$f : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile ∞ volte in (a,b)

$$f(x) = T_0(x) + o(1) \qquad \text{per } x \to x_0$$

dove $T_0(x) = f(x_0)$

$$f(x) = T_1(x) + o(x - x_0) \qquad \text{per } x \to x_0$$

dove $T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

$$f(x) = T_2(x) + o\left((x - x_0)^2\right) \qquad \text{per } x \to x_0$$

dove $T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2$

$$f(x) = T_3(x) + o\left((x - x_0)^3\right) \qquad \text{per } x \to x_0$$

dove $T_3(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3$

Polinomio di Taylor di ordine n della funz. f con punto iniziale x_0: f deve essere derivabile n volte in x_0

$$\boxed{T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k}$$

Esempio: calcoliamo il polinomio di Taylor di $f(x) = \sqrt{x}$ con pto iniziale $x_0 = 4$ e $n = 3$.

$f(4) = 2$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \qquad f''(x) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) x^{-3/2} = -\frac{1}{4x\sqrt{x}}$$

$f'(4) = \frac{1}{4}$ $\qquad$ $f''(4) = -\frac{1}{32}$

$$f'''(x) = \left(-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right) x^{-5/2} = \frac{3}{8}\,\frac{1}{x^2\sqrt{x}} \qquad f'''(4) = \frac{3}{8\cdot 16\cdot 2}$$

$$T_3(x) = T_3(x;4) = 2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{64}(x-4)^2 + \cancel{\frac{3}{256\cdot 6}}\,(x-4)^3$$

$$\frac{1}{512}\ \cancel{(x-4)}$$

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

$$\boxed{T_n(x_0) = f(x_0)}$$

$$T_n'(x) = f'(x_0) + f''(x_0)(x-x_0) + \frac{f'''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}$$

$$\boxed{T_n'(x_0) = f'(x_0)}$$

$$T_n''(x) = f''(x_0) + f'''(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-2)!}(x-x_0)^{n-2}$$

$$\boxed{T_n''(x_0) = f''(x_0)}$$

$$\boxed{T_n'''(x_0) = f'''(x_0)}$$

$$\vdots$$

$$\boxed{T_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)}$$

Quindi: il polinomio di Taylor di ordine n di f con pto iniziale x_0 verifica

$$\boxed{T_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) \quad \forall k=0,1,\dots n}$$

TEOREMA Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ derivabile n volte in x_0. Sia $T_n(x)$ il polinomio di Taylor di f di ordine n con punto iniziale x_0. Allora

$$f(x) = T_n(x) + o\left((x-x_0)^n\right) \quad \text{per } x\to x_0. \quad (*)$$

$$\left(\text{cioè: } \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-T_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0\right)$$

Inoltre il polinomio $T_n(x)$ è l'unico polinomio di grado $\leq n$ t.c. valga $(*)$.

OSS L'abbiamo già provato nei casi $n=0,1,2,3$ con l'ipotesi leggermente più forte che f fosse derivabile n volte in un intorno di x_0 con derivata n-esima continua.

Rivediamo la dimostrazione nel caso n.

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\overbrace{f(x)-T_n(x)}^{f(x_0)-T_n(x_0)=0}}{\underbrace{(x-x_0)^n}_{\to 0}} = \left(\frac{0}{0}\right) \underset{\hat{H}}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{\overbrace{f'(x)-T_n'(x)}^{f'(x_0)-T_n'(x_0)=0}}{\underbrace{n(x-x_0)^{n-1}}_{\to 0}} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$\underset{\hat{H}}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{f''(x)-T_n''(x)}{n(n-1)(x-x_0)^{n-2}} = \dots = \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x)-T_n^{(n-1)}(x)}{n!\,(x-x_0)}$$

$$\underset{H}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n)}(x)-T_n^{(n)}(x)}{n!} = \frac{f^{(n)}(x_0)-T^{(n)}(x_0)}{n!} = 0 \qquad \square$$

con l'ipotesi legg. più forte che f sia derivabile n volte in un intorno di x_0, t.c. $f^{(n)}(x)$ sia continua in x_0

Quindi la prima parte del teorema risulta dimostrata con l'ipotesi supplementare appena vista.

Dai passaggi appena fatti è anche evidente che, se avessi preso un polinomio differente, cioè se avessi preso un polinomio t.c. $T_n^{(k)}(x_0) \neq f^{(k)}(x_0)$, il limite non sarebbe venuto zero.

Calcoliamo alcuni polinomi di Taylor importanti, nel caso $x_0 = 0$. (in questo caso si chiamano anche polinomi di Maclaurin)

D'ora in poi $x_0 = 0$.

$$f(x) = e^x \qquad f^{(k)}(x) = e^x \qquad f^{(k)}(0) = 1.$$

$$T_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

$$\boxed{\begin{aligned} e^x &= T_n(x) + o(x^n) \qquad \text{per } x \to 0 \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \end{aligned}}$$

$$n = 1 \Rightarrow e^x = 1 + x + o(x)$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x & f(0) &= 0 \\ f'(x) &= \cos x & f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= -\sin x & f''(0) &= 0 \\ f'''(x) &= -\cos x & f'''(0) &= -1 \\ f^{(4)}(x) &= \sin x & f^{(4)}(0) &= 0 \end{aligned}$$

Sviluppo di Maclaurin di $\sin x$

$$\sin x = \underbrace{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{T_{2n+1}(x) = T_{2n+2}(x)} + o\left(x^{2n+2}\right)$$

per $x \to 0$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right)$$

$f(x) = \cos x$ $\qquad f(0) = 1$

$f'(x) = -\sin x$ $\qquad f'(0) = 0$

$f''(x) = -\cos x$ $\qquad f''(0) = -1$

$f'''(x) = \sin x$ $\qquad f'''(0) = 0$

$f^{(4)}(x) = \cos x$ $\qquad f^{(4)}(0) = 1.$

$$\cos x = \underbrace{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}}_{T_{2n}(x) = T_{2n+1}(x)} + o\left(x^{2n+1}\right) =$$

per $x \to 0$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o\left(x^{2n+1}\right).$$

OSS se $f(x)$ è dispari, tutte le sue derivate di ordine pari sono funzioni dispari, quindi si annullano in zero

$\to$ Lo sviluppo di Maclaurin di una f. dispari contiene solo potenze dispari di x.

Se $f(x)$ è pari, tutte le sue derivate di ordine dispari sono f. dispari

$\Rightarrow$ Lo sviluppo di Maclaurin di una funz. pari contiene

Solo potenze pari di x.

$f(x) = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ $\qquad f(0) = 0$

$f'(x) = \cosh x$ $\qquad f'(0) = 1$

$f''(x) = \sinh x$ $\qquad f''(0) = 0$

$$\sinh x = \underbrace{x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{T_{2n+1}(x) = T_{2n+2}(x)} + o\left(x^{2n+2}\right) =$$

$x \to 0$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right).$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o\left(x^{2n+1}\right) \qquad \text{per } x \to 0$$

$f(x) = \frac{1}{1-x}$ $\qquad f(0) = 1$

$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ $\qquad f'(0) = 1$

$f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}$ $\qquad f''(x) = 2$

$f'''(x) = \frac{6}{(1-x)^4}$ $\qquad f'''(0) = 6$

$f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$ $\qquad f^{(k)}(0) = k!$

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{1}{1-x} &= 1+x+x^2+x^3+\dots+x^n+o(x^n) \quad \text{per } x\to 0\\ &= \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)\end{aligned}}$$

Applicazioni di Taylor: limiti.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}-\cancel{x}+\overbrace{\frac{x^3}{6}+o(x^3)}^{\sim x^3/6}}{x^3} = \frac{1}{6}$$

OSS. già fatto con l'Hopital.

$$\sin x = x-\frac{x^3}{6}+o(x^3) \qquad \text{per } x\to 0$$

Calcolare l'ordine di infinitesimo per $x\to 0$ di

$$f(x) = \sin x + x^2\cos x - xe^x = (*)$$

$$\sin x = x-\frac{x^3}{6}+o(x^4) \qquad \text{per } x\to 0$$

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)$$

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)$$

$$(*) = \cancel{x}-\frac{x^3}{6}+o(x^4)+\cancel{x^2}-\frac{x^4}{2}+\underbrace{x^2 o(x^3)}_{=o(x^5)}-\cancel{x}-\cancel{x^2}-\frac{x^3}{2}-\frac{x^4}{6}+o(x^4)$$

$$= -\frac{2}{3}x^3+o(x^3) \sim -\frac{2}{3}x^3$$

è un infinitesimo di ordine 3.

Ordine di infinitesimo di $f(x) = 1-\cos x\cosh x$ per $x\to 0$

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+o(x^3) \qquad x\to 0$$

$$\cosh x = 1+\frac{x^2}{2}+o(x^3) \qquad x\to 0$$

$$f(x) = 1 - \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) =$$

$$= \cancel{1} - \cancel{1} - \cancel{\frac{x^2}{2}} + o(x^3) + \cancel{\frac{x^2}{2}} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} o(x^3)$$

$$= o(x^3)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) \qquad x \to 0$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$$

$$f(x) = 1 - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right) =$$

$$= \cancel{1} - \cancel{1} - \cancel{\frac{x^2}{2}} - \frac{x^4}{24} + o(x^5) + \cancel{\frac{x^2}{2}} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^4}{24}$$

$$= \frac{x^4}{6} + o(x^4) \sim \frac{x^4}{6}$$ inf^{mo} di ordine 4.