\rangle, |-s+1\rangle, \dots |s\rangle\}$ degli autoket di $\hat{S}_z$. Si mostri che, scegliendo opportunamente l'ordine degli elementi della base, la matrice associata ad $\hat{H}$ assume una forma diagonale a blocchi.

c) Determinare gli autovalori dell'energia e la loro degenerazione.

d) Determinare esplicitamente una base di autoket di $\hat{H}$ nel caso in cui $B = \left(\sqrt{3}/2\right) A$.

e) Sempre nel caso $B = \left(\sqrt{3}/2\right) A$, si assuma che il sistema si trovi all'istante $t = 0$ nell'autoket di $\hat{S}_z$ corrispondente al suo autovalore massimo. Al generico tempo t, determinare i possibili risultati di una misura di energia e le relative probabilità.

Esercizio 2. Due particelle identiche di massa m e spin $1/2$ si muovono su una circonferenza di raggio R che giace nel piano xy. L'Hamiltoniana è $H = H_0 + H_{\text{spin}}$, con

$$H_0 = \frac{\hat{L}_{1z}^2}{2mR^2} + \frac{\hat{L}_{2z}^2}{2mR^2} \qquad H_{\text{spin}} = \gamma \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2,$$

dove $\hat{L}_{1z}$ e $\hat{L}_{2z}$ sono le componenti z del momento angolare delle due particelle. Si assuma $0 < \gamma m R^2 < 1/2$.

a) Si scriva una base formata da autofunzioni simultanee di H_0 e dell'operatore di riflessione Π. L'azione di Π su una generica funzione d'onda $\Psi(\phi_1, \phi_2)$ è definita da $\Pi[\Psi(\phi_1, \phi_2)] = \Psi(-\phi_1, -\phi_2)$, dove ϕ_1 e ϕ_2 sono le coordinate angolari delle due particelle ($-\pi < \phi_{1,2} \leq \pi$). Si determinino le energie e le degenerazioni dei primi 3 livelli di H_0.

b) Si determinino le energie e le degenerazioni dei primi 3 livelli di H.

c) Si consideri la famiglia di stati quantistici descritti dalla funzione d'onda

$$\Psi(\phi_1, \phi_2) = f(\phi_1, \phi_2)|+\rangle_1|-\rangle_2 + g(\phi_1, \phi_2)|-\rangle_1|+\rangle_2\,,$$

dove $|\pm\rangle_1$ e $|\pm\rangle_2$ sono autostati di S_{1z} ed S_{2z} con autovalore $\pm\hbar/2$.
Si determini l'espressione di $f(\phi_1, \phi_2)$ e $g(\phi_1, \phi_2)$ sapendo che: *i)* una misura di H fornisce con certezza un risultato $E < 5\hbar^2/(8mR^2)$; *ii)* una misura di $\hat{L}_z = \hat{L}_{1z} + \hat{L}_{2z}$ non fornisce mai un risultato nullo; *iii)* la funzione d'onda $\Psi(\phi_1, \phi_2)$ è pari rispetto all'azione di Π: $\Psi(-\phi_1, -\phi_2) = \Psi(\phi_1, \phi_2)$; *iv)* vale $\langle\Psi|S^2|\Psi\rangle = \hbar^2$; *v)* la funzione d'onda è normalizzata.
d) Si calcoli $\langle\Psi|H|\Psi\rangle$.

Esercizio 1

a) Calcoliamo

$$S_+^2 + S_-^2 = (S_x + i S_y)^2 + (S_x - i S_y)^2$$

diversi dato che non commutano

$$= S_x^2 - S_y^2 + i S_x S_y + i S_y S_x + S_x^2 - S_y^2 - i S_x S_y - i S_y S_x$$

Quindi

$$\begin{cases} S_x^2 - S_y^2 = \frac{1}{2}(S_+^2 + S_-^2) \\ S_x^2 + S_y^2 = S^2 - S_z^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} S_x^2 = \frac{1}{2}(S^2 - S_z^2) + \frac{1}{4}(S_+^2 + S_-^2) \\ S_y^2 = \frac{1}{2}(S^2 - S_z^2) - \frac{1}{4}(S_+^2 + S_-^2) \end{array}$$

Quindi

$$H = \frac{V_{xx}}{2}(S^2 - S_z^2) + \frac{V_{xx}}{4}(S_+^2 + S_-^2)$$
$$+ \frac{V_{yy}}{2}(S^2 - S_z^2) - \frac{V_{yy}}{4}(S_+^2 + S_-^2) + V_{zz} S_z^2$$
$$= \frac{1}{2}(V_{xx} + V_{yy})(S^2 - S_z^2) + V_{zz} S_z^2 + \frac{1}{4}(V_{xx} - V_{yy})(S_+^2 + S_-^2)$$
$$= -\frac{1}{2} V_{zz}(S^2 - S_z^2) + V_{zz} S_z^2 + \frac{1}{4}(V_{xx} - V_{yy})(S_+^2 + S_-^2)$$
$$= \frac{V_{zz}}{2}(3S_z^2 - S^2) + \frac{1}{4}(V_{xx} - V_{yy})(S_+^2 + S_-^2)$$

Quindi $A = \frac{1}{2} V_{zz}$ $\quad B = \frac{1}{4}(V_{xx} - V_{yy})$

b) Nella base indicata $(3S^2 - S_z^2)$ è diagonale

Invece $\langle s | S_+^2 + S_-^2 | s' \rangle \neq 0$ solo se $|s - s'| = 2$

E' quindi utile mettere "vicino" stati che differiscono di $\Delta s = 2$

Due possibili (tra molte) scelte

$$|\tfrac{3}{2}\rangle, |-\tfrac{1}{2}\rangle, |\tfrac{1}{2}\rangle, |-\tfrac{3}{2}\rangle$$

oppure

$$|\tfrac{3}{2}\rangle, |-\tfrac{1}{2}\rangle, |-\tfrac{3}{2}\rangle |\tfrac{1}{2}\rangle$$

Sceglieremo la seconda. [Questa]

Dato che

$$\langle \tfrac{3}{2} | S_+^2 + S_-^2 | \tfrac{1}{2} \rangle = \langle \tfrac{3}{2} | S_+^2 + S_-^2 | -\tfrac{3}{2} \rangle = 0$$

$$\langle -\tfrac{1}{2} | S_+^2 + S_-^2 | \tfrac{1}{2} \rangle = \langle -\tfrac{1}{2} | S_+^2 + S_-^2 | -\tfrac{3}{2} \rangle = 0$$

In questa base

$$H = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array} \right) \begin{array}{l} \updownarrow \text{ 2 righe} \\ \updownarrow \text{ 2 righe} \end{array}$$

[Matrice diagonale a blocchi 2×2]

Gli unici elementi di matrice da calcolare sono

$$\langle \tfrac{3}{2} | S_+^2 + S_-^2 | -\tfrac{1}{2} \rangle \quad e \quad \langle \tfrac{1}{2} | S_+^2 + S_-^2 | -\tfrac{3}{2} \rangle$$

Dato che $(S_+^2 + S_-^2)^\dagger = (S_+^2)^\dagger + (S_-^2)^\dagger = (S_-^2) + (S_+^2) \Rightarrow \Big\{$ $(S_+^2 + S_-^2)$ è un operatore hermitian

$$\langle -\tfrac{1}{2} | S_+^2 + S_-^2 | \tfrac{3}{2} \rangle = \langle \tfrac{3}{2} | S_+^2 + S_-^2 | -\tfrac{1}{2} \rangle^*$$

$$\langle -\tfrac{3}{2} | S_+^2 + S_-^2 | \tfrac{1}{2} \rangle = \langle \tfrac{1}{2} | S_+^2 + S_-^2 | -\tfrac{3}{2} \rangle^*$$

Quindi

$$\langle \tfrac{3}{2} | S_+^2 + S_-^2 | -\tfrac{1}{2} \rangle = \langle \tfrac{3}{2} | S_+^2 | -\tfrac{1}{2} \rangle$$

$$= \hbar^2\, 2 \langle \tfrac{3}{2} | S_+ | \tfrac{1}{2} \rangle = \hbar^2\, 2\sqrt{3}$$

$$\langle \tfrac{1}{2} | S_+^2 + S_-^2 | -\tfrac{3}{2} \rangle = \langle \tfrac{1}{2} | S_+^2 | -\tfrac{3}{2} \rangle$$

$$= \hbar^2 \sqrt{3} \langle \tfrac{1}{2} | S_+ | -\tfrac{1}{2} \rangle = 2\sqrt{3}\,\hbar^2$$

Quindi la base associata a $S_+^2 + S_-^2$ è

$$\hbar^2 \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 2\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 2\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 2\sqrt{3} & 0 \end{array}\right)$$

Matrice diagonale a blocchi hermitiana

La matrice associata a $3S_z^2 - S^2$ è diagonale pari a

$$\hbar^2 \,\mathrm{diag}\Big[\underbrace{3\left(\tfrac{3}{2}\right)^2 - \tfrac{15}{4}}_{S_z = 3/2}, \underbrace{3\left(-\tfrac{1}{2}\right)^2 - \tfrac{15}{4}}_{S_z = -1/2}, \underbrace{3\left(-\tfrac{3}{2}\right)^2 - \tfrac{15}{4}}_{S_z = -3/2}, \underbrace{3\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 - \tfrac{15}{4}}_{S_z = 1/2}\Big]$$

$$= \hbar^2 (3, -3, 3, -3)$$

Quindi

$$H = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} \qquad \text{con} \qquad P = \hbar^2 \begin{pmatrix} 3A & 2\sqrt{3}B \\ 2\sqrt{3}B & -3A \end{pmatrix}$$

I due blocchi sono uguali per l'ordinamento scelto. Nella base $|\frac{3}{2}\rangle, |-\frac{1}{2}\rangle, |\frac{1}{2}\rangle, |-\frac{3}{2}\rangle$ avremmo

$$H = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P' \end{pmatrix} \qquad \text{con} \qquad P' = \hbar^2 \begin{pmatrix} -3A & 2\sqrt{3}B \\ 2\sqrt{3}B & +3A \end{pmatrix}$$

P e P' hanno gli stessi autovalori

Se (a_1, b_1) e (a_2, b_2) sono autovett. di P con autovalore λ_1 e λ_2, rispettivamente, gli autovettori di H sono

$(a_1, b_1, 0, 0)$ autovalore λ_1
$(a_2, b_2, 0, 0)$ λ_2
$(0, 0, a_1, b_1)$ λ_1
$(0, 0, a_2, b_2)$ λ_2

Gli autovalori λ_1 e λ_2 sono 2 volte degeneri

Autovalori di $P/\hbar^2$

$$\left(\frac{P}{\hbar^2} - \lambda I\right) = \begin{pmatrix} 3A-\lambda & 2\sqrt{3}B \\ 2\sqrt{3}B & -3A-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det\left(\frac{P}{\hbar^2} - \lambda I\right) = (3A-\lambda)(-3A-\lambda) - 12B^2$$
$$= -9A^2 + \lambda^2 - 12B^2 \qquad \lambda = \pm\sqrt{9A^2+12B^2}$$

$$E = \begin{cases} +\hbar^2\sqrt{9A^2+12B^2} & \text{deg. } 2 \\ -\hbar^2\sqrt{9A^2+12B^2} & \text{deg. } 2 \end{cases}$$

d) Se $B = \sqrt{3}/2\, A$ $\qquad \lambda = \pm 3\sqrt{2}A$

$$P = \hbar^2 \begin{pmatrix} 3A & 3A \\ 3A & -3A \end{pmatrix}$$

Autovettori:

- $\lambda = +3\sqrt{2}A$

$$\begin{pmatrix} 3A & 3A \\ 3A & -3A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 3\sqrt{2}A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} Aa + Ab = \sqrt{2}aA \\ Aa - Ab = \sqrt{2}bA \end{cases} \qquad \begin{cases} a+b = \sqrt{2}a \\ a-b = \sqrt{2}b \end{cases} \qquad b = (\sqrt{2}-1)a$$

$$v = (a, (\sqrt{2}-1)a)$$

$$\langle v|v\rangle = |a|^2 + (3-2\sqrt{2})|a|^2 = 1 \Rightarrow |a| = \frac{1}{(4-2\sqrt{2})^{1/2}}$$

Quindi

$$|v\rangle = \left(\frac{1}{(4-2\sqrt{2})^{1/2}}, \frac{\sqrt{2}-1}{(4-2\sqrt{2})^{1/2}}\right)$$

$\lambda = -3\sqrt{2}A$

$$\begin{pmatrix} 3A & 3A \\ 3A & -3A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = -3\sqrt{2}A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a+b = -\sqrt{2}a \\ a-b = -\sqrt{2}b \end{cases} \qquad a = (1-\sqrt{2})b$$

$$|v\rangle = \left((1-\sqrt{2})b, b\right)$$

$$\langle v|v\rangle = (4-2\sqrt{2})|b|^2 \qquad |b| = \frac{1}{(4-2\sqrt{2})^{1/2}}$$

$$|v\rangle = \left(-\frac{\sqrt{2}-1}{(4-2\sqrt{2})^{1/2}}, \frac{1}{(4-2\sqrt{2})^{1/2}}\right)$$

Per comodità definiamo $\begin{cases} p = \dfrac{1}{(4-2\sqrt{2})^{1/2}} \\ q = \dfrac{\sqrt{2}-1}{(4-2\sqrt{2})^{1/2}} \end{cases}$ $\quad p^2+q^2=1$

Quindi

$\lambda = +3\sqrt{2}A \longrightarrow v_+ = (p, q)$

$\lambda = -3\sqrt{2}A \longrightarrow v_- = (-q, p)$

L'ortogonalità dei due autovettori è ovvia con queste notazioni

Quindi

$E = 3\hbar^2\sqrt{2}A$ autovett. $\begin{cases} p|\frac{3}{2}\rangle + q|-\frac{1}{2}\rangle \\ p|-\frac{3}{2}\rangle + q|\frac{1}{2}\rangle \end{cases}$

$E = -3\hbar^2\sqrt{2}A$ autovett. $\begin{cases} -q|\frac{3}{2}\rangle + p|-\frac{1}{2}\rangle \\ -q|-\frac{3}{2}\rangle + p|\frac{1}{2}\rangle \end{cases}$

e)

Al tempo $t=0$ $|\psi\rangle = |\frac{3}{2}\rangle$

Se $|E_+\rangle = p|\frac{3}{2}\rangle + q|-\frac{1}{2}\rangle$ $E_\pm = \pm 3\hbar^2\sqrt{2}A$

$|E_-\rangle = -q|\frac{3}{2}\rangle + p|-\frac{1}{2}\rangle$

$$|\psi\rangle = |E_+\rangle\langle E_+|\psi\rangle + |E_-\rangle\langle E_-|\psi\rangle$$

$$= p|E_+\rangle - q|E_-\rangle$$

Le misure di energia non dipendono da t. Quindi non è necessario considerare l'evoluzione temporale

$$P(E=E_+) = p^2 = \frac{1}{4-2\sqrt{2}} = \frac{4+2\sqrt{2}}{16-8} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$P(E=E_-) = q^2 = \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{4-2\sqrt{2}} = (3-2\sqrt{2})\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

$$= \frac{3}{2} - \sqrt{2} + \frac{3\sqrt{2}}{4} - 1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}$$

CHECK: $P(E=E_+) + P(E=E_-) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} = 1$ OK

Esercizio 2

a)

Le autofunzioni di L_z sono $|m\rangle$ $\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} = f_m(\varphi)\right)$ con ~~...~~ $m \in \mathbb{Z}$. Per il principio di Pauli vogliamo una base che sia (anti)simmetrica sotto scambio. Definiamo le funzioni spaziali $(m_1 \neq m_2)$

$$|m_1, m_2\rangle_S = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|m_1\rangle_1 |m_2\rangle_2 + |m_2\rangle_1 |m_1\rangle_2\right)$$

$$\xrightarrow{R.S.} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{2\pi}\left(e^{im_1\varphi_1} e^{im_2\varphi_2} + e^{im_2\varphi_1} e^{im_1\varphi_2}\right)$$

$$|m_1, m_2\rangle_A = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|m_1\rangle_1 |m_2\rangle_2 - |m_2\rangle_1 |m_1\rangle_2\right)$$

$$\xrightarrow{R.S.} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{2\pi}\left(e^{im_1\varphi_1} e^{im_2\varphi_2} - e^{im_2\varphi_1} e^{im_1\varphi_2}\right)$$

Per $m_1 = m_2 = m$ vi è solo la combinazione simmetrica

$$|m\, m\rangle_S = |m\rangle_1 |m\rangle_2 \xrightarrow{R.S.} \frac{1}{2\pi} e^{im(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

Per il principio di pauli

funzione spat. simm $\Longrightarrow$ $S = 0$

antisimm $\Longrightarrow$ $S = 1$

Quindi una base per H_0 è

$$\left.\begin{array}{l} |m_1\, m_2\rangle_S\, |S=0\rangle \\ |m_1\, m_2\rangle_A\, |S=1, S_z\rangle \end{array}\right\} \begin{array}{c} m_1 \neq m_2 \\ (m_1 > m_2) \end{array} \quad \begin{array}{l} E = \frac{\hbar^2}{2mR^2}(m_1^2 + m_2^2) \\ E = \frac{\hbar^2}{2mR^2}(m_1^2 + m_2^2) \end{array}$$

$$|m_1\, m_1\rangle_S\, |S=0\rangle \qquad E = \frac{\hbar^2}{2mR^2}(m_1^2 + m_1^2)$$

["stessa" segni (e fasi) non sono rilevanti] ← $|m_1\, m_2\rangle_{S,A}$ e $|m_2\, m_1\rangle_{S,A}$ sono la "stessa" funzione e quindi possiamo assumere $m_1 > m_2$

La base precedente non è formata da autofunzioni di Π. Notiamo che

$$\Pi\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im\varphi}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-im\varphi}$$

$$\Pi|m\rangle = |-m\rangle$$

Quindi

$$\Pi|m_1,m_2\rangle_{S,A} = |-m_1,-m_2\rangle_{S,A}$$

Una base formata da autofunzioni di H_0 e Π è quindi

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|m_1\, m_2\rangle_S + |-m_1\, -m_2\rangle_S\right)|S=0\rangle \quad \text{autoval. di } \Pi = +1$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|m_1\, m_2\rangle_S - |-m_1\, -m_2\rangle_S\right)|S=0\rangle \quad \text{autoval di } \Pi = -1$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|m_1\, m_2\rangle_A \pm |-m_1\, -m_2\rangle_A\right)|S=1, S_z\rangle = \begin{cases} + & \text{autoval } \Pi=+1 \\ - & \text{autoval } \Pi=-1\end{cases}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|m\, m\rangle_S \pm |-m\, -m\rangle_S\right)|S=0\rangle \quad \begin{cases} + & \text{autoval } \Pi=+1 \\ - & \Pi=-1\end{cases}$$

PRIMI TRE LIVELLI

1) stato fond. $m_1=m_2=0$ $\qquad E=0$

$|0\,0\rangle_S|S=0\rangle$ non degenere

2) I eccitato : $|m_1|=0$ $m_2=0$ e viceversa

$$\begin{cases} |1\,0\rangle_S|S=0\rangle \\ |1\,0\rangle_A|S=1, S_z\rangle \\ |-1\,0\rangle_S|S=0\rangle \\ |-1\,0\rangle_A|S=1\; S_z\rangle \end{cases} \qquad \text{deg : } 1+3+1+3=8 \qquad E=\frac{\hbar^2}{2mR^2}$$

3) II eccitato $|m_1| = |m_2| = 1$

$|1\,1\rangle_S\,|S=0\rangle$

$|-1\,-1\rangle_S\,|S=0\rangle$

$|1\,-1\rangle_S\,|S=0\rangle$ deg : $1+1+1+3=6$

$|1\,-1\rangle_A\,|S=1, S_z\rangle$ $E = \frac{\hbar^2}{mR^2}$

b)

$$H_{spin} = \gamma \bar{S}_1 \cdot \bar{S}_2 = \frac{\gamma}{2}(S^2 - S_1^2 - S_2^2)$$

$$= \frac{\gamma}{2}\left(S^2 - \frac{3}{4}\hbar^2 - \frac{3}{4}\hbar^2\right) = \begin{cases} \frac{\gamma}{2}\hbar^2\left(2-\frac{3}{2}\right) = \frac{\gamma\hbar^2}{4} & S=1 \\ \frac{\gamma}{2}\hbar^2\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{3\gamma\hbar^2}{4} & S=0 \end{cases}$$

La presenza di H_{spin} separa il primo livello eccitato di H_0 in due livelli che dipendono da S

Quindi

1) stato fond.

$|0\,0\rangle_S\,|S=0\rangle$ $E = -\frac{3}{4}\gamma\hbar^2$ non deg.

2) I eccitato

$|1\,0\rangle_S\,|S=0\rangle$ $E = \frac{\hbar^2}{2mR^2} - \frac{3}{4}\gamma\hbar^2$ deg = 2

$|-1\,0\rangle_S\,|S=0\rangle$

3) II eccitato

$|1\,0\rangle_A\,|S=1 S_z\rangle$ $E = \frac{\hbar^2}{2mR^2} + \frac{1}{4}\gamma\hbar^2$ deg = 6

$|-1\,0\rangle_A\,|S=1\,S_z\rangle$

Il livello successivo ha

$E = \frac{\hbar^2}{mR^2} - \frac{3}{4}\gamma\hbar^2$ [stati S=0 relativi al II livello eccitato di H_0]

c) Riscriviamo lo stato in termini di autostati (10)
$|S\ S_z\rangle$ dello spin totale

$$|1\ 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_1 |-\rangle_2 + |-\rangle_1 |+\rangle_2\right)$$

$$|0\ 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+1\rangle_1 |-\rangle_2 - |-1\rangle_1 |+\rangle_2\right)$$

$$|+\rangle_1 |-1\rangle_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\,0\rangle + |0\,0\rangle\right)$$

$$|-\rangle_1 |+1\rangle_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\,0\rangle - |0\,0\rangle\right)$$

Quindi

$$\Phi = f\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1 0\rangle + |0 0\rangle\right) + g\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1 0\rangle - |0 0\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(f+g)|1\,0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}(f-g)|0\,0\rangle$$

Da questa espressione si vede che Φ è combinazione di ~~livelli~~ stati con $S_z = 0$.
Notiamo ora che gli stati con $|m_1| = |m_2| = 1$ e $S=0$ (3 livello eccitato di H) hanno energia

$$E_{3ecc} = \frac{\hbar^2}{mR^2} - \frac{3}{4}\gamma\hbar^2 = \frac{\hbar^2}{mR^2}\left(1 - \frac{3}{4}\gamma m R^2\right)$$

Ora $\gamma m R^2 < \frac{1}{2}$, $-\gamma m R^2 > -\frac{1}{2}$

$$E_{3ecc} > \frac{\hbar^2}{mR^2}\left(1 + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{5}{8}\frac{\hbar^2}{mR^2}$$

La condizione e) implica quindi che gli unici stati rilevanti sono quelli relativi ai primi tre livelli di H.

Una misura di L_z sullo stato fondamentale fornisce $L_z = 0$, una misura di L_z sul I e II eccitato fornisce $L_z = 1$ oppure $L_z = -1$.
Quindi, la condizione ii) esclude lo stato fondamentale. La condizione iii) richiede che gli stati siano pari sotto Π. Tenuto conto che $S_z = 0$, vi sono solo due stati

$$\text{I ecc} \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\,0\rangle_S + |-1\,0\rangle_S\right)|S=0\rangle$$

$$\text{II ecc} \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\,0\rangle_A + |-1\,0\rangle_A\right)|S=1,\, S_z=0\rangle$$

Per semplicità riscriviamo i due stati come

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\,0\rangle_S + |-1\,0\rangle_S\right), \quad \text{I ecc} \Longrightarrow |\psi_1\rangle|S=0\rangle$$

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\,0\rangle_A + |-1\,0\rangle_A\right), \quad \text{II ecc} \Longrightarrow |\psi_2\rangle|1\,0\rangle$$

<u>NOTARE</u>: Siamo sempre stati attenti nel definire combinazioni normalizzate:

$$\langle\psi_1|\psi_1\rangle = \langle\psi_2|\psi_2\rangle = 1$$

Quindi i) + ii) + iii) + (forma data di ψ) implicano

$$|\Psi\rangle = A|\psi_1\rangle|0\,0\rangle + B|\psi_2\rangle|1,0\rangle$$

dove A e B sono da determinare utilizzando iv) e v).

iv)

$$\begin{cases} \hbar^2 = \langle \Psi | S^2 | \Psi \rangle = |B|^2 2\hbar^2 \\ \text{(v)} \\ 1 = \langle \Psi | \Psi \rangle = |A|^2 + |B|^2 \end{cases} \longrightarrow \quad |A| = |B| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Quindi, con opportuna scelta di fase

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\psi_1\rangle |0 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\alpha} |\psi_2\rangle |1 0\rangle$$

con α fase arbitraria.

Confrontando

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|f\rangle - |g\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} |\psi_1\rangle$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|f\rangle + |g\rangle) = \frac{e^{i\alpha}}{\sqrt{2}} |\psi_2\rangle$$

$$\begin{cases} |f\rangle = \frac{1}{2}(|\psi_1\rangle + e^{i\alpha} |\psi_2\rangle) \\ |g\rangle = \frac{1}{2}(e^{i\alpha} |\psi_2\rangle - |\psi_1\rangle) \end{cases}$$

In rappresentazione di Schrödinger

$$\frac{1}{2}(e^{i\alpha} |\psi_2\rangle \pm |\psi_1\rangle) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(e^{i\alpha}(|1\,0\rangle_A + |-1\,0\rangle_A) \pm (|1\,0\rangle_S + |-1\,0\rangle_S) \right)$$

$$= \frac{1}{4} \Big[e^{i\alpha}(|1 0\rangle - |0 1\rangle + |-1\,0\rangle - |0\,-1\rangle)$$

$$\pm \cancel{e^{i\alpha}} (|1 0\rangle + |0 1\rangle + |-1\,0\rangle + |0\,-1\rangle) \Big]$$

$$= \frac{1}{4}\Big[(e^{i\alpha} \pm 1)\big(|1\,0\rangle + |-1\,0\rangle\big) + (-e^{i\alpha} \pm 1)\big(|0\,1\rangle + |0\,-1\rangle\big)\Big]$$

In R.S. abbiamo

$$|1\,0\rangle + |-1\,0\rangle \xrightarrow{RS} \frac{1}{2\pi}\left(e^{i\varphi_1} + e^{-i\varphi_1}\right) = \frac{1}{\pi}\cos\varphi_1$$

$$|0\,1\rangle + |0\,-1\rangle \xrightarrow{RS} \frac{1}{\pi}\cos\varphi_2$$

Quindi in RS.

$$\frac{1}{2}\left(e^{i\alpha}|\psi_2\rangle \pm |\psi_1\rangle\right) \to \frac{1}{4\pi}\Big[(e^{i\alpha} \pm 1)\cos\varphi_1 + (-e^{i\alpha} \pm 1)\cos\varphi_2\Big]$$

$$f(\phi_1, \phi_2) = \frac{1}{4\pi}\Big[(e^{i\alpha} + 1)\cos\varphi_1 + (1 - e^{i\alpha})\cos\varphi_2\Big]$$

$$g(\phi_1, \phi_2) = \frac{1}{4\pi}\Big[(e^{i\alpha} - 1)\cos\varphi_1 - (1 + e^{i\alpha})\cos\varphi_2\Big]$$

d)

$$H|\psi_1\rangle|0\,0\rangle = \left(\frac{\hbar^2}{2mR^2} - \frac{3}{4}\gamma\hbar^2\right)|\psi_1\rangle|0\,0\rangle$$

$$H|\psi_2\rangle|1\,0\rangle = \left(\frac{\hbar^2}{2mR^2} + \frac{1}{4}\gamma\hbar^2\right)|\psi_2\rangle|1\,0\rangle$$

$$\langle\psi|H|\psi\rangle = \frac{1}{2}\left(\frac{\hbar^2}{2mR^2} - \frac{3}{4}\gamma\hbar^2\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\hbar^2}{2mR^2} + \frac{1}{4}\gamma\hbar^2\right)$$

$$= \frac{\hbar^2}{2mR^2} + \left(-\frac{3}{8} + \frac{1}{8}\right)\gamma\hbar^2 = \frac{\hbar^2}{2mR^2} - \frac{1}{4}\gamma\hbar^2$$

Esame di Meccanica Quantistica, 12/09/2023

Esercizio 1. La Hamiltoniana che descrive la dinamica di una particella di massa m e spin 1/2 è la seguente:

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\mathbf{r}^2 + A\,\frac{2\omega}{\hbar}\mathbf{L}\cdot\mathbf{S} + B\,\omega(L_z + 2S_z)$$

dove i parametri adimensionali sono tali che $0 < A \ll 1$ e $0 \leq B \ll 1$.

a) Si assuma $B = 0$. Si determini lo spettro di H. In particolare si indichi la degenerazione e una base di autoket per ogni livello energetico tale che l'energia sia $E < 4\hbar\omega$.

b) Si assuma ora $0 < B \ll A$. Utilizzando la teoria delle perturbazioni, si studi al primo ordine nel parametro B la correzione ai primi due livelli energetici trovati al punto precedente. Si discuta l'eventuale rimozione delle degenerazione.

c) Si assuma $B = 0$. Ad un certo istante, la particella si trova nello stato quantistico $|\psi\rangle$ tale che: (i) una misura di H fornisce con certezza un valore $E < 4\hbar\omega$; (ii) $|\psi\rangle$ è autostato della parità con autovalore -1; (iii) le misure di J_z e S_z forniscono entrambe con certezza il valore $\hbar/2$. Si determini lo stato normalizzato $|\psi\rangle$.
Se viene effettuata una misura di J^2 su $|\psi\rangle$, quali valori si ottengono e con quale probabilità?

d) Si assuma sempre $B = 0$. Se al tempo $t = 0$ la particella si trova nello stato $|\psi\rangle$, si calcoli l'evoluto temporale $|\psi(t)\rangle$ al tempo t. Si calcolino i valori medi di H, J^2 ed L^2 al tempo t. Si spieghi se l'eventuale dipendenza o indipendenza da t poteva essere predetta a priori.

Esercizio 2. Due particelle identiche di massa m e spin 1 si muovono in una dimensione con Hamiltoniana $H = p_1^2/(2m) + p_2^2/(2m) + V(x_1, x_2)$,

$$V(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 & \text{per} \quad |x_1 - x_2| \geq L \\ \dfrac{\alpha}{4}\left[S^2 - \dfrac{1}{2}(S_1^2 + S_2^2)\right] & \text{per} \quad |x_1 - x_2| < L \end{cases}$$

dove $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2$ indica lo spin totale e $\alpha > 0$. Si studi il problema nel sistema del centro di massa.

1) Si determinino le dimensioni del coefficiente α in unità di massa, lunghezza, tempo. Posto $\alpha = C\,\hbar^a L^b m^c$, dove C è un coefficiente adimensionale, si determinino a, b, c.

2) Per tutti i possibili valori dello spin totale, si disegni il potenziale in termini di $x = x_1 - x_2$. Per quali valori dello spin totale sono possibili stati legati?

3) Si calcoli il valore massimo $C_{\max}$ della costante C per cui il sistema ammette un solo stato legato.

Esercizio 1

Per $B=0$ l'Hamiltoniana è la somma della Hamiltoniane dell'oscillatore isotropo in 3D e di

$$H_{spin} = \frac{2\omega A}{\hbar}\,\bar{L}\cdot\bar{S} = \frac{\omega A}{\hbar}\left(J^2 - L^2 - S^2\right) \qquad \bar{J} = \bar{L} + \bar{S}$$

Lo spettro di H_{osc} nella base in cui sono diagonali L^2 e L_z è dato da [le degenerazioni NON includono lo spin]

$n=0 \quad E = \frac{3}{2}\hbar\omega$ stato con $L = L_z = 0$ non deg.

$n=1 \quad E = \frac{5}{2}\hbar\omega$ stati con $L=1$, $L_z = \pm1, 0$ deg. 3

$n=2 \quad E = \frac{7}{2}\hbar\omega$ stati con $\begin{cases} L=2 & L_z = \pm2, \pm1, 0 \\ L=0 & L_z = 0 \end{cases}$ deg. 6

Gli stati successivi hanno $E > 4\hbar\omega$

Aggiungendo il termine di spin abbiamo

- stato $n=0 \quad L=0 \Longrightarrow J = 1/2$

$$E_{spin} = \frac{\omega A}{\hbar}\hbar^2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2} - 0 - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\right) = 0 \Longrightarrow E = \frac{3}{2}\hbar\omega \quad \text{deg. } 2 \; \left(J_z = \pm\tfrac{1}{2}\right)$$

- stati $n=1 \quad L=1$. Due possibilità: $J = 3/2$, $J = 1/2$

Se $J = 3/2$
$$E_{spin} = \frac{\omega A}{\hbar}\hbar^2\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2} - 1\cdot 2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\right) = \hbar\omega A\left(\frac{15}{4} - 2 - \frac{3}{4}\right) = A\hbar\omega$$

Se $J = 1/2$
$$E_{spin} = \frac{\omega A}{\hbar}\hbar^2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2} - 1\cdot 2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\right) = -2A\hbar\omega$$

Quindi il livello $n=1$ si separa in

$E = \frac{5}{2}\hbar\omega - 2A\hbar\omega \quad J = 1/2 \quad J_z = \pm 1/2$ deg 2

$E = \frac{5}{2}\hbar\omega + A\hbar\omega \quad J = 3/2 \quad J_z = \pm\frac{3}{2}, \pm 1/2$ deg. 4

• livello $n=2$ stati con $L=2$: $J = \begin{cases} 5/2 \\ 3/2 \end{cases}$

Se $J=\frac{5}{2}$ $\quad E_{spin} = \frac{\omega A}{\hbar} \hbar^2 \left[\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2} - 2\cdot 3 - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\right] = 2A\hbar\omega$

Se $J=\frac{3}{2}$ $\quad E_{spin} = \frac{\omega A}{\hbar} \hbar^2 \left[\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2} - 2\cdot 3 - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\right] = -3A\hbar\omega$

stato con $L=0$ $\quad J=1/2$ $\quad E_{spin}=0$

Quindi il livello si separa in

$E = \frac{7}{2}\hbar\omega - 3A\hbar\omega$ $\quad J=3/2$ $\quad L=2$ $\quad J_z = \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{1}{2}$; deg 4

$E = \frac{7}{2}\hbar\omega$ $\quad J=1/2$ $\quad L=0$ $\quad J_z = \pm\frac{1}{2}$ $\quad$ deg. 2

$E = \frac{7}{2}\hbar\omega + 2A\hbar\omega$ $\quad J=\frac{5}{2}$ $\quad L=2$ $\quad J_z = \pm\frac{5}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{1}{2}$ $\quad$ deg 6

Autoket. Base $\quad |n\ l\ J\ J_z\rangle$

$\uparrow$ oscill armonico

$E = \frac{3}{2}\hbar\omega$ $\quad |0\ 0\ \frac{1}{2}\ J_z\rangle$ $\quad J_z = \pm 1/2$ $\quad$ deg. 2

$E = \frac{5}{2}\hbar\omega - 2A\hbar\omega$ $\quad |1\ 1\ \frac{1}{2}\ J_z\rangle$ $\quad J_z = \pm\frac{1}{2}$ $\quad$ deg. 2

$E = \frac{5}{2}\hbar\omega + A\hbar\omega$ $\quad |1\ 1\ \frac{3}{2}\ J_z\rangle$ $\quad J_z = \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{1}{2}$ $\quad$ deg. 4

$E = \frac{7}{2}\hbar\omega - 3A\hbar\omega$ $\quad |2\ 2\ \frac{3}{2}\ J_z\rangle$ $\quad J_z = \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{1}{2}$ $\quad$ deg 4

$E = \frac{7}{2}\hbar\omega$ $\quad |2\ 0\ \frac{1}{2}\ J_z\rangle$ $\quad J_z = \pm\frac{1}{2}$ $\quad$ deg. 2

$E = \frac{7}{2}\hbar\omega + 2A\hbar\omega$ $\quad |2\ 2\ \frac{5}{2}\ J_z\rangle$ $\quad J_z = \pm\frac{5}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{1}{2}$ $\quad$ deg. 6

b)

Notiamo che la perturbazione commuta con J_z.
Si ricordi che se $[A, J_z]=0$ (A ogni operatore)
nella base $|J\, J_z\rangle$ abbiamo

$$\langle J' J_z' | [A, J_z] | J\, J_z \rangle = 0$$

$$(J_z - J_z') \langle J' J_z' | A | J\, J_z \rangle = 0$$

che implica $\langle J' J_z' | A | J\, J_z \rangle = 0$ se $J_z' \neq J_z$

SONO NON NULLI <u>SOLO</u> GLI ELEMENTI DIAGONALI

- Stato fondamentale

Abbiamo $\overset{n\ \ell\ J}{|0\ 0\ \tfrac{1}{2}\ J_z\rangle} = \overset{n\ \ell\ \ell_z}{|0\ 0\ 0\rangle} \overset{s\ s_z}{|\tfrac{1}{2}\ J_z\rangle}$

Quindi

$$\langle 0\, 0\, \tfrac{1}{2}\, J_z | L_z + 2S_z | 0\, 0\, \tfrac{1}{2}\, J_z \rangle = 0 + 2\hbar J_z \begin{cases} \hbar & J_z = 1/2 \\ -\hbar & J_z = -1/2 \end{cases}$$

Quindi la matrice della perturbazione è

$$B\omega \begin{pmatrix} \hbar & 0 \\ 0 & -\hbar \end{pmatrix} \longrightarrow$$ Il livello si separa in

$$E = \begin{cases} \frac{3}{2}\hbar\omega - B\hbar\omega & J_z = -1/2 \\ \frac{3}{2}\hbar\omega + B\hbar\omega & J_z = 1/2 \end{cases}$$

- Primo stato eccitato

Si tratta di stati con $L=1$ $J=1/2$. Vogliamo passare dalla base

$$|\underset{n=1}{n}\ \underset{\ell=1}{\ell}\ J\ J_z\rangle \longrightarrow |\underset{n=1}{n}\ \underset{\ell=1}{\ell}\ \ell_z\rangle_L\, |\underset{s=1/2}{s}\ S_z\rangle_S$$

Scriviamo per semplicità $|1\,1\,\ell_z\rangle|\tfrac{1}{2}\, s_z\rangle = |\ell_z\, s_z\rangle_{LS}$

Dalle tavole CG $1 \times 1/2$

$$\begin{cases} |1\,1\,\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\rangle = \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,|1\, -\tfrac{1}{2}\rangle_{LS} - \sqrt{\tfrac{1}{3}}\,|0\,\tfrac{1}{2}\rangle_{LS} \\ |1\,1\,\tfrac{1}{2}\, -\tfrac{1}{2}\rangle = \sqrt{\tfrac{1}{3}}\,|0\, -\tfrac{1}{2}\rangle_{LS} - \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,|-1\,\tfrac{1}{2}\rangle_{LS} \end{cases}$$

Quindi

$$(L_z+2S_z)\,|1\;1\;\tfrac{1}{2}\;\tfrac{1}{2}\rangle = \hbar\left(-\sqrt{\tfrac{1}{3}}\right)|0\;\tfrac{1}{2}\rangle_{LS}$$

$$(L_z+2S_z)\,|1\;1\;\tfrac{1}{2}\;-\tfrac{1}{2}\rangle = \hbar\left(-\sqrt{\tfrac{1}{3}}\right)|0\;-\tfrac{1}{2}\rangle_{LS}$$

$$\langle 1\;1\;\tfrac{1}{2}\;\tfrac{1}{2}|(L_z+2S_z)|1\;1\;\tfrac{1}{2}\;\tfrac{1}{2}\rangle = -\hbar\sqrt{\tfrac{1}{3}}\left(-\sqrt{\tfrac{1}{3}}\right) = \frac{\hbar}{3}$$

$$\langle 1\;1\;\tfrac{1}{2}\;-\tfrac{1}{2}|(L_z+2S_z)|1\;1\;\tfrac{1}{2}\;-\tfrac{1}{2}\rangle = -\hbar\sqrt{\tfrac{1}{3}}\sqrt{\tfrac{1}{3}} = -\frac{\hbar}{3}$$

Quindi la matrice della perturbazione è

$$B\omega\begin{pmatrix}\hbar/3 & 0\\ 0 & -\hbar/3\end{pmatrix}$$

Il livello si separa $E = \frac{5}{2}\hbar\omega - 2A\hbar\omega \begin{cases} +\frac{1}{3}B\hbar\omega \\ -\frac{1}{3}B\hbar\omega\end{cases}$

c)

La condizione i) implica che lo stato è combinazione lineare dei livelli con $n \leq 2$

Per applicare la condizione ii) ricordiamo che gli stati con $\begin{cases} n \text{ pari sono pari sotto parità} \\ n \text{ dispari sono dispari sotto parità}\end{cases}$

Quindi sono da considerare solo gli stati con $n=1$

La condizione iii) implica $L_z = J_z - S_z = 0$ con certezza.

Quindi

$$\begin{array}{ccccc} & n\;\ell\;\ell_z & & s\;\;s_z & \\ |\psi\rangle = & |1\;1\;0\rangle & & |\tfrac{1}{2}\;\tfrac{1}{2}\rangle & \end{array}$$

Per determinare i valori misurabili di J^2 passiamo alla base $|n\;\ell\;j\;j_z\rangle$. Tavole CG $1\times\frac{1}{2}$:

$$|\psi\rangle = \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,|1\;1\;\tfrac{3}{2}\;\tfrac{1}{2}\rangle - \sqrt{\tfrac{1}{3}}\,|1\;1\;\tfrac{1}{2}\;\tfrac{1}{2}\rangle$$

Quindi i valori misurabili sono

$$J = 3/2 \qquad J^2 = \frac{15}{4}\hbar^2 \quad e \quad J = \frac{1}{2} \qquad J^2 = \frac{3}{4}\hbar^2$$

$$\text{Prob}\left(J^2 = \frac{15}{4}\hbar^2\right) = \frac{2}{3} \qquad \text{Prob}\left(J^2 = \frac{3}{4}\hbar^2\right) = \frac{1}{3}$$

d)

Energie di $|1\ 1\ \frac{3}{2}\ \frac{1}{2}>$ $\quad E_{3/2} = \frac{5}{2}\hbar\omega + A\hbar\omega$

$|1\ 1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}>$ $\quad E_{1/2} = \frac{5}{2}\hbar\omega - 2A\hbar\omega$

$$|\psi(t)> = \sqrt{\frac{2}{3}}\, e^{-iE_{3/2}t/\hbar}\, |1\ 1\ \tfrac{3}{2}\ \tfrac{1}{2}> - \sqrt{\frac{1}{3}}\, e^{-iE_{1/2}t/\hbar}\, |1\ 1\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}>$$

divido per $e^{-iE_{3/2}t/h}$ $=$

$$\sqrt{\frac{2}{3}}\, |1\ 1\ \tfrac{3}{2}\ \tfrac{1}{2}> - \sqrt{\frac{1}{3}}\, e^{3iA\omega t}\, |1\ 1\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}>$$

Gli operatori H, J^2, L^2 commutano con H. Quindi i valori medi non dipendono da t.

$$<\psi(t)|H|\psi(t)> = \frac{2}{3}E_{3/2} + \frac{1}{3}E_{1/2} = \frac{2}{3}\left(\frac{5}{2}\hbar\omega + A\hbar\omega\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{5}{2}\hbar\omega - 2A\hbar\omega\right)$$

$$= \frac{5}{2}\hbar\omega$$

$$<\psi(t)|J^2|\psi(t)> = \frac{2}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}\cdot\frac{5}{2}\hbar^2 + \frac{1}{\cancel{3}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\cancel{3}}{2}\hbar^2 =$$

$$= \hbar^2\left(\frac{5}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{11}{4}\hbar^2$$

$<\psi(t)|L^2|\psi(t)> = 2\hbar^2$ $\quad$ [$|\psi>$ è autostato di L^2]

Esercizio 2

1) $H \sim \alpha S^2 \implies [E] = [\alpha][S]^2$

$$[E] = [ML^2T^{-2}] \qquad [S] = [\hbar] = [ML^2T^{-1}]$$

$$[\alpha] = [E][S^{-2}] = [ML^2\cancel{T^{-2}}M^{-2}L^{-4}\cancel{T^2}] = [M^{-1}L^{-2}]$$

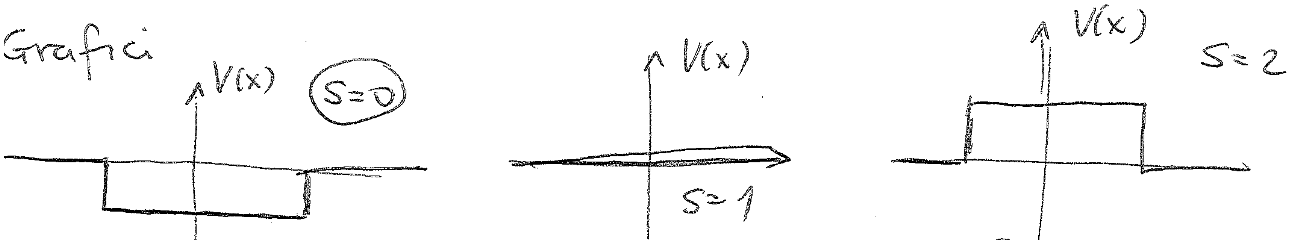
Quindi $\quad \alpha = \dfrac{c}{mL^2} \qquad [a = 0,\ b = -2,\ c = -1]$

2) Lo spin totale può assumere i valori $S = 0, 1, 2$.

Se $V_0 = \frac{\alpha}{4}\left[S^2 - \frac{1}{2}(S_1^2 + S_2^2)\right] = \frac{\alpha}{4}\left[S^2 - 2\hbar^2\right]$

$$V_0 = \begin{cases} -\hbar^2\alpha/2 & S=0 \\ 0 & S=1 \\ \hbar^2\alpha & S=2 \end{cases}$$

Grafici



Stati legati sono possibili <u>SOLO</u> per $S=0$.

3) Nel centro di massa (CM) è sufficiente considerare il moto relativo. Inoltre, dovendo considerare stati legati, dobbiamo porre $S=0$. Quindi gli stati legati hanno funzione d'onda

$$\psi_n(x) \underset{S\ \ S_z}{|0\ \ 0\rangle}$$

dove $\psi_n(x)$ sono autofunzioni di $H = \frac{p^2}{2\mu} + V(x)$

con $\mu = m/2$ massa ridotta e

$$V(x) = \begin{cases} 0 & |x| > L \\ -\frac{\hbar^2\alpha}{2} = -\frac{\hbar^2}{2}\frac{C}{mL^2} = -\frac{\hbar^2}{4\mu L^2} C & -L < x < L \end{cases}$$

Il principio di Pauli richiede che la funzione d'onda totale sia pari sotto scambio. Dato che $|0\,0\rangle$ è pari sotto scambio, anche $\psi_n(x)$ deve essere pari sotto $(x \to -x)$

Quindi dobbiamo determinare gli stati legati per una buca finita che sono simmetrici sotto parità.

Se $V_0 = +\frac{\hbar^2}{4\mu L^2} C$, l'energia dello stato legato è in $-V_0 < E < 0$

[NOTA: cambio di convenzione per V_0]

Per la soluzione seguiamo il Picasso

Per $x > L$ $\quad V(x) = 0$ per cui

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\psi'' = E\psi \qquad \lambda = \sqrt{-\frac{2\mu E}{\hbar^2}}$$

$$\psi'' = \lambda^2\psi \longrightarrow \psi = A e^{-\lambda x} + \cancel{B e^{\lambda x}} \rightarrow \text{non accettabile}$$

in $-L < x < L$, $V(x) = -V_0$ per cui

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\psi'' - V_0\psi = E\psi \qquad k = \sqrt{\frac{2\mu(V_0+E)}{\hbar^2}}$$

$$\psi'' + k^2\psi = 0 \qquad \psi = \underbrace{\cancel{C \sin kx}}_{\substack{\text{dispari} \\ \text{sotto } x \to -x}} + \underbrace{D \cos kx}_{\text{pari}}$$

Quindi

$$\psi(x) = \begin{cases} A e^{-\lambda x} & x > L \\ D \cos kx & -L < x < L \\ A e^{\lambda x} & x < -L \quad \text{(per parità)} \end{cases}$$

Condizioni di raccordo in $x = L$

$$\begin{cases} A e^{-\lambda L} = B \cos kL & \psi \text{ continua} \\ -\lambda A e^{-\lambda L} = B k \sin kL & \psi' \text{ continua} \end{cases}$$

Dividendo $\quad k \tan kL = \lambda$

Definiamo $\quad \eta = L\lambda$, $\xi = kL$ e notiamo

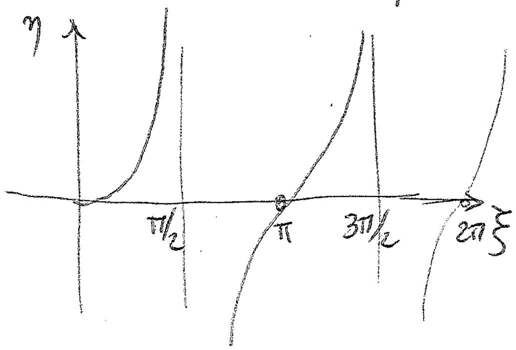
$$\xi^2 + \eta^2 = +\frac{2\mu(V_0+E)}{\hbar^2}L^2 - \frac{2\mu E}{\hbar^2}L^2 = \frac{2\mu V_0}{\hbar^2}L^2$$

$$= \frac{2\mu}{\hbar^2}L^2\frac{\hbar^2}{4\mu L^2}C = \frac{C}{2}$$

Quindi cerchiamo soluzioni di

$$\begin{cases} \eta = \xi \tan \xi \\ \xi^2 + \eta^2 = \frac{C}{2} = R^2 \end{cases} \qquad \text{in } \xi, \eta \geq 0$$

Grafico di $\eta = \xi \tan \xi$



1 stato legato per $R \leq \pi$

2 stati legati per $\pi \leq R < 2\pi$

ecc.

La condizione richiesta è $R \leq \pi$

$R^2 \leq \pi^2 \qquad \frac{C}{2} < \pi^2 \qquad C_{max} = 2\pi^2$

NOTA: Per la buca finita, vi è un solo stato legato per $R < \frac{\pi}{2}$. Infatti ad $R = \frac{\pi}{2}$ appare un secondo stato legato. Questo stato legato ha $\psi(x)$ dispari sotto $x \leftrightarrow -x$ e non è quindi ammesso per il principio di Pauli

Esame di Meccanica Quantistica, 31/10/2023

Esercizio 1. Si considerino due particelle identiche di spin 1/2 e massa m vincolate a muoversi in una dimensione sul segmento $-L/2 \leq x \leq L/2$. La Hamiltoniana è data da

$$H = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{\alpha}{\hbar}\boldsymbol{S}_1 \cdot \boldsymbol{S}_2,$$

dove $\boldsymbol{S}_1$ e $\boldsymbol{S}_2$ sono gli operatori di spin delle due particelle. Si assuma $mL^2\alpha \ll \hbar$ e $\alpha > 0$.

a) Si calcolino le energie e le degenerazioni dei primi 3 livelli.

b) Si consideri lo stato (normalizzato) dato da

$$\psi = N(4x_1^2 - L^2)(4x_2^2 - L^2)\chi_1,$$

dove x_1 ed x_2 sono le posizioni delle due particelle e χ_1 è uno spinore relativo alle due particelle. Si determinino χ_1 e la costante N.

c) Si calcoli $\langle\psi|H|\psi\rangle$.

d) Si calcoli la probabilità che una misura dell'energia dia come risultato l'energia dello stato fondamentale.

Possono essere utili gli integrali

$$I_n = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dx\, x^n \cos x, \qquad J_n = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dx\, x^n \sin x,$$

$I_1 = 0$, $I_2 = \frac{1}{2}(\pi^2 - 8)$, $I_3 = 0$, $I_4 = \frac{1}{8}(\pi^4 - 48\pi^2 + 384)$, $J_1 = 2$, $J_2 = 0$, $J_3 = \frac{3}{2}(\pi^2 - 8)$, $J_4 = 0$.

Esercizio 2. La Hamiltoniana che descrive la dinamica di una particella di massa m e spin 1 è la seguente:

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\mathbf{r}^2 + A\,\omega(L_z + 2S_z) + B\,\frac{2\omega}{\hbar}\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}$$

dove i parametri adimensionali sono tali che $0 < A \ll 1$ e $0 \leq B \ll 1$.

a) Si assuma $B = 0$. Si determini lo spettro di H. In particolare si indichi la degenerazione e una base di autoket per ogni livello energetico tale che l'energia sia $E < 3\hbar\omega$.

b) Si assuma ora $0 < B \ll A$. Utilizzando la teoria delle perturbazioni, si studi al primo ordine nel parametro B la correzione a tutti i livelli degeneri trovati al punto precedente. Si discuta l'eventuale rimozione delle degenerazione.

c) Si assuma $B = 0$. Ad un certo istante, la particella si trova nello stato quantistico $|\psi\rangle$ tale che:
(i) una misura di H fornisce con certezza un valore $E < 3\hbar\omega$;
(iii) $\langle\psi|S_z|\psi\rangle = -\hbar$;
(iii) una misura di L_z non fornisce mai un valore nullo.
Si scriva l'espressione più generale dgli stati quantistici che soddisfano le condizioni (i), (ii), (iii).

d) Tra gli stati determinati al punto c) si determini quello tale che $\langle\psi|L_x^2|\psi\rangle = 0$.

e) Se viene effettuata una misura di J^2 su $|\psi\rangle$, quali valori si ottengono e con quale probabilità?

① Domanda a)

Definiamo $\psi_n(x)$ come l'autofunzione della Hamiltoniana per una buca infinita con energia $E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m}$ $k_n = \frac{\pi n}{L}$. dove $n: 1, 2, 3, \ldots$

In assenza di spin, senza tenere conto di Pauli, lo spettro è

$E_f = 2E_1$ ~~~~ funz. d'onda $\psi_1(x_1)\psi_1(x_2) = \psi_{11}(x_1, x_2)$

$$E = E_1 + E_2 = 5E_1 \qquad \begin{cases} \psi_{12S}(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_1(x_1)\psi_2(x_2) + \psi_2(x_1)\psi_1(x_2)\right) \\ \psi_{12A}(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_1(x_1)\psi_2(x_2) - \psi_2(x_1)\psi_1(x_2)\right) \end{cases}$$

$E = 2E_2 = 8E_1$ $\quad \psi_{22}(x_1, x_2) = \psi_2(x_1)\psi_2(x_2)$

$\vdots$

La parte di spin può essere riscritta come

$$\frac{\alpha}{\hbar}\bar{S}_1 \cdot \bar{S}_2 = \frac{\alpha}{2\hbar}\left(S^2 - S_1^2 - S_2^2\right) = \frac{\alpha}{2\hbar}\left(S^2 - \frac{3}{2}\hbar^2\right) = \begin{cases} -\frac{3}{4}\hbar\alpha & S = 0 \\ \frac{1}{4}\hbar\alpha & S = 1 \end{cases}$$

Per trovare lo spettro, ricordiamo Pauli

- Se ψ spaziale è simmetrica $\Longrightarrow S = 0$
- Se ψ spaziale è antisimmetrica $\Longrightarrow S = 1$

Quindi

$E_f = 2E_1 - \frac{3}{4}\hbar\alpha$ $\quad \psi_{11}(x_1, x_2)|\overset{S}{0}\ \overset{S_z}{0}\rangle$ $\quad$ non degenere

$E = 5E_1 - \frac{3}{4}\hbar\alpha$ $\quad \psi_{12S}(x_1, x_2)|0\ 0\rangle$ $\quad$ non degenere

$E = 5E_1 + \frac{1}{4}\hbar\alpha$ $\quad \psi_{12A}(x_1, x_2)|1\ m\rangle$ $\quad$ degenerazione 3 $(m = +1, 0, -1)$

Domanda b)

Dato che la parte spaziale di ψ è simmetrica, $\chi = |\overset{S}{0}\ \overset{S_z}{0}\rangle$.

Per calcolare N determiniamo

$$\int_{-L/2}^{L/2} dx\,(4x^2-L^2)^2 = 2\int_{0}^{L/2} dx\,(4x^2-L^2)^2 \quad \text{(per simmetria)}$$

$$x=\frac{L}{2}y \qquad dx=\frac{L}{2}dy$$

$$= L\int_0^1 dy\, L^4\,(y^2-1)^2$$

$$= L^5\int_0^1 dy\,(y^4-2y^2+1) = L^5\left(\frac{1}{5}-\frac{2}{3}+1\right) = L^5\,\frac{3-10+15}{15} = \frac{8}{15}L^5$$

Se definiamo $\psi_0(x)=\sqrt{\frac{15}{8}}\,(4x^2-L^2)\frac{1}{L^{+5/2}}$

$$\psi = N\sqrt{\frac{8}{15}}L^{5/2}\,\psi_0(x_1)\sqrt{\frac{8}{15}}L^{5/2}\,\psi_0(x_2)\,\chi_1$$

$$= \frac{8}{15}L^5 N\,\psi_0(x_1)\psi_0(x_2)\,|0\;0\rangle$$

Dato che $\psi_0(x)$ è normalizzata, $\frac{8}{15}L^5N=1$ $\quad N=\frac{15}{8}L^{-5}$

$$\psi=\psi_0(x_1)\psi_0(x_2)\,|0\;0\rangle$$

c)

$H=H_0+H_{spin}$ $\qquad \langle\psi|H_{spin}|\psi\rangle = -\frac{3}{4}\hbar\alpha$

$\langle\psi|H_0|\psi\rangle = 2\langle\psi_0|\frac{p^2}{2m}|\psi_0\rangle$ [ciascun particella dà lo stesso contributo]

$$\frac{p^2}{2m}\psi_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\sqrt{\frac{15}{8}}\frac{1}{L^{5/2}}\cdot 8$$

$$\langle\psi_0|\frac{p^2}{2m}|\psi_0\rangle = -\frac{\hbar^2}{2m}\,8\left(\sqrt{\frac{15}{8}}\right)^2\frac{1}{L^5}\int_{-L/2}^{L/2}dx\,(4x^2-L^2) \qquad x=\frac{L}{2}y$$

$$= -\frac{15}{2}\frac{\hbar^2}{m}\frac{1}{L^5}\,2\,\frac{L}{2}L^2\int_0^1 dy\,(y^2-1)$$

$$= -\frac{15}{2}\frac{\hbar^2}{mL^2}\left(\frac{1}{3}-1\right) = 5\frac{\hbar^2}{mL^2} \qquad \langle\psi|H|\psi\rangle = \frac{10\hbar^2}{mL^2}-\frac{3}{4}\hbar\alpha$$

d)

Dobbiamo calcolare $|\langle\psi_f|\psi\rangle|^2 = |\langle\psi_1|\psi_0\rangle|^4$

ψ_1 è lo stato fondamentale della buca
ψ_0 è la funzione definita sopra

$$\langle \psi_1 | \psi_0 \rangle = \sqrt{\frac{2}{L}} \sqrt{\frac{15}{8}} \frac{1}{L^{5/2}} \int_{-L/2}^{L/2} dx \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)(4x^2 - L^2)$$

$$= \frac{\sqrt{15}}{2} \frac{1}{L^3} \, 2 \int_0^{L/2} dx \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)(4x^2 - L^2) \qquad \frac{\pi x}{L} = y$$

$$= \frac{\sqrt{15}}{L^3} \frac{L}{\pi} \int_0^{\pi/2} dy \cos y \left(\frac{4L^2}{\pi^2} y^2 - L^2\right)$$

$$= \frac{\sqrt{15}}{\pi} \left\{ \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} dy\, y^2 \cos y - \int_0^{\pi/2} dy \cos y \right\}$$

$$= \frac{\sqrt{15}}{\pi} \left\{ \frac{4}{\pi^2} \frac{1}{2} I_2 - 1 \right\} = \frac{\sqrt{15}}{\pi} \left\{ \frac{\cancel{4}}{\pi^2} \frac{1}{\cancel{4}} (\pi^2 - 8) - 1 \right\}$$

$$= \frac{\sqrt{15}}{\pi} \left\{ -\frac{8}{\pi^2} \right\} = \frac{-8\sqrt{15}}{\pi^3}$$

$$\text{Prob} = \left(\frac{-8\sqrt{15}}{\pi^3}\right)^4 = \frac{8^4 \, 15^2}{\pi^{12}}$$

Esercizio 2 ⓐ

Per $A = 0$ lo spettro è (senza spin)

$$\begin{array}{llll} & & & n \;\; l \;\; m \\ n=0 & \underline{l=0} & E = \frac{3}{2}\hbar\omega & |0\;0\;0\rangle \\ n=1 & \underline{l=1} & E = \frac{5}{2}\hbar\omega & |1\;1\;m\rangle \quad (\text{deg. } 3) \\ & \underline{(l=2)+(l=0)} & E = \frac{7}{2}\hbar\omega > 3\hbar\omega & \end{array}$$

Quindi, aggiungendo lo spin, $s \;\; s_z$

$$\left.\begin{array}{ll} E = \frac{3}{2}\hbar\omega - 2A\hbar\omega & |0\;0\;0\rangle|1\;-1\rangle \\ E = \frac{3}{2}\hbar\omega & |0\;0\;0\rangle|1\;0\rangle \\ E = \frac{3}{2}\hbar\omega + 2A\hbar\omega & |0\;0\;0\rangle|1\;1\rangle \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l}\text{STATI CORRISPONDENTI} \\ \text{A } \; n=0\end{array}$$

Per gli stati con $n=1$, dobbiamo tenere conto che $L=1$ e quindi vi sono 9 stati (L_z, S_z)

Calcoliamo $A\omega(L_z + 2S_z)$ sugli stati:

$|1\,1\,1\,m\rangle|1\,S_z\rangle$

m	S_z	
-1	-1	$-3A\hbar\omega$
-1	0	$-A\hbar\omega$
-1	1	$A\hbar\omega$
0	-1	$-2A\hbar\omega$
0	0	0
0	1	$2A\hbar\omega$
1	-1	$-A\hbar\omega$
1	0	$A\hbar\omega$
1	1	$3A\hbar\omega$

Quindi abbiamo (STATI $n=1$)

$E = \frac{5}{2}\hbar\omega - 3A\hbar\omega$ $\quad |1\,1\,1\,-1\rangle|1\,-1\rangle$ non deg.

$E = \frac{5}{2}\hbar\omega - 2A\hbar\omega$ $\quad |1\,1\,1\,0\rangle|1\,-1\rangle$ non deg.

$E = \frac{5}{2}\hbar\omega - A\hbar\omega$ $\quad \begin{cases} |1\,1\,1\,-1\rangle|1\,0\rangle \\ |1\,1\,1\,1\rangle|1\,-1\rangle \end{cases}$ deg. 2

$E = \frac{5}{2}\hbar\omega$ $\quad |1\,1\,1\,0\rangle|1\,0\rangle$ non deg.

$E = \frac{5}{2}\hbar\omega + A\hbar\omega$ $\quad \begin{cases} |1\,1\,1\,-1\rangle|1\,1\rangle \\ |1\,1\,1\,1\rangle|1\,0\rangle \end{cases}$ dg 2

$E = \frac{5}{2}\hbar\omega + 2A\hbar\omega$ $\quad |1\,1\,1\,0\rangle|1\,1\rangle$ non deg.

$E = \frac{5}{2}\hbar\omega + 3A\hbar\omega$ $\quad |1\,1\,1\,1\rangle|1\,1\rangle$ non deg.

b)

Vi sono due livelli degeneri di energia

$$E = \frac{5}{2}\hbar\omega \pm A\hbar\omega$$

Livello $E=\frac{5}{2}\hbar\omega - A\hbar\omega$

La perturbazione si scrive come

$$B\frac{2\omega}{\hbar}\vec{L}\cdot\vec{S} = \frac{B\omega}{\hbar}\left(J^2-L^2-S^2\right)$$

$$= \frac{B\omega}{\hbar}J^2 - \frac{B\omega}{\hbar}(2+2)\hbar^2 = \frac{B\omega}{\hbar}J^2 - 4B\hbar\omega$$

I due stati hanno J_z diverso

$$|v_1\rangle = |1\,1\,-1\rangle|1\,0\rangle \longrightarrow J_z = -1+0 = -1$$

$$|v_2\rangle = |1\,1\,1\rangle|1\,-1\rangle \longrightarrow J_z = 1-1 = 0$$

Quindi gli elementi di matrice non diagonali sono nulli. Dobbiamo quindi solo calcolare gli elementi di matrice diagonali. Usando le tavole CG (1×1) abbiamo

$n\ l\ s\ j\ J_z$

$$|v_1\rangle = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\,|1\,1\,1\,2\,-1\rangle - \sqrt{\tfrac{1}{2}}\,|1\,1\,1\,1\,-1\rangle$$

$$|v_2\rangle = \sqrt{\tfrac{1}{6}}\,|1\,1\,1\,2\,0\rangle + \sqrt{\tfrac{1}{2}}\,|1\,1\,1\,1\,0\rangle + \sqrt{\tfrac{1}{3}}\,|1\,1\,1\,0\,0\rangle$$

$$\langle v_1|J^2|v_1\rangle = \frac{1}{2}\cdot(2)(2+1)\hbar^2 + \frac{1}{2}1(1+1)\hbar^2$$

$$= 4\hbar^2$$

$$\langle v_2|J^2|v_2\rangle = \frac{1}{6}\,2\cdot3\hbar^2 + \frac{1}{2}\cdot1\cdot2\hbar^2 = 2\hbar^2$$

Quindi il livello si separa in due livelli

$$|v_1\rangle \qquad \Delta E = \frac{B\omega}{\hbar}4\hbar^2 - 4B\hbar\omega = 0$$

$$|v_2\rangle \qquad \Delta E = \frac{B\omega}{\hbar}2\hbar^2 - 4B\hbar\omega = -2B\hbar\omega$$

Livello $E=\frac{5}{2}\hbar\omega + A\hbar\omega$

Il calcolo è analogo

$$|v_1\rangle = |1\,1\,1\rangle|1\,0\rangle \qquad J_z = +1$$

$$|v_2\rangle = |1\,1\,-1\rangle|1\,1\rangle \qquad J_z = 0$$

(5)

$|V_1\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}}\,|1\,1\,1\,1\,2\,1\rangle + \sqrt{\frac{1}{2}}\,|1\,1\,1\,1\,1\,1\rangle$

$|V_2\rangle = \sqrt{\frac{1}{6}}\,|1\,1\,1\,1\,2\,0\rangle - \sqrt{\frac{1}{2}}\,|1\,1\,1\,1\,1\,0\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}\,|1\,1\,1\,1\,0\,0\rangle$

$\langle v_1|J^2|v_1\rangle = 4\hbar^2 \qquad \langle v_2|J^2|v_2\rangle = 2\hbar^2$

Il livello si separa in due livelli

con $\Delta E = 0$ e $\Delta E = -2B\hbar\omega$

(c)

i) ci indica che si tratta di uno stato che è combinazione lineare di quelli calcolati al punto a).

ii) $\langle\psi|S_z|\psi\rangle = -\hbar$ ci dice che $S_z|\psi\rangle = -\hbar$.

Infatti $\langle\psi|S_z|\psi\rangle = \text{prob}(S_z=-\hbar)(-\hbar) +$
$\text{prob}(S_z=0)\,0 +$
$\text{prob}(S_z=+\hbar)\,\hbar$
$= -\hbar\,\text{prob}(S_z=-\hbar) + \hbar\,\text{prob}(S_z=\hbar)$

Quindi

$-\hbar = -\hbar\,\text{prob}(S_z=-\hbar) + \hbar\,\text{prob}(S_z=\hbar)$

$\text{prob}(S_z=-\hbar) - 1 = \text{prob}(S_z=\hbar)$

Dato che $\text{prob}(S_z=\hbar) \geq 0 \Rightarrow \text{prob}(S_z=-\hbar) - 1 \geq 0$

$\text{prob}(S_z=-\hbar) \geq 1$

Deve pure valere $\text{prob}(S_z=-\hbar) \leq 1$. Quindi

$\text{prob}(S_z=-\hbar) = 1$

e quindi $\text{prob}(S_z=0) = \text{prob}(S_z=\hbar) = 0$.

Quindi $|\psi\rangle$ è autostato di S_z con autovalore $-\hbar$

iii) implica $L_z = \pm\hbar$

Quindi

$|\psi\rangle = a\,|\overset{n}{1}\,\overset{l}{1}\,\overset{l_z}{-1}\rangle|\overset{s}{1}\,\overset{s_z}{-1}\rangle + b\,|1\,1\,1\rangle|1\,-1\rangle$

d) $L_+ = L_x + iL_y$ $\qquad$ $L_x = \frac{1}{2}(L_+ + L_-)$

$L_- = L_x - iL_y$

$$L_x|\psi\rangle = \frac{a}{2} L_+|1\,1\,-1\rangle|1\,-1\rangle + \frac{b}{2}\overbrace{L_+|1\,1\,1\,1\rangle}^{\text{nullo}}|1\,-1\rangle$$

$$+ \frac{a}{2}\underbrace{L_-|1\,1\,-1\rangle}_{\text{nullo}}|1\,-1\rangle + \frac{b}{2} L_-|1\,1\,1\,1\rangle|1\,-1\rangle$$

$$= \frac{a}{2}\sqrt{2}\,|1\,1\,0\rangle|1\,-1\rangle + \frac{b}{2}\sqrt{2}\,|1\,1\,0\rangle|1\,-1\rangle$$

$$= \frac{a+b}{\sqrt{2}}|1\,1\,0\rangle|1\,-1\rangle$$

$$\langle\psi|L_x^2|\psi\rangle = \big|\,L_x|\psi\rangle\big|^2 = \frac{|a+b|^2}{2}$$

Se $\langle\psi|L_x^2|\psi\rangle = 0 \Longrightarrow |a+b|^2 = 0 \Longrightarrow a = -b$

$$|\psi\rangle = a|1\,1\,-1\rangle|1\,-1\rangle - a|1\,1\,1\rangle|1\,-1\rangle$$

La condizione di normalizzazione impone $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$

e) Utilizzando le tavole CG (1×1)

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|\overset{n}{1}\,\overset{l}{1}\,\overset{s}{1}\,1\,\overset{j}{2}\,\overset{j_z}{-2}\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{\frac{1}{6}}\,|1\,1\,1\,1\,2\,0\rangle + \sqrt{\frac{1}{2}}\,|1\,1\,1\,1\,1\,0\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}\,|1\,1\,1\,1\,0\,0\rangle\right]$$

$$\text{Prob}(J^2 = 6\hbar^2)^{(J=2)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} = \frac{7}{12}$$

$$\text{Prob}(J^2 = 2\hbar^2)^{J=1} = \frac{1}{4}$$

$$\text{Prob}(J^2 = 0) = \frac{1}{6}$$