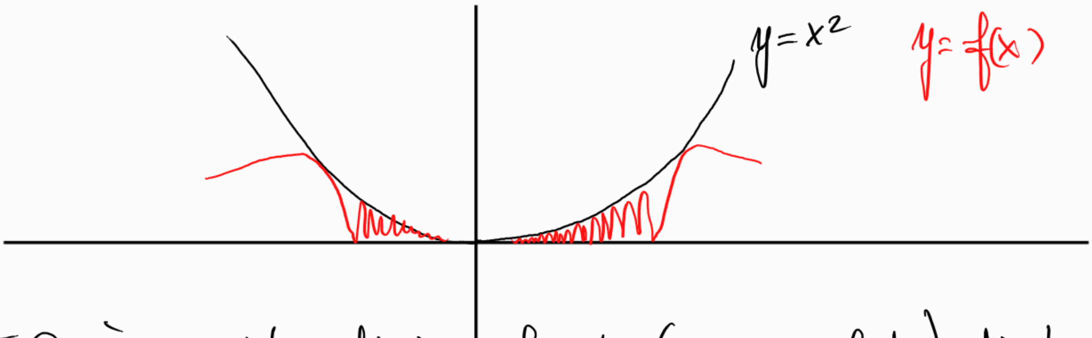
OSS. Negli esempi fatti abbiamo usato spesso questo ragionamento

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ decrescente in } (x_0-\delta, x_0] \\ f \text{ crescente in } [x_0, x_0+\delta) \end{array}\right| \rightarrow \quad x_0 \text{ è minimo locale di } f.$$

Ma la freccia $\boxed{\Leftarrow}$ è falsa in generale

Esempio $\quad f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$



$x=0$ è un pto di min. locale (anzi, assoluto) di f.

ma f non è crescente in nessun intorno destro di 0

" " decrescente " " sinistro di 0.

Studio di funzione

$$f(x) = x\, e^{-\frac{1}{|x-1|}} = \begin{cases} x\, e^{-\frac{1}{x-1}} & x > 1 \\ x\, e^{\frac{1}{x-1}} & x < 1 \end{cases}$$

Dominio: $\mathbb{R} \setminus \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

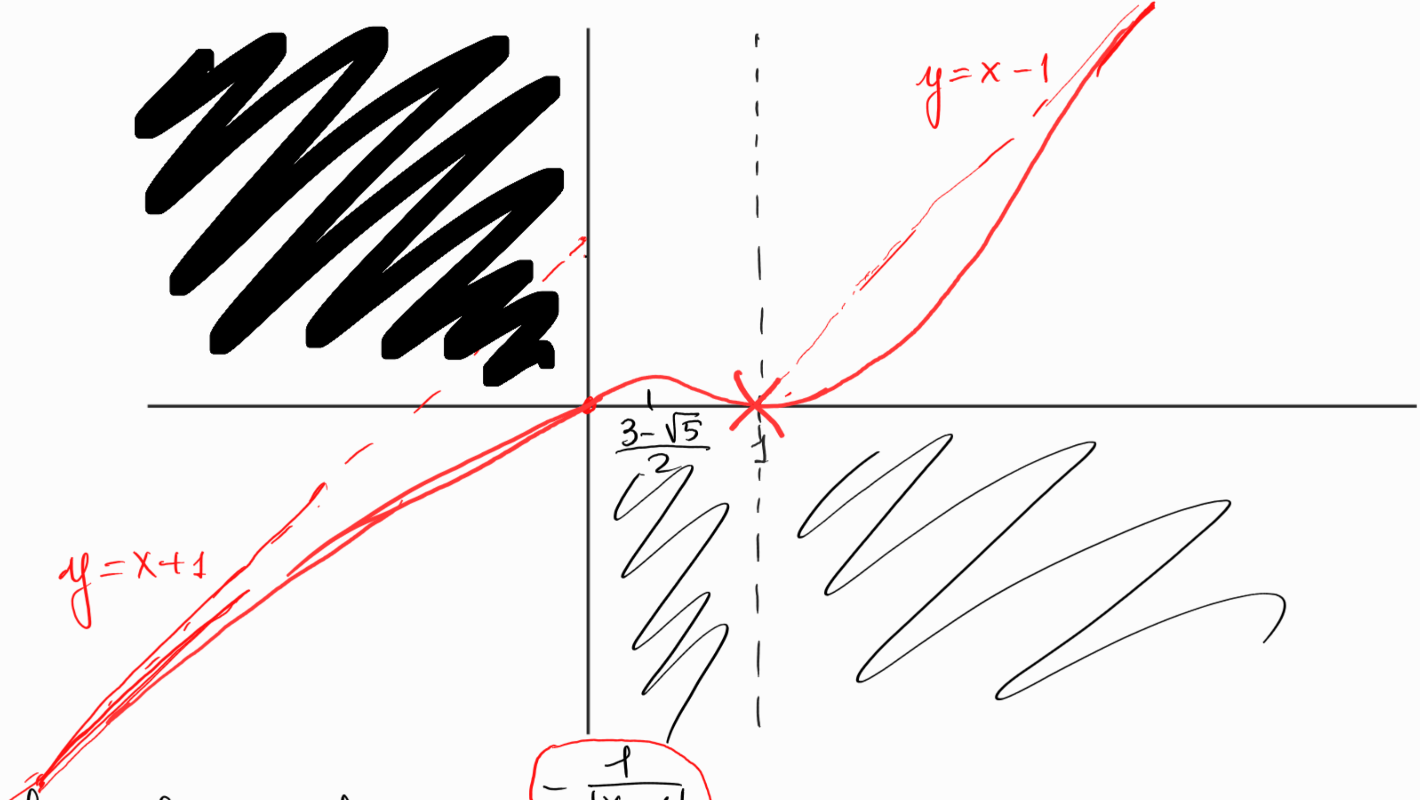
Segno: $\quad f(x) \gtreqless 0 \iff x \gtreqless 0.$

Continuità e limiti significativi

f è continua nel suo dominio

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{x}_{\downarrow\, +\infty}\, \underbrace{e^{-\frac{1}{|x-1|}}}_{\downarrow\, 1} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x\, e^{-\frac{1}{|x-1|}} = -\infty$$

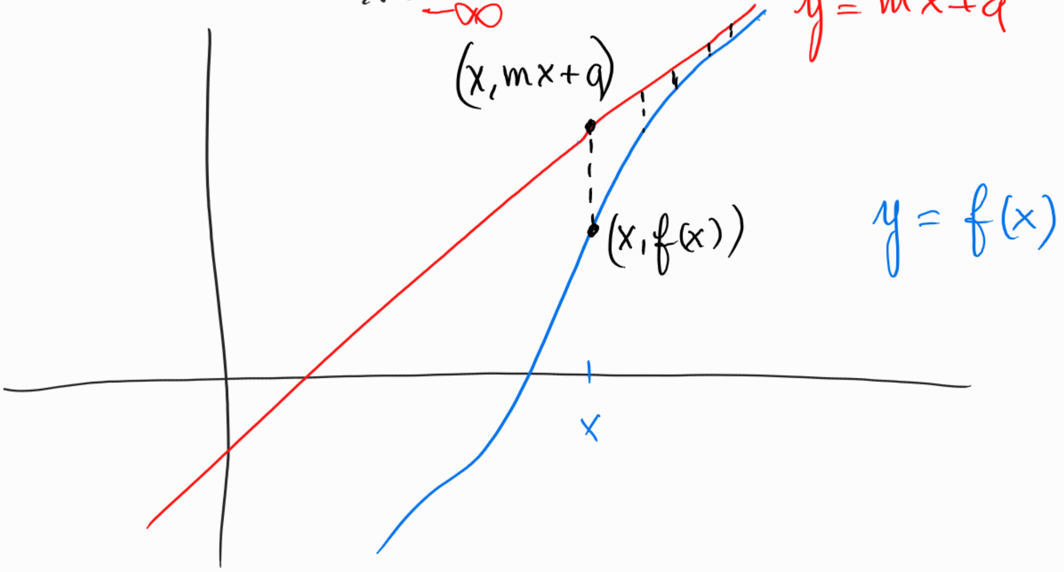


$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \underbrace{x}_{\downarrow\, 1}\ \underbrace{e^{\overbrace{-\frac{1}{|x-1|}}^{\downarrow\,-\infty}}}_{\downarrow\, 0} = 0$$

DEF Una retta di equazione $y = mx+q$ $(m \neq 0)$ si dice asintoto obliquo di f per $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$)

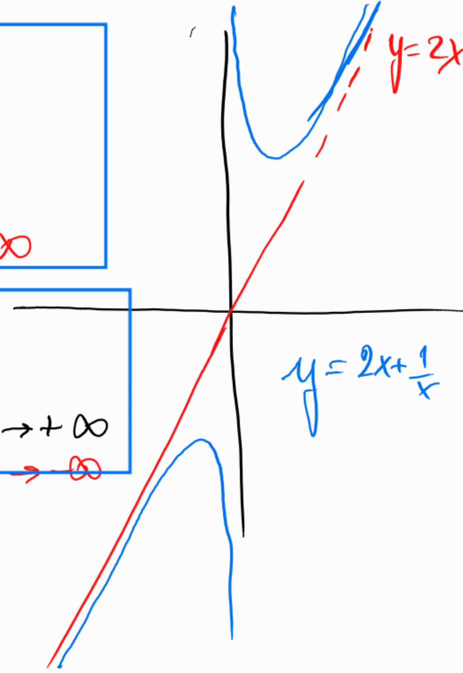
se $$\lim_{\substack{x\to+\infty \\ x\to-\infty}} \Big(f(x) - (mx+q)\Big) = 0 \qquad (*)$$

OSS $(*)$ equivale a $$\lim_{\substack{x\to+\infty \\ -\infty}} \big|f(x) - (mx+q)\big| = 0$$



Esempi: se $f(x) = 2x + \frac{1}{x}$

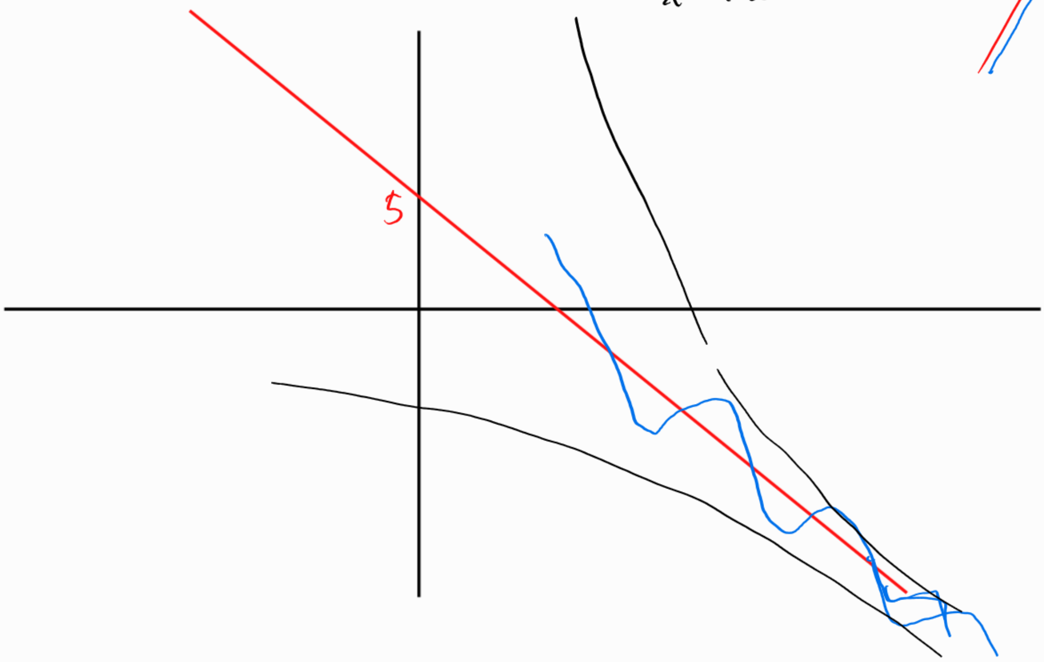
$y = 2x$ è asintoto obliquo per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$



Se $f(x) = -x + 5 + \frac{\sin x}{x}$

$y = -x + 5$ è asintoto obliquo di f per $x \to +\infty$, $x \to -\infty$

$$f(x) - (-x+5) = \frac{\sin x}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$



Come si trovano gli asintoti obliqui?

PROPOSIZIONE

$$\underbrace{\lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - (mx+q) \right) = 0}_{(*)} \iff \begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = m \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - mx \right) = q \end{cases}$$

$x \to -\infty$ (anche nei limiti a destra: $-\infty$)

Dim $\boxed{\Leftarrow}$ ovvia

$\boxed{\Rightarrow}$ $$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x) - mx - q + mx + q}{x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{f(x) - (mx+q)}{x} + m + \frac{q}{x} \right) = m \qquad \square$$

$\frac{f(x)-(mx+q)}{x} \to 0 \quad \left(\frac{0}{\infty}\right)$, $\quad \frac{q}{x} \to 0$

Da questa prop. segue l'unicità dell'asint. obliquo per $x \to +\infty$

$$\boxed{\text{Se uno dei due limiti a destra non esiste o è infinito, l'asintoto obliquo non esiste.}}$$

Torniamo alla nostra f.

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}\, e^{-\frac{1}{|x-1|}}}{\cancel{x}} = 1$$

$$q = \lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - 1\cdot x\right) = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{x}_{\to +\infty} \Big(\underbrace{e^{-\frac{1}{|x-1|}} - 1}_{\to 0}\Big) = (+\infty \cdot 0) =$$

$$\left[\begin{array}{l} e^t - 1 \sim t \quad \text{per } t \to 0 \\ \Rightarrow \quad e^{\overbrace{-\frac{1}{|x-1|}}^{\xrightarrow{x\to+\infty}\, 0}} - 1 \sim -\frac{1}{|x-1|} = \frac{1}{1-x} \qquad x \to +\infty \end{array}\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{1-x} = -1.$$

$y = mx + q = x - 1$ è asintoto obliquo di f per $x \to +\infty$

Stessa cosa per $x \to -\infty$,

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} e^{-\frac{1}{|x-1|}} = 1.$$

$$q = \lim_{x\to-\infty} \left(f(x) - x\right) = \lim_{x\to-\infty} x\Big(\underbrace{e^{-\frac{1}{|x-1|}} - 1}_{\sim -\frac{1}{|x-1|} = \frac{1}{x-1}}\Big) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x-1} = 1$$

$y = x + 1$ è asintoto obliquo di f per $x \to -\infty$.

OSS. Se estendessi f per $x=1$ ponendo $f(1)=0$, in altre parole considerando

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq 1 \\ 0 & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

essa risulta continua in $x=1$.

Diremo che f è <u>prolungabile con continuità</u> in $x=1$.

Derivata $$f(x) = x e^{-\frac{1}{|x-1|}}$$

f è derivabile nel suo dominio in quanto il punto in cui si annulla il valore assoluto è escluso dal dominio.

$$f'(x) = \left(x e^{\frac{1}{1-x}}\right)' = e^{\frac{1}{1-x}} \left(1 + \frac{x}{(1-x)^2}\right) \qquad x>1$$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = + \frac{1}{(1-x)^2} \qquad = \frac{e^{\frac{1}{1-x}}}{(1-x)^2}(x^2-x+1)$$

$$f'(x) = \left(x e^{\frac{1}{x-1}}\right)' = e^{\frac{1}{x-1}} \left(1 - \frac{x}{(x-1)^2}\right) = \qquad x<1$$

$$= \frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{(x-1)^2}\left(x^2-3x-1\right)$$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{\frac{1}{|x-1|}}}{(x-1)^2}(x^2-x+1) & x>1 \\ \text{idem } (x^2-3x+1) & x<1. \end{cases}$$

$f'(x)=0$

$\boxed{x>1}$ $\quad x^2-x+1=0$ mai, il polinomio è sempre >0

per $x>1$ $\quad f'(x)>0$

$\boxed{x<1}$ $\quad f'(x)=0 \iff x^2-3x+1=0$

$$\iff x = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \frac{3\pm\sqrt5}{2}$$

solo $x = \frac{3-\sqrt5}{2}$ è accettabile

$$f'(x)=0 \iff x = \frac{3-\sqrt5}{2} \approx 0{,}4$$

$$f'(x)>0 \iff x^2-3x+1>0 \iff \left(x<\frac{3-\sqrt5}{2}\right) \vee \cancel{\left(x>\frac{3+\sqrt5}{2}\right)}$$

$$\overset{x<1}{\iff} x < \frac{3-\sqrt5}{2}$$

$$f'(x)<0 \iff \frac{3-\sqrt5}{2} < x < \frac{3+\sqrt5}{2} \overset{x<1}{\iff} \frac{3-\sqrt5}{2} < x < 1.$$

Riassumendo:

f è strett. crescente in $\left(-\infty, \frac{3-\sqrt5}{2}\right]$ e in $(1,+\infty)$

f è strett. decrescente in $\left[\frac{3-\sqrt5}{2}, 1\right)$

Il punto $x = \frac{3-\sqrt5}{2}$ è pto di max. locale stretto per f.

La funzione (continua) $\tilde f(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq 1 \\ 0 & \text{se } x=1. \end{cases}$

è derivabile in $x=1$?

$$\tilde f'_+(1) \underset{\tilde f \text{ continua in } 1}{=} \lim_{x\to1^+} \tilde f'(x) = \lim_{x\to1^+} f'(x) = \lim_{x\to1^+} \frac{\overset{\to 0}{e^{-\frac{1}{|x-1|}}}}{\underset{\to 0}{(x-1)^2}} \underset{\to 1}{(x^2-x+1)}$$

$$= \lim_{x\to1^+} \frac{e^{-\frac{1}{|x-1|}}}{(x-1)^2} = \lim_{t\to+\infty} t^2 e^{-t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^2}{e^t} = 0$$

$t = \frac{1}{|x-1|} \to +\infty$

$$\tilde{f}'_-(1) = \lim_{x \to 1^-} f'(x) = \lim_{x \to 1^-} \underbrace{\frac{e^{-\frac{1}{|x-1|}}}{(x-1)^2}}_{\to 0} \underbrace{(x^2-3x+1)}_{\to -1} = 0$$

$\Rightarrow$ $\tilde{f}$ è derivabile in $x=1$

$\tilde{f}'(1) = 0$

Derivata seconda

Sia f derivabile in $E \subseteq \mathbb{R}$, $f' : E \to \mathbb{R}$

Sia $x_0 \in E$. Diremo che f è **derivabile due volte** in x_0 se f' è derivabile in x_0, cioè se esiste finito il limite

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0+h) - f'(x_0)}{h}$$

derivata seconda di f in x_0

Altre notazioni: $\frac{d^2 f}{dx^2}(x_0) = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)(x_0)$

$D^2 f(x_0)$

Esempi:

$f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x \Rightarrow f''(x) = 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin x \Rightarrow f''(x) = -\cos x \quad$ "

$f(x) = \cos(\log x) \quad \forall x > 0$

$f'(x) = -\frac{\sin(\log x)}{x}$

$$f''(x) = -\frac{\frac{\cos(\log x)}{\cancel{x}}\,\cancel{x} - \sin(\log x)}{x^2} = \frac{\sin(\log x) - \cos(\log x)}{x^2}$$

$\forall x > 0$

$$f(x) = x^{5/3}$$

$$f'(x) = \frac{5}{3} x^{2/3} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$f''(x) = \frac{5}{3} \cdot \frac{2}{3} x^{-1/3} = \frac{10}{9} x^{-1/3} \qquad \forall x \neq 0.$$

E in $x=0$? da finire