Funzioni iperboliche

Seno iperbolico

$$\operatorname{sh} x = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

coseno iperbolico

$$\operatorname{ch} x = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Segno

$\sinh x \gtreqless 0 \iff x \gtreqless 0$

$\cosh x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Dominio: $\mathbb{R}$, derivabili un numero arbitrario di volte in $\mathbb{R}$.

Simmetrie

$\sinh x$ è dispari $\qquad \sinh 0 = 0$

$\cosh x$ è pari $\qquad \cosh 0 = 1$

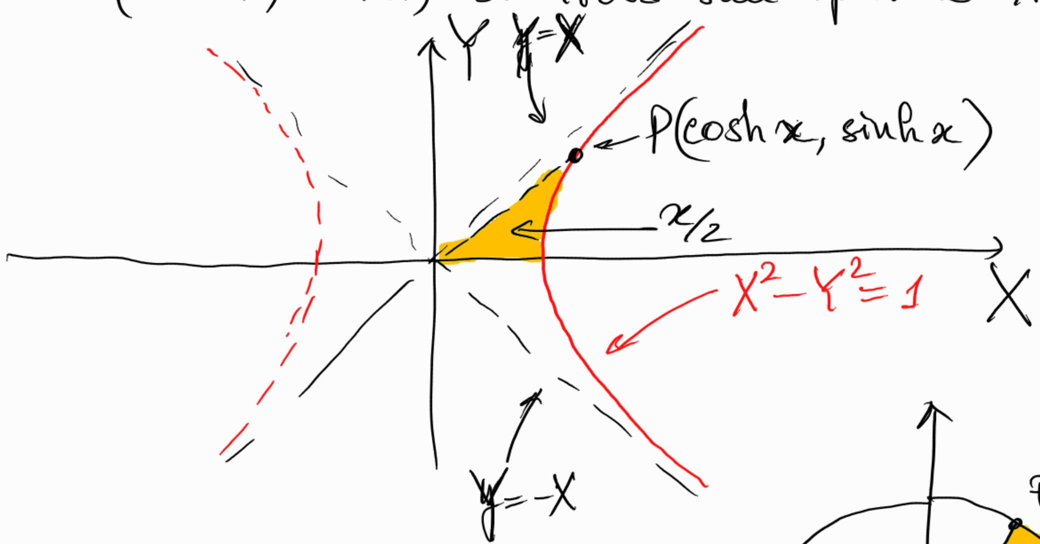
Identità fondamentale

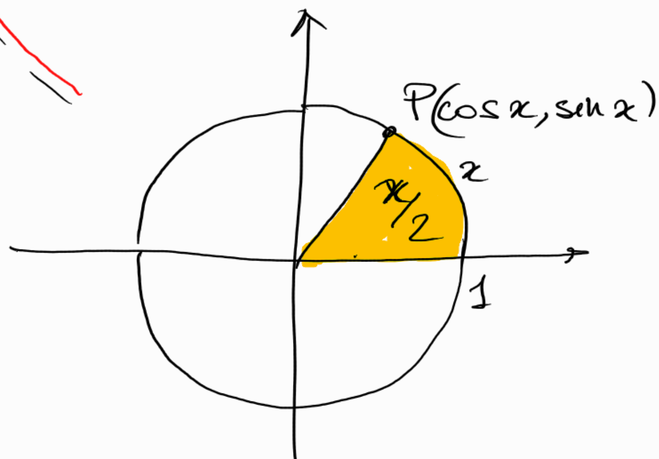
$$\boxed{\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\cancel{e^{2x}} + \cancel{e^{-2x}} + 2 - \cancel{e^{2x}} - \cancel{e^{-2x}} + 2\right) = 1.$$

Il punto $P(\cosh x, \sinh x)$ si trova sull'iperbole $X^2 - Y^2 = 1$





Limiti

$$\lim_{x\to+\infty} \sinh x = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = +\infty$$

$$\sinh x \sim \frac{e^x}{2} \qquad \text{per } x\to+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \sinh x = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \cosh x = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+e^{-x}}{2} = +\infty = \lim_{x\to-\infty} \cosh x$$

$$\cosh x \sim \frac{e^x}{2} \qquad \text{per } x\to+\infty$$

Derivata prima

$$\boxed{(\sinh)'(x) = \cosh x, \ (\cosh)'(x) = \sinh x}$$

$$(\sinh)'(x) = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)' = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = \cosh x$$

$$(\cosh)'(x) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)' = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) = \sinh x$$

$(\sinh)'(x) > 0 \implies \sinh x$ è strettamente crescente in $\mathbb{R}$

$(\cosh)'(x) = \sinh x \gtreqless 0 \iff x \gtreqless 0$

$\implies \cosh x$ è strett. crescente in $[0,+\infty)$

strett. decrescente in $(-\infty, 0]$

$x=0$ è pto di min. assoluto.

Derivata seconda

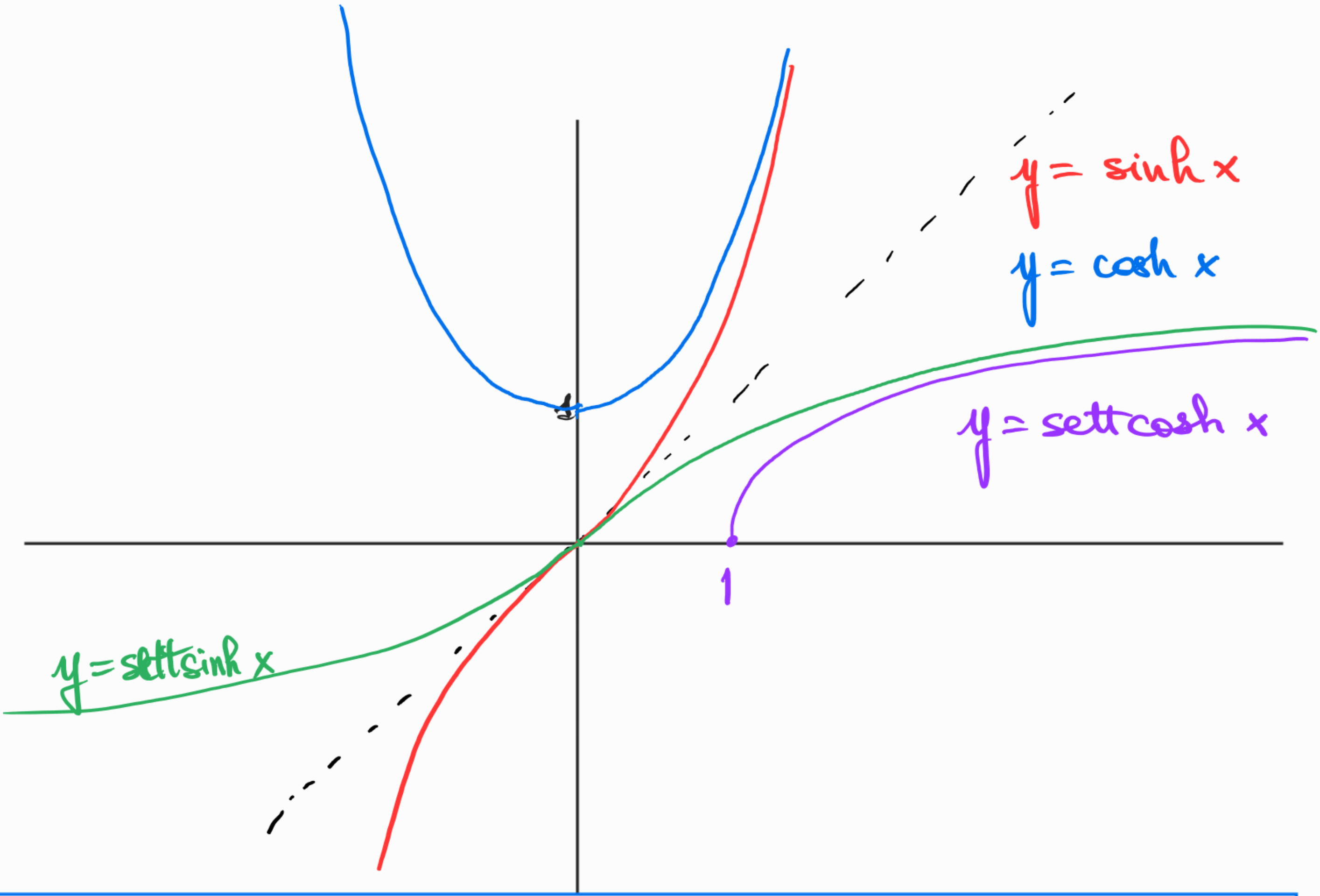
$(\sinh)''(x) = \sinh x \gtreqless 0 \iff x \gtreqless 0$

$\implies \sinh$ è strett. convessa in $[0,+\infty)$

è strett. concava in $(-\infty, 0]$

$x=0$ è un pto di flesso.

$(\cosh)''(x) = \cosh x > 0 \ \forall x \implies \cosh x$ è strettamente convessa in $\mathbb{R}$.



$$\lim_{x\to0}\frac{\sinh x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}}{2x}=\lim_{x\to0}\underbrace{e^{-x}}_{\to 1}\underbrace{\boxed{\frac{(e^{2x}-1)}{2x}}}_{\to 1}=1$$

$$\boxed{\sinh x\sim x \quad \text{per } x\to0}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\cosh x-1}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\cosh x-1}{x^2}\frac{(\cosh x+1)}{(\cosh x+1)}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\boxed{\cosh^2 x-1}=\sinh^2 x}{x^2(\cosh x+1)}=\lim_{x\to0}\underbrace{\boxed{\left(\frac{\sinh x}{x}\right)^2}}_{\to 1}\underbrace{\boxed{\frac{1}{\cosh x+1}}}_{\to 1/2}=\frac{1}{2}$$

$$\boxed{\lim_{x\to0}\frac{\cosh x-1}{x^2}=\frac{1}{2}}$$

$$\cosh x-1\sim\frac{x^2}{2}\qquad\text{per } x\to0$$

$$\cosh x=1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\qquad\text{per } x\to0$$

Funzioni iperboliche inverse:

$f(x) = \sinh x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ biiettiva.

- iniettiva perché strett. crescente
- suriettiva perché continua in $\mathbb{R} \Rightarrow$ assume tutti i valori compresi tra $\inf f = -\infty$ e $\sup f = +\infty$.

Resta definita

$$f^{-1}(y) = \operatorname{settsinh} y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} &\quad\ \ \in \\ &: y \mapsto \text{l'unica } x \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \boxed{\sinh x = y} \end{aligned}$$

Voglio risolvere $\sinh x = y$ nella x.

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = y \iff e^x - e^{-x} = 2y \iff$$ molt. per e^x

$$\iff e^{2x} - 2y e^x - 1 = 0$$ eq^{ne} di 2° grado in e^x

$$\iff e^x = y \pm \sqrt{y^2+1}$$ scelgo il + perché altrimenti verrebbe $e^x < 0$

$$\iff e^x = y + \sqrt{y^2+1} > 0$$

$$\iff x = \log\left(y + \sqrt{y^2+1}\right) = \operatorname{settsinh} y.$$

$$\boxed{\operatorname{settsinh} x = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}.}$$

Calcolo la sua derivata.

1° modo: calcolo diretto

$$(\operatorname{settsinh})'(x) = \left(\log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\right)' = \frac{1 + \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} =$$

$$= \frac{\cancel{\sqrt{x^2+1} + x}}{\cancel{\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)}\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\boxed{(\operatorname{settsinh})'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}$$

2° modo Derivata della f. inversa. $f(x) = \sinh x$

$$D(\text{settsinh}\, y) = D(f^{-1}(y)) =$$

$$= \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\cosh x} = \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$$

$x = f^{-1}(y) = \text{settsh}\, y$

$y = \sinh x$

oss $\cosh x = \cancel{\pm} + \sqrt{1+\sinh^2 x}$

$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

$\cosh x$ non è invertibile (non iniettiva)

$\cosh\big|_{[0,+\infty)}(x) : [0,+\infty) \longrightarrow [1,+\infty)$ biiettiva

- iniettiva perché strett. crescente
- suriettiva perché continua in $[0,+\infty)$
  $\Rightarrow$ assume tutti i valori compresi tra $\min f = f(0) = 1$ e $\sup f = +\infty$.

Resta definita

$f^{-1}(y) = \text{settcosh}\, y : [1,+\infty) \to [0,+\infty)$

$y \longmapsto$ l'unico x t.c. $\cosh x = y$. Risolvo in x

$$e^x + e^{-x} = 2y \iff e^{2x} - 2y e^x + 1 = 0 \iff$$

$$\iff \underbrace{e^x}_{\geq 1} = y \pm \sqrt{y^2-1}$$

scelgo il + altrimenti non sarebbe ≥ 1.

$$\iff x = \log\left(y + \sqrt{y^2-1}\right) = \text{settcosh}\, y.$$

Se scelgo il "$-$"

$$y-\sqrt{y^2-1} \overset{?}{\geq} 1$$

$$y-1 \overset{?}{\geq} \sqrt{y^2-1} = \sqrt{(y-1)(y+1)}$$

$\Downarrow$ è tutto ≥ 0, faccio il quadrato

$$(y-1)^{\cancel{2}} \geq (y-\cancel{1})(y+1)$$

$$\Downarrow$$

$$y-1 \geq y+1 \quad \text{falso!}$$

Derivata del $\boxed{\text{settcosh}\, x = \log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}$ $\quad \boxed{x \geq 1}$

$$\boxed{(\text{settcosh})'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \qquad \forall x > 1.}$$

Esercizio per casa, in due modi: $\rightarrow$ calcolo diretto. $\rightarrow$ derivata della f. inversa.

$(\text{settcosh})'(1) = +\infty$ pto a tg. verticale

Esercizio per casa:

Studiare $\quad \text{tgh}\, x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

e la sua inversa $\text{setttgh}\, x$

TEOREMA di DE L'HÔPITAL

Serve per risolvere forme indeterminate del tipo $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$

o riconducibili a una di queste.

TEOREMA (De l'Hôpital)

f, g derivabili in $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ $\quad (-\infty \leq a < b \leq +\infty)$

Supponiamo che

1) $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0$ $\quad$ (oppure $+\infty$ oppure $-\infty$)

2) $g'(x) \neq 0$ def^{te} per $x \to a^+$

3) $\exists \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R}^*$

Allora $\exists \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$.

Riscrivere l'enunciato per $x \to b^-$

Esempi:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3} = \left(\frac{0}{0}\right) \underset{\hat{H}}{\cancel{\overset{?}{=}}} \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos x}{3x^2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

toglierò il "?" quando sono sicuro che il succ. limite esiste

Questo limite non è risolubile con i limiti notevoli:

$$\frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3} = \frac{\cancel{x} - \cancel{x} + o(x)}{x^3} = \frac{o(x)}{x^3} \quad ??$$

$\sin x = x + o(x)$ per $x \to 0$

$$\cancel{\frac{x - \overset{\sim x}{\sin x}}{x^3} \sim \frac{x - x}{x^3} = 0}$$

ERRATO!

Esempio (risultato già noto)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \underset{\hat{H}}{\cancel{\overset{?}{=}}} \lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Esempio (già noto)

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) \underset{\hat{H}}{\overset{?}{=}} \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x}{1} = 1.$$

Esercizio

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(1+5x^2)}{\sqrt{x+1}} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \underset{\hat{H}}{\cancel{\overset{?}{=}}} \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\frac{10x}{1+5x^2}}{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \boxed{\frac{\overbrace{(10x)\,2\sqrt{x+1}}^{\sim 20x^{3/2}}}{\underbrace{1+5x^2}_{\sim 5x^2}}} = 0$$

$\sim \frac{4}{\sqrt{x}}$

Si poteva fare anche senza l'Hôpital:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(1+5x^2)}{\underbrace{\sqrt{x+1}}_{\sim\sqrt{x}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\log x}{\sqrt{x}} = 0$$

$$= \log\left(5x^2(1+o(1))\right) = \log(x^2) + \log(5+o(1)) \sim 2\log x$$

Esercizio:

$$\lim_{x\to0^+} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x} = (1^{+\infty}) = \lim_{x\to0^+} e^{\frac{1}{x}\log\left(\frac{\sin x}{x}\right)}$$

Studio l'esponente

$$\lim_{x\to0^+} \frac{1}{x}\log\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \lim_{x\to0^+} \frac{\log\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{x} = \left(\frac{0}{0}\right)^+$$

$$\log\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \log(\sin x) - \log x$$

$$\overset{\cancel{*}}{\underset{\hat{H}}{=}} \lim_{x\to0^+} \frac{\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to0^+} \frac{x\cos x - \sin x}{x\,\underbrace{\cancel{\sin x}}_{\sim x}} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\overset{\cancel{*}}{\underset{\hat{H}}{=}} \lim_{x\to0^+} \frac{\cancel{\cos x} - x\sin x - \cancel{\cos x}}{2\cancel{x}} = 0$$

$$\lim_{x\to0^-} \frac{1}{x}\log\left(\frac{\sin x}{x}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x} = 1$$