Forma di Lagrange del resto di Taylor

f derivabile $n+1$ volte in $(a,b) \ni x_0, x$

$T_n(x) =$ polinomio di Taylor di ordine n di f centrato in x_0

$$\Rightarrow \quad f(x) = T_n(x) + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}_{E_n(x)}$$

c compreso tra x_0 e x.

Trovare $\sqrt{17}$ con un errore inferiore a 10^{-6}

1° modo $\quad \sqrt{17} = \sqrt{1+16} = \sqrt{1+x}\Big|_{x=16}$.

Il resto $E_n(16)$ non tende a zero per $n \to +\infty$.

Tentativo fallito!

2° modo $\quad \sqrt{17} = \sqrt{16+1} = 4\sqrt{1+\frac{1}{16}} = 4\sqrt{1+x}\Big|_{x=1/16}$

$f(x) = 4\sqrt{1+x}$ scrivo lo sviluppo di Maclaurin $(x_0 = 0)$

$$\sqrt{17} = 4\sum_{k=0}^{n}\binom{1/2}{k}\frac{1}{16^k} + \underbrace{4\binom{1/2}{n+1}\frac{1}{(1+c)^{n+1/2}}\frac{1}{16^{n+1}}}_{E_n\left(\frac{1}{16}\right)}$$

$$16^{n+1} = 2^{4n+4}$$

Vogliamo cercare n in modo che $|E_n| < 10^{-6}$

$$E_n = \frac{\overbrace{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n\right)}^{n+1 \text{ fattori}}}{(n+1)!}\,\frac{1}{2^{4n+2}}\,\frac{1}{(1+c)^{n+1/2}} =$$

$$= \frac{(-1)^n\, 1\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^{n+1}(n+1)!}\,\frac{1}{2^{4n+2}}\cdot\frac{1}{(1+c)^{n+1/2}}$$

$$\Rightarrow |E_n| = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{(n+1)!\; 2^{5n+3}}\ \frac{1}{(1+c)^{n+1/2}} \qquad 0<c<\frac{1}{16}$$

≤ 1

$$\le \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{(n+1)!\quad 2^{5n+3}} < 10^{-6}$$

$$n=3 \Rightarrow |E_3| \le \frac{3\cdot 5}{24\cdot 2^{18}} < 10^{-6}$$

$$\underbrace{24\cdot 2^{18}}_{2^{21}\cdot 3} > 15\cdot 10^6 \qquad \text{NO.}$$

$$n=4 \Rightarrow |E_4| \le \frac{3\cdot 5\cdot 7}{5!\; 2^{23}} < 10^{-6}$$

$$\underset{\substack{\| \\ 120}}{5!}\ 2^{23} > \underbrace{3\cdot 5\cdot 7}_{105}\ 10^6 \qquad \text{vera!}$$

Basta prendere $n=4$. Il valore approssimato trovato per $\sqrt{17}$ è

$$\cancel{4} \sum_{k=0}^{4} \binom{1/2}{k} \frac{1}{2^{4k-2}}$$

Numeri complessi

Sono somme formali del tipo $z = x+iy$, dove $x,y\in\mathbb{R}$ e "i" è un simbolo che formalmente verifica $i^2=-1$.

Sono definite due operazioni di somma e prodotto sull'insieme dei numeri complessi

$$\mathbb{C} = \{ z = x+iy \;:\; x,y\in\mathbb{R} \}$$

$$+ : \mathbb{C}^2 = \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$z_1 = x_1 + i y_1 \quad , \qquad z_2 = x_2 + i y_2 .$$

$$\Rightarrow \quad z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i\,(y_1 + y_2)$$

$5 - 2i$ significa $\quad 5 + i \cdot (-2)$

$1 + 3i$ " $\quad 1 + i\, 3$

$$(5-2i) + (1+3i) = 6 + 1i = 6 + i$$

Prodotto:

$i^2 = -1$.

$$(5-2i)(1+3i) = 5 + 15i - 2i - 6\underbrace{i^2}_{= -1} =$$

$$= 5 + 6 + 13i =$$

$$= 11 + 13i$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + i y_1)(x_2 + i y_2) = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i\,(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

Formalmente, avrei potuto definire $\mathbb{C}$ come l'insieme delle coppie ordinate $\underbrace{(x, y)}_{= x + iy}$ di numeri reali con le operazioni date da

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2 , y_1 + y_2)$$

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2 , x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

unità immaginaria.

$$z = x + i\, y$$

parte immaginaria di z ($y = \mathrm{Im}(z)$)

parte reale di z ($x = \mathrm{Re}(z)$)

Parte reale e parte immaginaria sono <u>numeri reali</u>.

i si identifica con il numero complesso $0 + i \cdot 1$.

I numeri della forma $0 + iy$ si scrivono nella forma iy e si chiamano "numeri immaginari puri"

I numeri della forma $x + i0$ si scrivono nella forma x e si identificano con i numeri reali, anche per quanto riguarda le operazioni. In questo senso possiamo scrivere

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Proprietà delle operazioni:

$z, w, v \in \mathbb{C}$

1) $z + w = w + z$ (proprietà commutativa della somma) $\forall z, w \in \mathbb{C}$

2) $(z + w) + v = z + (w + v)$ (propr. associativa) $\forall z, w, v \in \mathbb{C}$

3) $\exists\ 0 = 0 + i0$ t.c (elemento neutro per la somma)

$$0 + z = z. \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

4) $\forall z \in \mathbb{C} \quad \exists -z$ t.c. $z + (-z) = 0$

se $z = x + iy$, $-z = -x - iy$ (esistenza dell'opposto)

5) $z \cdot w = w \cdot z$ (propr. commut. prodotto)

6) $z \cdot (w \cdot v) = (z \cdot w) \cdot v$ (associativa)

7) $\exists$ l'elemento neutro risp. al prodotto $1 = 1 + 0i$ t.c. $z \cdot 1 = z \quad \forall z \in \mathbb{C}$.

8) $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad \exists!$ reciproco $z^{-1} \in \mathbb{C}$ t.c.

$z \cdot z^{-1} = 1$ (verifica dopo).

9) $z \cdot (w + v) = z \cdot w + z \cdot v \qquad \forall z, w, v \in \mathbb{C}$

(proprietà distributiva)

Attenzione: i numeri complessi non possono essere ordinati in modo compatibile con le operazioni.

Esistenza del reciproco: sia $z = a+ib$ $a,b \in \mathbb{R}$
a e b non entrambi nulli

Cerco $w = z^{-1} = x+iy$ $(x,y \in \mathbb{R})$ t.c.

$$z \cdot w = 1.$$

$$(a+ib)(x+iy) = 1$$

$$ax - by + i(ay+bx) = 1 + 0i$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} ax - by = 1 \\ bx + ay = 0 \end{cases}$$

a, b sono reali assegnati

x, y sono reali incognite.

Sistema lineare 2x2 nelle variabili x, y
Calcolo il det. dei coefficienti

$$\det \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a^2+b^2 \neq 0.$$

ok perché a, b non sono entrambi nulli.

$\Longrightarrow$ soluzione unica!

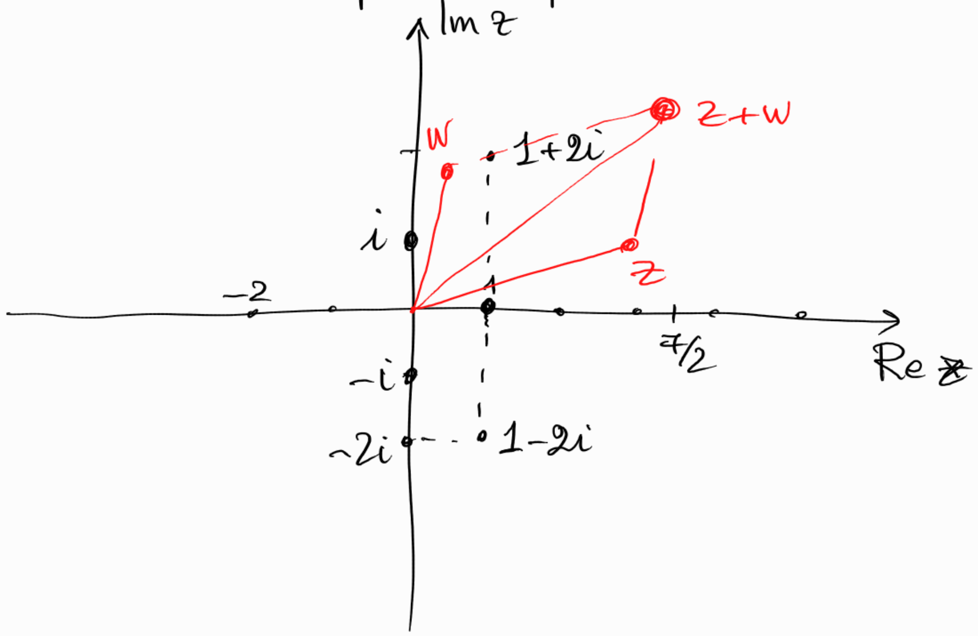
$$x = \frac{a}{a^2+b^2} \qquad y = -\frac{b}{a^2+b^2}$$

$$\frac{1}{z} = z^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{i\,b}{a^2+b^2} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$$

$$(2-5i)^{-1} = \frac{2+5i}{29} = \frac{2}{29} + \frac{5}{29}i$$

$$\frac{1}{2-5i} = \frac{1}{2-5i}\,\frac{2+5i}{2+5i} = \frac{2+5i}{4-(5i)^2} = \frac{2+5i}{4+25} = \frac{2+5i}{29}$$

<u>OSS</u> $\mathbb{C}$ si può rappresentare su un piano cartesiano



<u>DEF</u> Sia $z = x+iy \in \mathbb{C}$. Definiamo

$|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ <u>**modulo di z.**</u>

$$|3-2i| = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

Il modulo di un numero complesso è un numero reale ≥ 0.

$|z|$ si interpreta come la distanza di z dall'origine

$$|z| \geq 0 \;, \qquad |z| = 0 \iff z = 0$$

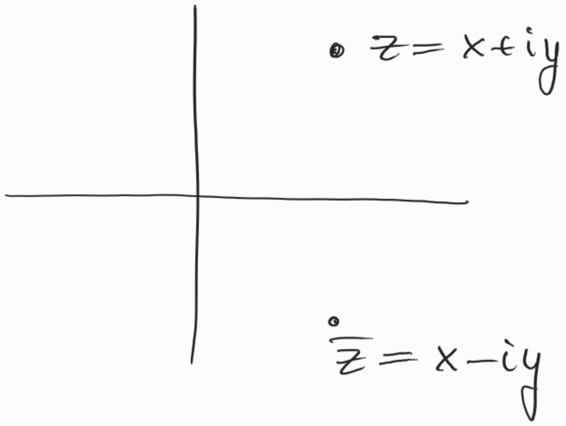
$$|z \cdot w| = |z||w|$$

$$\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$$

Vale la dis. triangolare $|z+w| \leq |z| + |w| \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$.

$|z-w|$ si interpreta come "distanza" tra z e w.

Se $z = x+iy \in \mathbb{C}$, si definisce **complesso coniugato** di z il numero $\bar{z} = x - iy$.



Se $z = x + 0i \in \mathbb{R}$, il suo modulo coincide con il suo valore assoluto.

N.B. Nei numeri complessi $z^2 \neq |z|^2$

$z = 1+i$ $\qquad z^2 = (1+i)^2 = 1 + \underset{\overset{\shortparallel}{i^2}}{(-1)} + 2i = 2i$

$$|z|^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

Proprietà del coniugio:

1) $\overline{(\bar{z})} = z$.

2) $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$

3) $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$

$$\left.\begin{array}{l} z = x+iy \\ w = a+ib \end{array}\right| \Rightarrow \quad z \cdot w = xa - yb + i\,(xb + ya)$$

$$\overline{z \cdot w} = xa - yb - i\,(xb+ya)$$

$$\bar{z} \cdot \bar{w} = (x-iy)(a-ib) = xa - yb + i\,(-xb-ya)$$

4) $\overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)} = \dfrac{\bar{z}}{\bar{w}}$

5) $\boxed{z \cdot \bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2 = |z|^2}$

6)

$$\boxed{\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}}$$

$z \neq 0$

Calcolare

$$\frac{3-5i}{1+i} = \frac{3-5i}{1+i}\,\frac{1-i}{1-i} = \frac{3-3i-5i-5}{2} = \frac{-2-8i}{2} =$$

$$= -1-4i$$