TEOREMA f continua in I intervallo, derivabile nei pti interni. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(i) f è strett. convessa (concava) in I;

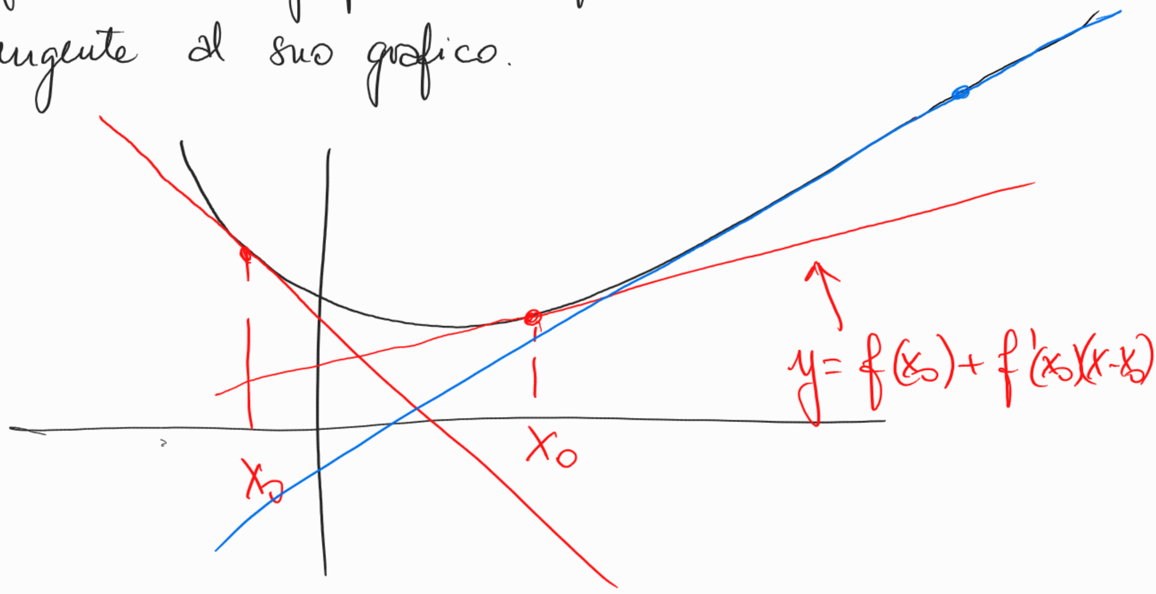
(ii) f' è strett. crescente (decrescente) nei punti interni di I;

(iii) $\forall x_0$ interno a I, si ha

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \qquad \forall x \in I \setminus \{x_0\}$$
$$(>,\ \leq)$$

<u>OSS</u> (i) $\Rightarrow$ (ii) l'abbiamo già vista, in quanto abbiamo mostrato che f'_+ è crescente.

<u>OSS</u> (iii) significa che il grafico di f sta al di sopra di ogni retta tangente al suo grafico.



<u>OSS</u> Il precedente teorema riduce lo studio della convessità/concavità di f allo studio della crescenza/decrescenza di f'. Quindi si ha:

COROLLARIO (criterio differenziale di convessità/concavità)

Sia f continua in I intervallo, derivabile due volte nei punti interni. Allora:

(i) f convessa in I $\iff$ $f''(x) \geq 0$ $\forall x$ interno a I.

(ii) f concava in I $\iff$ $f''(x) \leq 0$ $\forall x$ interno a I

(iii) f strett. convessa in I $\Leftarrow$ $f''(x) > 0$ $\forall x$ interno a I

(iv) f strett. concava in I $\Leftarrow$ $f''(x) < 0$ $\forall x$ interno a I

Dim

f convessa in I $\Leftrightarrow$ f' crescente nei punti interni di I $\Leftrightarrow$ $(f')' = f'' \geq 0$ nei punti interni di I

Nelle iii) e iv) non vale la freccia $\boxed{\Rightarrow}$

Per es. $f(x) = x^4$ è strett. convessa in $\mathbb{R}$, ma

$f'(x) = 4x^3$ (che è strett. crescente $\Rightarrow$ x^4 è strett. convessa)

ma $f''(x) = 12x^2 \geq 0$

ma $f''(x) > 0$ solo per $x \neq 0$

$f''(0) = 0$

DEF **Pti di flesso.** Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$ t.c. esista la retta tangente (anche verticale) al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$ (cioè in pratica $f'(x_0) \in [-\infty, +\infty]$).

x_0 si dice pto di flesso per f se

esiste un intorno destro di x_0 in cui f è convessa

esiste un intorno sinistro di x_0 in cui f è concava

oppure viceversa

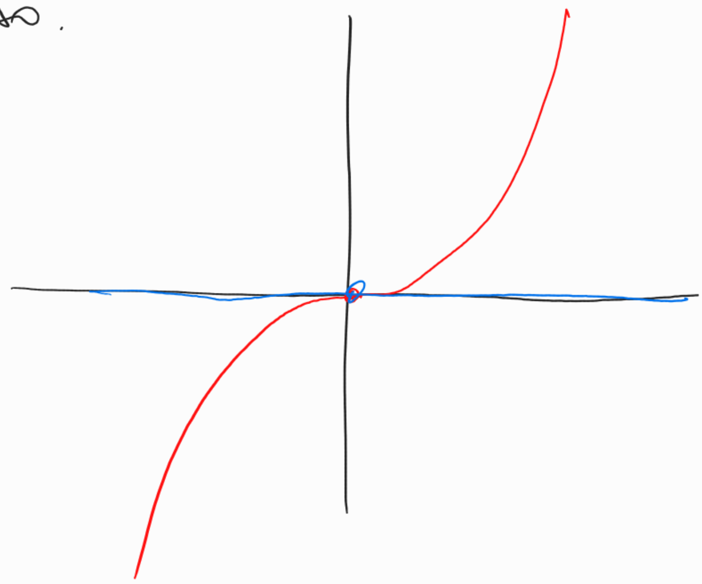
Esempi. 1) $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2$ $f''(x) = 6x$

$$f''(x) > 0 \iff x > 0$$
$$= 0 \iff x = 0$$
$$< 0 \iff x < 0$$

$\Rightarrow$ f è strett. convessa in $[0, +\infty)$

f è strett. concava in $(-\infty, 0]$.

$x = 0$ è pto di flesso.

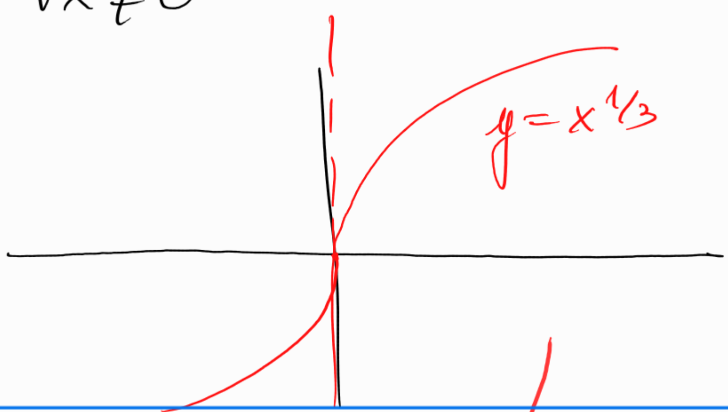


2) $f(x) = x^{1/3}$ $\quad f'(x) = \frac{1}{3} x^{-2/3}$ $\quad \forall x \neq 0$.

Per $x = 0$ $\quad f'_+(0) = f'_-(0) = +\infty$ pto a tg verticale

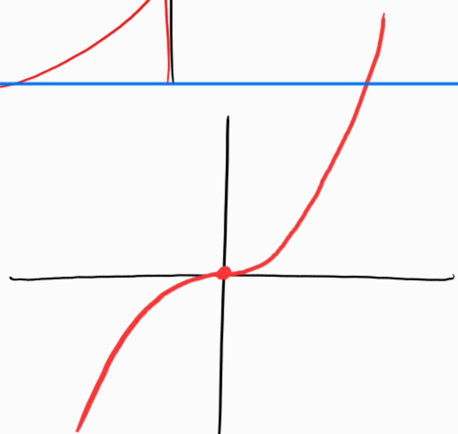
$$f''(x) = -\frac{2}{9} x^{-5/3} \qquad \forall x \neq 0$$

$$f''(x) > 0 \iff x < 0$$
$$< 0 \iff x > 0$$



3) $f(x) = x^{5/3}$

$f'(x) = \frac{5}{3} x^{2/3}$



$f''(x) = \frac{10}{9} x^{-1/3}$ $\qquad$ $f''_+(0) = +\infty$, $f''_-(0) = -\infty$

$f''(0)$ non esiste.

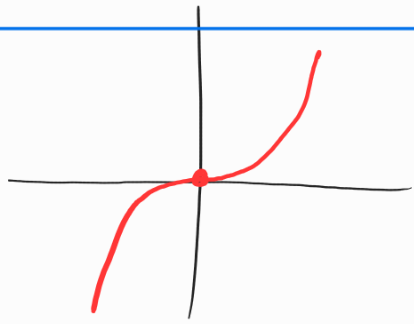
$f''(x) > 0 \iff x > 0$

$f''(x) < 0 \iff x < 0$

$x = 0$ è pto di flesso

---

4) $f(x) = x|x|$



$f'(x) = 2|x|$

$f''(x) = 2 \operatorname{sign} x$ se $x \neq 0$

$\nexists f''(0)$

è un punto di flesso.

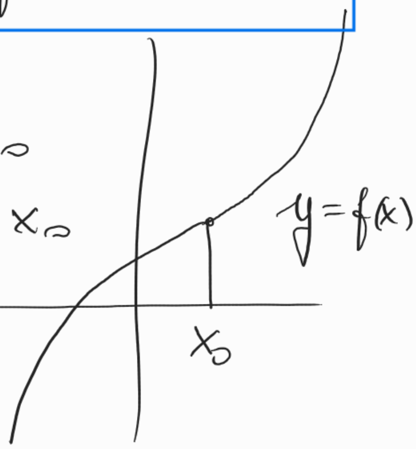
<u>OSS</u> Gli esempi 2), 3), 4) mostrano che in un pto di flesso x_0 $f''(x_0)$ può non esistere, ma proviamo che, se $f''(x_0)$ esiste, allora $f''(x_0) = 0$.

PROP. $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile in (a,b).
Sia $x_0 \in (a,b)$ pto di flesso per f.
Se f è derivabile due volte in x_0, allora $f''(x_0) = 0$.

DIM. Supponiamo, per esempio,

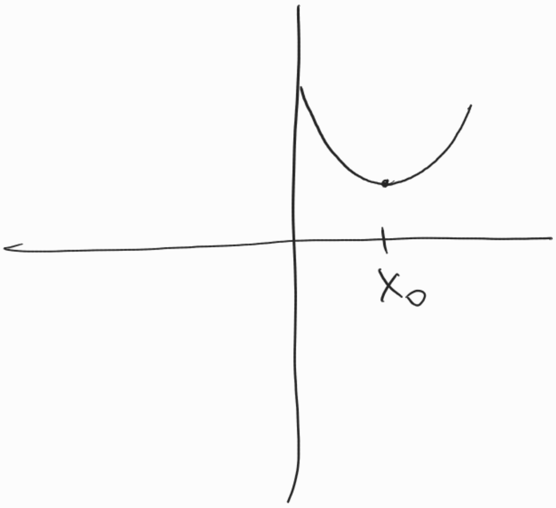
f sia convessa in un intorno destro di x_0

f sia concava in un intorno sinistro di x_0



$\Rightarrow$ f' crescente in un intorno destro di x_0

f' decrescente in un intorno sinistro di x_0



$y = f'(x)$

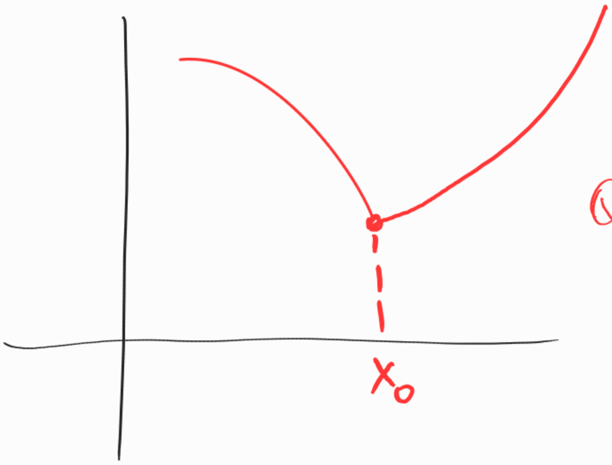
$\Rightarrow f'$ ha un minimo locale in x_0

Poiché f' è derivabile in x_0,

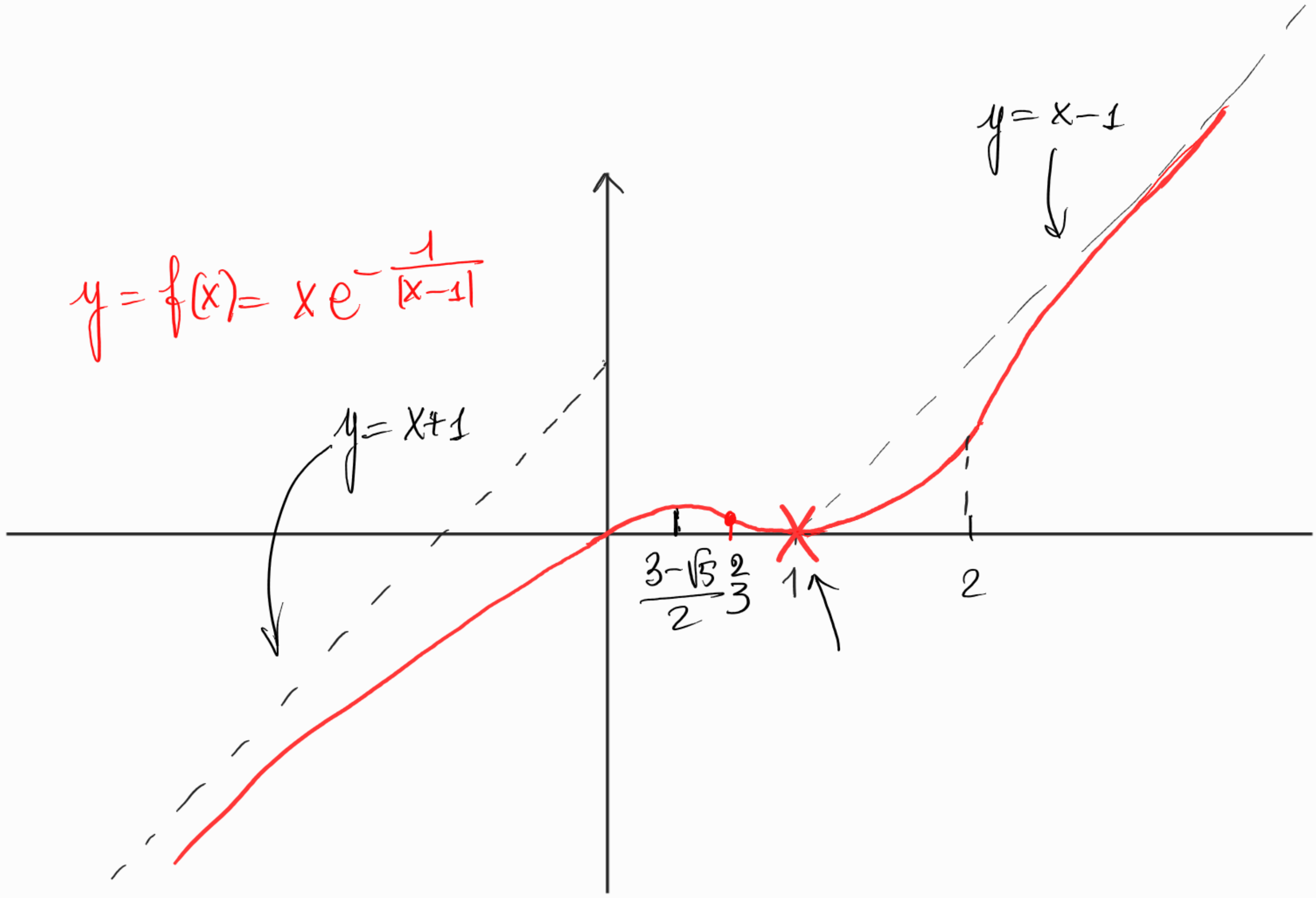
per Fermat $(f')'(x_0) = 0$

$$f''(x_0)$$

$\square$



Questo non è un flesso secondo la nostra definizione (non esiste la tangente nel punto)



$$f'(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x-1}} \boxed{\dfrac{x^2-x+1}{(x-1)^2}} & x>1 \\ e^{\frac{1}{x-1}} \dfrac{x^2-3x+1}{(x-1)^2} & x<1 \end{cases}$$

Calcolo di $f''(x)$

$$x>1 \quad f''(x) = \frac{e^{-\frac{1}{x-1}}}{(x-1)^2}\,\frac{(x^2-x+1)}{(x-1)^2} + e^{-\frac{1}{x-1}}\,\frac{(2x-1)(x-1)^2-(x^2-x+1)2(x-1)}{(x-1)^4} =$$

$$= \frac{e^{-\frac{1}{x-1}}}{(x-1)^4}\left[x^2-x+1+(2x-1)(x^2-2x+1)-(x^2-x+1)(2x-2)\right]$$

$$= \frac{e^{-\frac{1}{x-1}}}{(x-1)^4}\left[\cancel{x^2}-x+\cancel{1}+\cancel{2x^3}-\cancel{4x^2}+\cancel{2x}-\cancel{x^2}+\cancel{2x}-\cancel{1}+ -\cancel{2x^3}+\cancel{2x^2}+\cancel{2x^2}-\cancel{2x}-\cancel{2x}+2\right]$$

$$= \frac{e^{-\frac{1}{x-1}}}{(x-1)^4}(2-x) = f''(x) \quad \text{per } x>1.$$

$$f''(x) = 0 \iff x = 2$$

$$f''(x) > 0 \iff 1 < x < 2$$

$$f''(x) < 0 \iff x > 2.$$

f strett. convessa in $(1, 2]$

strett. concava in $[2, +\infty)$

$x = 2$ è pto di flesso.

$\boxed{x < 1}$ $\quad f'(x) = e^{\frac{1}{x-1}} \dfrac{x^2 - 3x + 1}{(x-1)^2} \qquad x < 1$

$$f''(x) = -\frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{(x-1)^2} \frac{x^2-3x+1}{(x-1)^2} + e^{\frac{1}{x-1}} \frac{(2x-3)(x-1)^2 - (x^2-3x+1)\,2(x-1)}{(x-1)^4} =$$

$$= \frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{(x-1)^4} \left[-x^2 + 3x - 1 + (2x-3)(x^2-2x+1) - (x^2-3x+1)(2x-2) \right]$$

$$= \frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{(x-1)^4} \left[\cancel{-x^2} + 3x - 1 + \cancel{2x^3} - \cancel{4x^2} + \cancel{2x} - \cancel{3x^2} + \cancel{6x} - 3 - \cancel{2x^3} + \cancel{2x^2} + \cancel{6x^2} - \cancel{6x} - \cancel{2x} + 2 \right]$$

$$= \frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{(x-1)^4} \left[3x - 2 \right] = f''(x)$$

$x < 1$

$$f''(x) = 0 \iff x = \frac{2}{3}$$

$$f''(x) > 0 \iff \frac{2}{3} < x < 1$$

$$f''(x) < 0 \iff x < \frac{2}{3}$$

f stett. convessa in $\left[\frac{2}{3}, 1\right)$

f stett. concava in $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right]$

$x = \frac{2}{3}$ è pto di flesso.

<u>Studio di funzione</u>

$$f(x) = x^{10} e^{-x^2}$$

Dominio : $\mathbb{R}$, f è pari $\Rightarrow$ la studio solo per $x \geq 0$.

$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ con il segno stretto per $x \neq 0$.

f continua in $\mathbb{R}$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{10}}{e^{x^2}} = \lim_{t \to +\infty} \frac{t^5}{e^t} = 0$$

$x^2 = t \to +\infty$

$y = 0$ è asint. orizz. per $x \to +\infty$

$$f'(x) = e^{-x^2}\left(-2x \cdot x^{10} + 10x^9\right) = e^{-x^2} 2x^9 (5 - x^2)$$

$f'(x) = 0 \iff (x = \sqrt{5}) \vee (x = 0)$

$f'(x) > 0 \iff 0 < x < \sqrt{5}$

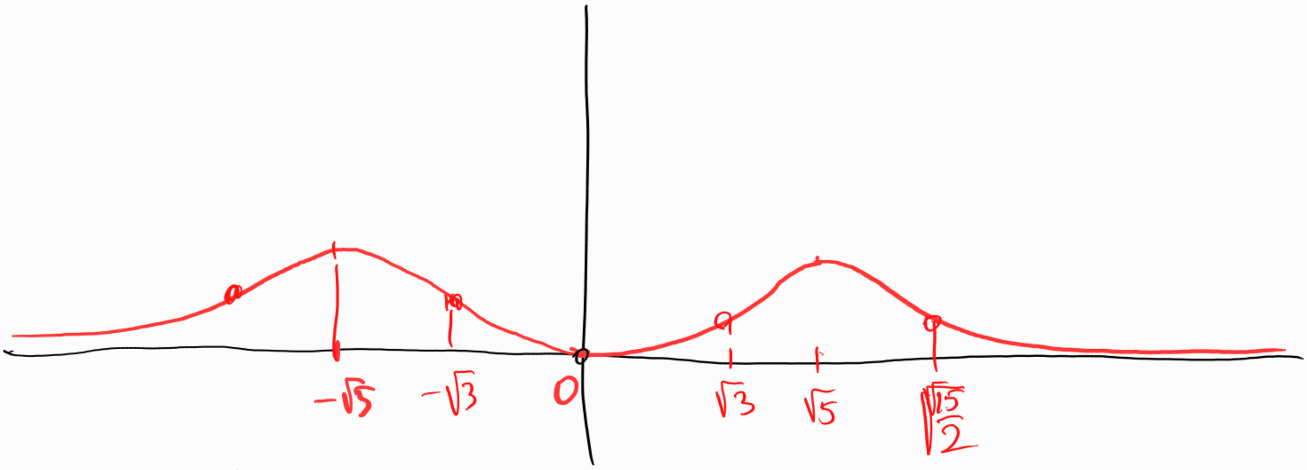
$f'(x) < 0 \iff x > \sqrt{5}$

f stett. crescente in $[0, \sqrt{5}]$,

stett. decresc. in $[\sqrt{5}, +\infty)$

$x = \sqrt{5}$ è pto di max. locale stretto

$x = 0$ è pto di min. assoluto.



$$f'(x) = e^{-x^2} 2x^9 (5 - x^2) = 2e^{-x^2}(5x^9 - x^{11})$$

$$f''(x) = 2\, e^{-x^2}\left[(-2x)(5x^9 - x^{11}) + 45x^8 - 11x^{10}\right] =$$

$$= 2e^{-x^2}(-10x^{10} + 2x^{12} + 45x^8 - 11x^{10}) =$$

$$= 2e^{-x^2} x^8 (2x^4 - 21x^2 + 45)$$

$$f''(x) = 0 \iff (x = 0) \vee (x = \sqrt{3}) \vee \left(x = \sqrt{\frac{15}{2}}\right)$$

$$2x^4 - 21x^2 + 45 = 0$$

$$t = x^2 \qquad 2t^2 - 21t + 45 = 0$$

$$t = \frac{21 \pm \sqrt{441 - 360}}{4} =$$

$$= \frac{21 \pm 9}{4} = \begin{cases} 3 \\ \frac{15}{2} \end{cases}$$

$$x^2 = 3 \vee x^2 = \frac{15}{2}$$

$$f''(x) > 0 \iff 2x^4 - 21x^2 + 45 > 0 \iff$$

$$\iff (x^2 < 3) \vee \left(x^2 > \frac{15}{2}\right)$$

$$\iff (0 < x < \sqrt{3}) \vee \left(x > \sqrt{\frac{15}{2}}\right)$$

$f''(x) < 0 \iff \sqrt{3} < x < \sqrt{\frac{15}{2}}$

f strett. convessa in $[0, \sqrt{3}]$ e in $[\sqrt{\frac{15}{2}}, +\infty)$

anzi, in $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$

f strett. concava in $[\sqrt{3}, \sqrt{\frac{15}{2}}]$

$x = \sqrt{3}$ e $x = \sqrt{\frac{15}{2}}$ sono pti di flesso.