$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2 e^{3n}\overbrace{n!}^{\to+\infty} + \overbrace{\sin(n!)}^{\text{limitato}}}{n^n + e^{3n}} = \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\boxed{\frac{n^2 e^{3n} n!}{n^n}}}_{= a_n}$$

$Num \sim n^2 e^{3n} n!$

$Den \sim n^n$

$$n^n + e^{3n} = n^n \underbrace{\Big(1 + \underbrace{\frac{e^{3n}}{n^n}}_{\to 0}\Big)}_{\to 1} \sim n^n$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^2 \cancel{e^{3n+3}} \cancel{(n+1)!}}{(n+1)^{n+\cancel{1}}} \cdot \frac{n^n}{n^2 \cancel{e^{3n}} \cancel{n!}} =$$

1

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{e^3 n^n}{(n+1)^n} = e^2 > 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty.$$

$$\frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e}$$

$$f(x) = \frac{e^{|x+1|}}{e^x - 1} = \begin{cases} \dfrac{e^{x+1}}{e^x-1} & \text{se } x \geq -1,\ x \neq 0 \\[2mm] \dfrac{e^{-x-1}}{e^x-1} & \text{se } x < -1 \end{cases}$$

derivabilità

<u>dom</u> $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\boxed{x \geq -1,\ x \neq 0} \Rightarrow$ $$f'(x) = \frac{e^{x+1}(\cancel{e^x}-1) - \cancel{e^{x+1}(e^x)}}{(e^x-1)^2} = \frac{-e^{x+1}}{(e^x-1)^2}$$

$\boxed{x < -1} \Rightarrow$ $$f'(x) = \frac{-e^{-x-1}(e^x-1) - e^{-x-1}e^x}{(e^x-1)^2} =$$

$$= \frac{e^{-x-1}\left(-e^{x}+1-e^{x}\right)}{\left(e^{x}-1\right)^2} = \frac{e^{-x-1}\left(1-2e^{x}\right)}{\left(e^{x}-1\right)^2}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{e^{x+1}}{(e^x-1)^2} & x > -1 \quad (x \neq 0) \\ \dfrac{e^{-x-1}\left(1-2e^x\right)}{(e^x-1)^2} & x < -1. \end{cases}$$

Derivabilità in $x = -1$ (dove f è continua)

$$\lim_{x\to -1^+} f'(x) = \lim_{x\to-1^+}\left(-\frac{\overset{\to 1}{e^{x+1}}}{\boxed{(e^x-1)^2}}\right) = -\frac{1}{(e^{-1}-1)^2} = -\frac{1}{\left(\frac{1}{e}-1\right)^2}$$

$$\boxed{(e^x-1)^2} \to (e^{-1}-1)^2$$

$$= -\frac{e^2}{(e-1)^2} = -\left(\frac{e}{e-1}\right)^2$$

Teor. $\Longrightarrow$ $f'_+(-1) = -\left(\dfrac{e}{e-1}\right)^2$

$$\lim_{x\to-1^-} f'(x) = \lim_{x\to-1^-} \frac{\overset{\to 1}{e^{-x-1}}\,\overset{\to 1-2e^{-1} = \frac{e-2}{e}}{\left(1-2e^x\right)}}{\underbrace{(e^x-1)^2}_{\left(\frac{1}{e}-1\right)^2 = \left(\frac{e-1}{e}\right)^2}} = \frac{e-2}{\cancel{e}} \cdot \frac{e^{\cancel{2}}}{(e-1)^2}$$

Teor $\Longrightarrow$ $f'_-(-1) = \dfrac{e(e-2)}{(e-1)^2}$

$x = -1$ è punto angoloso.

$$f(x) = \sin\frac{x}{|x|+1} + 2x$$

1) studiare se è iniettiva nel suo dominio.

2) Calcolare, se esiste, la derivata di f^{-1} nei pti $y=0$
$y = 1 + \sin\frac{1}{3}$

dom $f = \mathbb{R}$ $\quad$ f continua in $\mathbb{R}$.

Problema di derivabilità in $x=0$

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{x}{x+1}\right) + 2x & \text{se } x \geq 0 \\ \sin\left(\frac{x}{1-x}\right) + 2x & x < 0 \end{cases}$$

$\boxed{x>0}$

$$f'(x) = \cos\left(\frac{x}{x+1}\right) \cdot \frac{1}{(x+1)^2} + 2$$

$$\left(\frac{x}{x+1}\right)' = \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)' = \frac{1}{(x+1)^2}$$

$\boxed{x<0}$

$$f'(x) = \cos\left(\frac{x}{1-x}\right) \frac{1}{(1-x)^2} + 2$$

$$\left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1-x+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{x}{x+1}\right) \frac{1}{(x+1)^2} + 2 & x>0 \\ \cos\left(\frac{x}{1-x}\right) \frac{1}{(1-x)^2} + 2 & x<0. \end{cases}$$

$$\cos\left(\frac{x}{1+|x|}\right) \frac{1}{(1+|x|)^2} + 2$$

In modo più efficiente.

f è dispari $\Rightarrow$ f' è pari. $\Rightarrow$ calcolo f' solo per $x>0$

$\boxed{x>0}$ $f'(x) = \cos\left(\frac{x}{x+1}\right)\frac{1}{(x+1)^2} + 2$

$\underset{f' \text{ è pari}}{\Longrightarrow}$ per $x<0$ $f'(x) = \cos\left(\frac{|x|}{|x|+1}\right)\frac{1}{(|x|+1)^2} + 2$

$\Rightarrow f'(x) = \cos\left(\frac{|x|}{|x|+1}\right)\frac{1}{(|x|+1)^2} + 2 \qquad \forall x \neq 0.$

Derivabilità nell'origine (non richiesto)

$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\underbrace{\cos\left(\frac{x}{x+1}\right)}_{\downarrow \; \cos 0 = 1}\underbrace{\frac{1}{(x+1)^2}}_{\downarrow \; 1} + 2\right) = 3.$

$f'_-(0) = 3$ $\Rightarrow$ f è derivabile in $x=0$

$\uparrow$ f' è pari

$\longrightarrow \boxed{f'(x) = \cos\left(\frac{|x|}{|x|+1}\right)\frac{1}{(|x|+1)^2} + 2 \qquad \forall x \in \mathbb{R}}$

Studio il segno di questa derivata. Basta studiarla per $x \geq 0$

$f'(x) = \underbrace{\cos\left(\frac{x}{x+1}\right)}_{>0}\underbrace{\frac{1}{(x+1)^2}}_{>0} + \underbrace{2}_{>0} > 0.$

OSS $\quad 0 \leq \frac{x}{x+1} < 1 \Rightarrow$ sta nel 1° quadrante

f strett. crescente in $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ iniettiva.

$\operatorname{im} f = \mathbb{R}$

$\sup f = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad \inf f = -\infty$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ biettiva.

$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$y \longmapsto$ l'unico $x \in \mathbb{R}$ t.c. $\sin\left(\frac{x}{|x|+1}\right) + 2x = y.$

$(f^{-1})'(0) \qquad y=0 \Leftrightarrow x=0$

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{3}$$

$$(f^{-1})'\left(1+\sin\frac{1}{3}\right) = \qquad \boxed{y = 1+\sin\frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{f'\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{\cos\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{\left(\frac{1}{2}+1\right)^2}+2} = \frac{1}{\cos\left(\frac{1}{3}\right)\frac{4}{9}+2}$$

Nella 1^a parte avrei potuto ragionare come segue

$\left.\begin{array}{l} f \text{ è strett. crescente in } [0,+\infty) \\ f \text{ è dispari} \end{array}\right| \Rightarrow f$ è strett. crescente in $\mathbb{R}$.

Studio di funzione $f(x) = \log\left(\frac{|x|}{8+x}\right) + x$

Dominio: $x > -8$, $x \neq 0$

$\text{dom } f = (-8,0) \cup (0,+\infty)$ Niente simmetrie, niente periodicità.

Continuità e limiti significativi:

continua nel suo dominio in quanto somma, rapporto, composizione di f. continue.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\underbrace{\log\left(\frac{x}{8+x}\right)}_{\downarrow\, 0} + \underbrace{x}_{\downarrow\, +\infty}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(\underbrace{\log\left(\frac{|x|}{8+x}\right)}_{\downarrow\, -\infty} + \underbrace{x}_{\downarrow\, 0}\right) = -\infty .$$

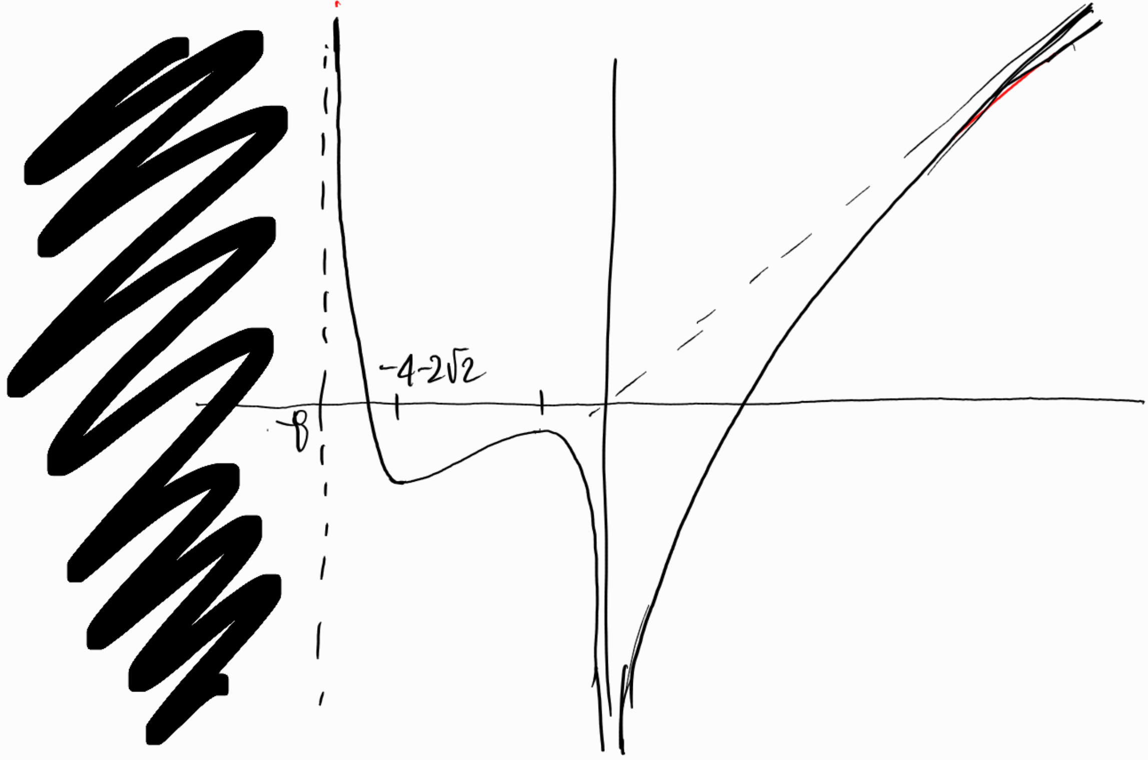
$$\lim_{x\to(-8)^+} f(x) = \lim_{x\to(-8)^+}\left(\underbrace{\log\left(\overbrace{\frac{|x|}{8+x}}^{+\infty}\right)}_{\downarrow\, +\infty} + \underbrace{x}_{\downarrow\, -8}\right) = +\infty .$$

$x = 0$ asintoto verticale

$x = -8$ " "

Ha come asintoto obliquo la retta $y = x$ per $x \to +\infty$

Derivata prima: f è derivabile nel suo dominio (l'unico punto problematico per la derivabilità sarebbe $x=0$, che è escluso dal dominio)



$$f(x) = \log\left(\frac{|x|}{8+x}\right) + x = \log|x| - \log(8+x) + x$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{8+x} + 1 = \qquad \forall x \in \text{dom } f.$$

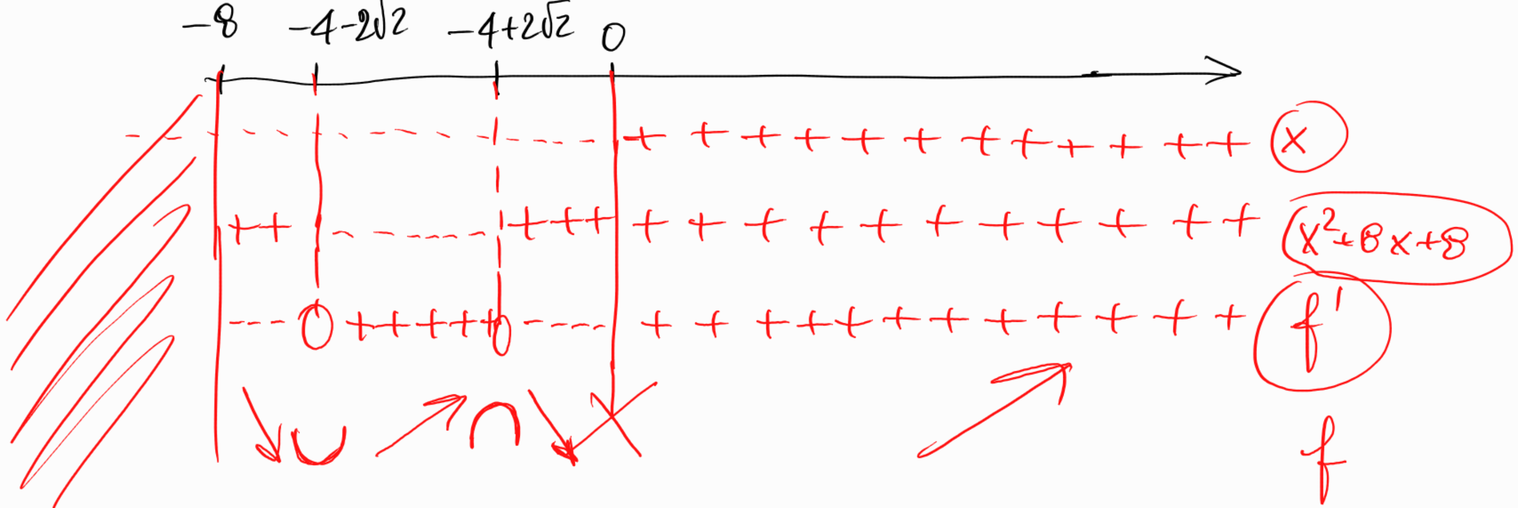
$$= \frac{8+\cancel{x}-\cancel{x}+x(8+x)}{x(8+x)} = \frac{x^2+8x+8}{x(8+x)}$$

$$f'(x) = 0 \iff x^2+8x+8=0 \iff x = -4 \pm \sqrt{16-8} =$$

$$= -4 \pm 2\sqrt{2}$$

accettabili

$$f'(x) > 0 \iff \frac{x^2+8x+8}{x\cancel{(8+x)}} > 0$$



$f'(x) > 0 \iff x \in (-4-2\sqrt{2}, -4+2\sqrt{2}) \cup (0, +\infty)$

$f'(x) < 0 \iff x \in (-8, -4-2\sqrt{2}) \cup (-4+2\sqrt{2}, 0)$

f strett. crescente in $[-4-2\sqrt{2}, -4+2\sqrt{2}]$ e in $(0, +\infty)$

$\cancel{\cup}$

f strett decrescente in $(-8, -4-2\sqrt{2}]$ e in $[-4+2\sqrt{2}, 0)$

$x = -4-2\sqrt{2}$ è un punto di min locale stretto

$x = -4+2\sqrt{2}$ è un punto di max locale stretto.