CRITERIO DIFFERENZIALE DI MONOTONIA

f continua in I intervallo, f derivabile nei punti interni di I.
Allora

f crescente in $I \iff f'(x) \geq 0 \quad \forall x$ interno a I.
decrescente $\qquad\qquad \leq 0$

f strett. crescente in $I \Leftarrow f'(x) > 0 \quad \forall x$ interno a I
strett. decrescente $\qquad\qquad < 0$

CONSEGUENZA:

f costante in $I \implies f'(x) = 0 \quad \forall x \in I$

Vale anche il viceversa:

se $f'(x) = 0 \ \forall x \in I \implies f$ crescente e decrescente in I

$\implies f$ costante in I.

Quindi, si ha: $\boxed{f \text{ costante in } I \iff f'(x) = 0 \ \forall x \in I}$

Usiamo quest'ultimo corollario per provare delle identità.

Proviamo che $\boxed{\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x \qquad \forall x \in [-1,1].}$

Poniamo $f(x) = \arccos x + \arcsin x$ continua in $[-1,1]$

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \quad \forall x \in (-1,1)$$

$\implies f$ è costante in $[-1,1]$.

$$f(x) = f(0) = \underbrace{\arccos 0}_{= \pi/2} + \underbrace{\arcsin 0}_{= 0} = \frac{\pi}{2} \quad \forall x \in [-1,1]$$

$f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} \qquad \text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0 \quad \forall x \in \text{dom } f.$$

$\Rightarrow f$ è costante in ciascuno dei due intervalli $(-\infty,0)$ e $(0,+\infty)$

in $(0,+\infty)$ $\quad f(x) = f(1) = \underbrace{\operatorname{arctg} 1}_{\pi/4} + \underbrace{\operatorname{arctg} 1}_{\pi/4} = \frac{\pi}{2} \quad \forall x \in (0,+\infty)$

Quindi:
$$\boxed{\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \qquad \forall x \in (0,+\infty)}$$

In $(-\infty,0)$ $\quad f(x) = f(-1) = \underbrace{\operatorname{arctg}(-1)}_{-\pi/4} + \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{2} \quad \forall x \in (-\infty,0)$

Applicazione:

Calcolare l'ordine di infinitesimo di
$$\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x \qquad \text{per } x \to +\infty$$

$$\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg}\Big(\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}\Big) \sim \frac{1}{x} \qquad \text{per } x \to +\infty$$

$\operatorname{arctg} t \sim t$ per $t \to 0$

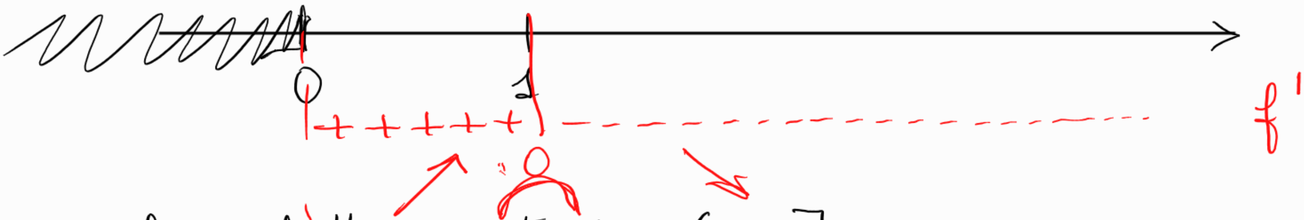
L'ordine di infinitesimo è 1.

Il criterio di monotonia è utile anche per provare disuguaglianze.

Proviamo che $\boxed{\log x \leq x - 1 \qquad \forall x > 0.}$

Prendiamo $f(x) = \log x - x + 1 \overset{?}{\leq} 0$. $\quad \operatorname{dom} f = (0,+\infty)$

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 1 \gtreqless 0 \iff x \lesseqgtr 1$$

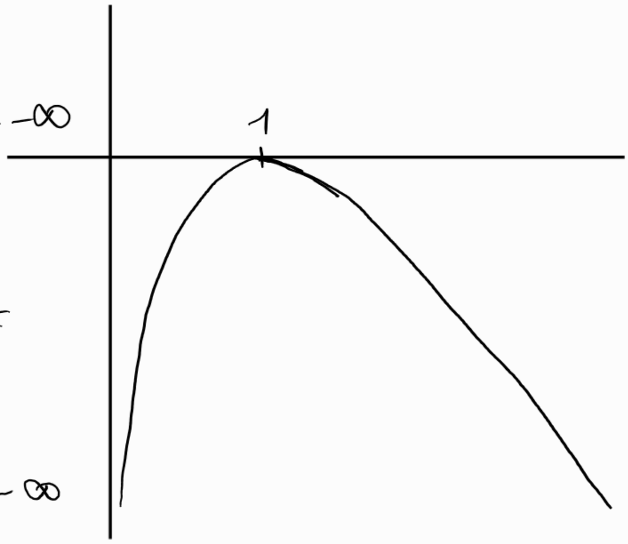


$\Rightarrow f$ è strett. crescente in $(0,1]$

f è strett. decrescente in $[1,+\infty)$

$\Rightarrow$ $x=1$ è pto di massimo assoluto

$$f(1) = \log 1 - 1 + 1 = 0$$



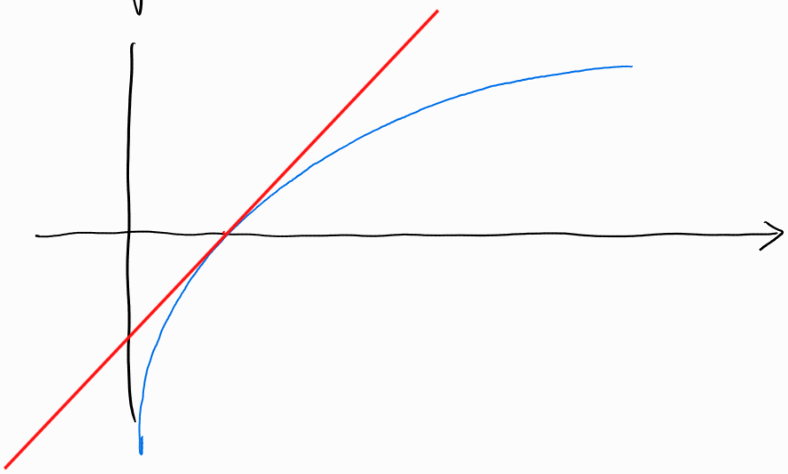
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(\underbrace{\log x}_{\to -\infty} \underbrace{-x+1}_{\to 0}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \left(\underbrace{\log x}_{\to +\infty} \underbrace{-x+1}_{\to -\infty}\right) =$$

$$= \lim_{x\to +\infty} x \left(\underbrace{\underbrace{\frac{\log x}{x}}_{\to 0} - 1 + \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}}_{\to -1}\right) = -\infty$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = \log x - x + 1 \le 0 \qquad \forall x > 0$$

$$\log x \le x - 1$$



$y = \log x$

$y = x - 1$

Esercizio: per casa Provare che $e^x \ge 1 + x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Studiare la monotonia di $f(x) = x + \sin x$

OSS f è dispari

$f(x+2\pi) = f(x) + 2\pi$

$\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$.

$f'(x) = 1 + \cos x \; > 0 \iff \cos x > -1 \iff x \ne \pi + 2k\pi. \; (k \in \mathbb{Z})$

$\qquad = 0 \iff \cos x = -1 \iff x = \pi + 2k\pi$

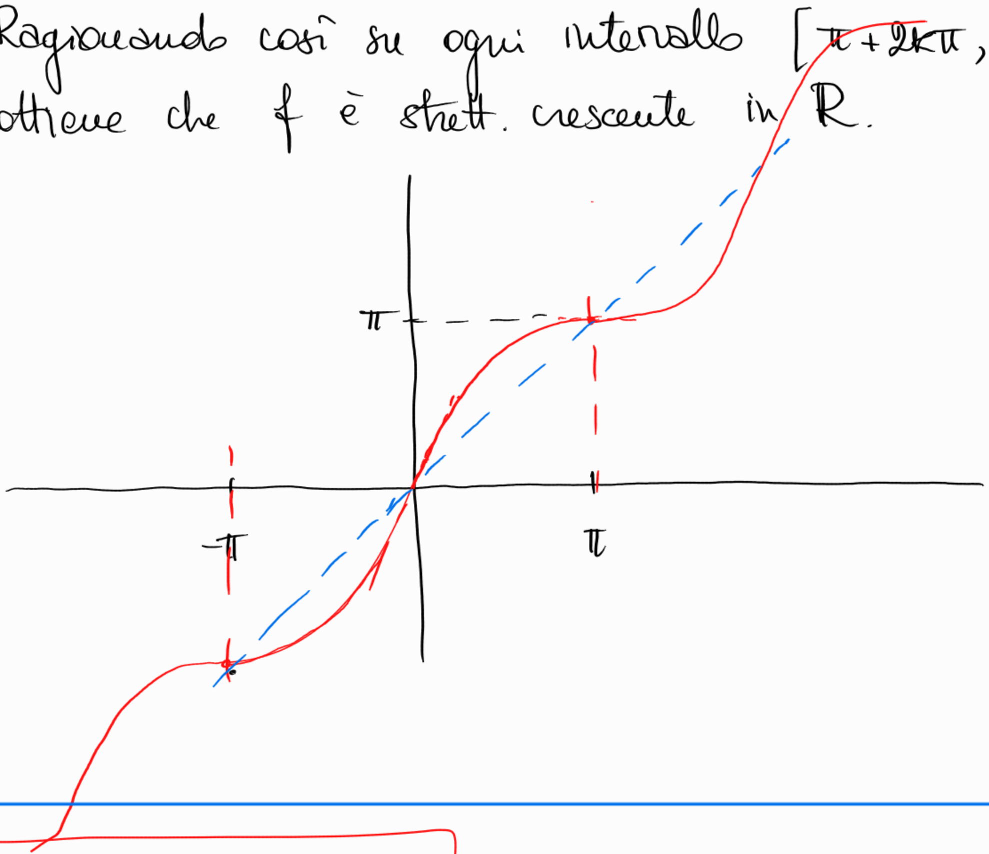
$\qquad < 0 \iff \cos x < -1 \iff$ mai

Applico il criterio di stretta monotonia all'intervallo $[-\pi, \pi]$.

$f'(x) > 0 \quad \forall x \in (-\pi, \pi) \Rightarrow f$ strett. crescente in $[-\pi, \pi]$

Stesso ragionamento $\Rightarrow f$ strett. crescente in $[\pi, 3\pi]$

Ragionando così su ogni intervallo $[\pi + 2k\pi, \pi + 2(k+1)\pi]$, si ottiene che f è strett. crescente in $\mathbb{R}$.



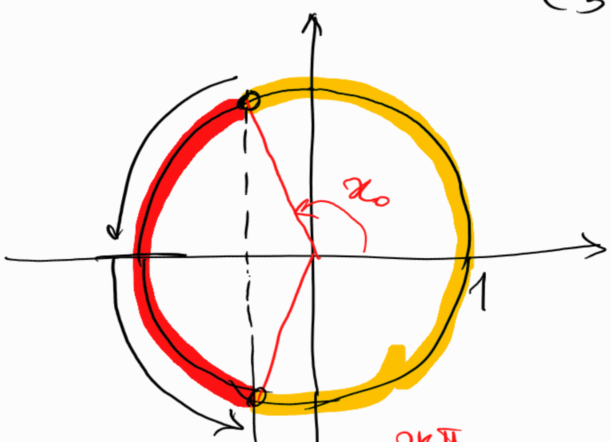
$$\boxed{f(x) = \frac{x}{3} + \sin x}$$

dom $f = \mathbb{R}$, f dispari.

$$f(x + 2\pi) = f(x) + \frac{2}{3}\pi$$

$$f'(x) = \frac{1}{3} + \cos x$$

$$f'(x) = 0 \iff \cos x = -1/3 \iff x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) + 2k\pi$$

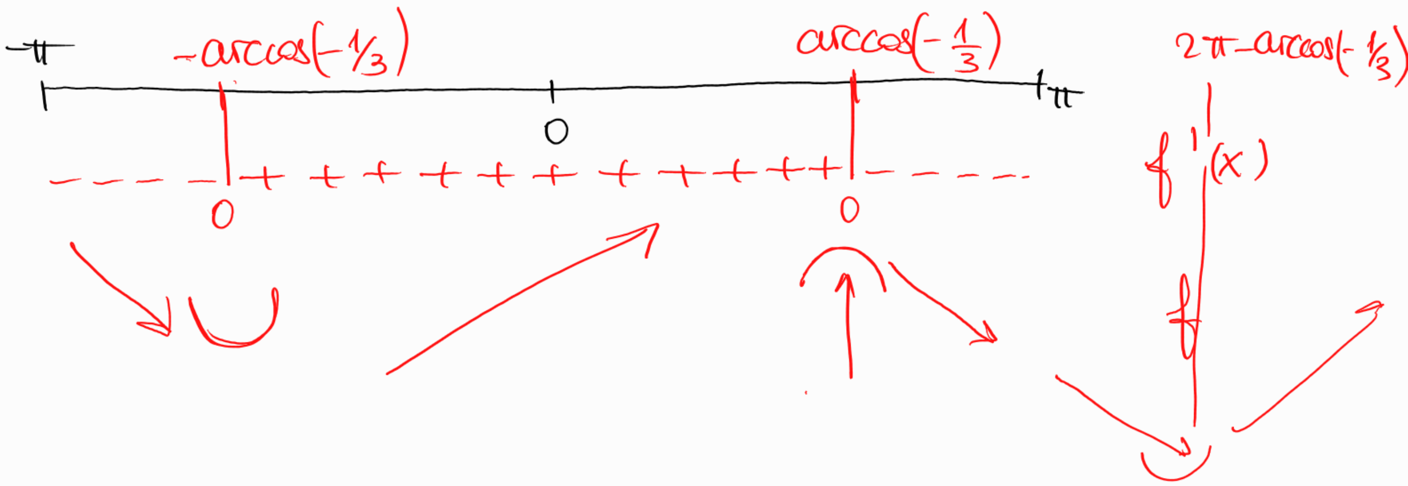


$$f'(x) > 0 \iff \cos x > -1/3 \iff -\arccos\left(-\frac{1}{3}\right) + 2k\pi < x < \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) + 2k\pi$$

$$f'(x)<0 \Rightarrow \cos x < -\frac{1}{3} \Leftrightarrow \arccos\left(-\tfrac{1}{3}\right) + 2k\pi < x < 2\pi - \arccos\left(-\tfrac{1}{3}\right) + 2k\pi$$

oppure (per rimanere in $[-\pi, \pi]$)

$$\left(-\pi \le x < -\arccos\left(-\tfrac{1}{3}\right)\right) \vee \left(\arccos -\tfrac{1}{3} < x \le \pi\right)$$

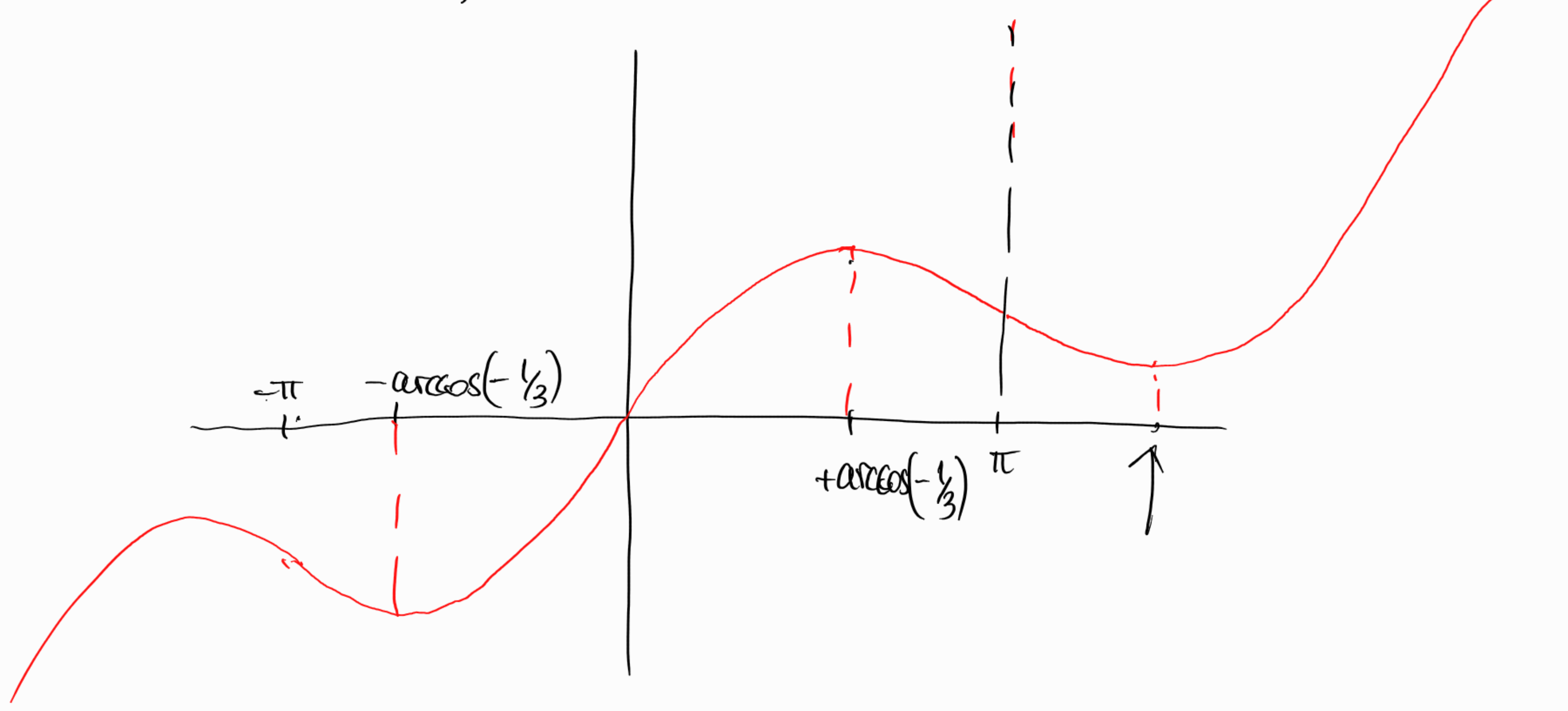


f strett. crescente in $\left[-\arccos\left(-\tfrac{1}{3}\right) + 2k\pi, \arccos\left(-\tfrac{1}{3}\right) + 2k\pi\right]$

f strett. decrescente in $\left[\arccos\left(-\tfrac{1}{3}\right) + 2k\pi, 2\pi - \arccos\left(-\tfrac{1}{3}\right) + 2k\pi\right]$

$x = \arccos\left(-\tfrac{1}{3}\right) + 2k\pi$ sono pti di max locale stretto

$x = -\arccos\left(-\tfrac{1}{3}\right) + 2k\pi$ " " " min. locale stretto



OSS $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$

Trovare estremi locali e assoluti di

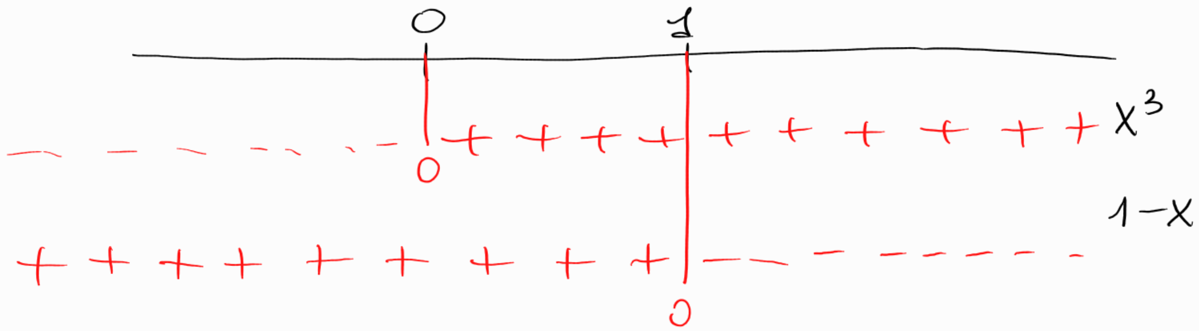
$$f(x) = x^3(1-x) = x^3 - x^4$$

dom $f = \mathbb{R}$, non ci sono simmetrie apparenti

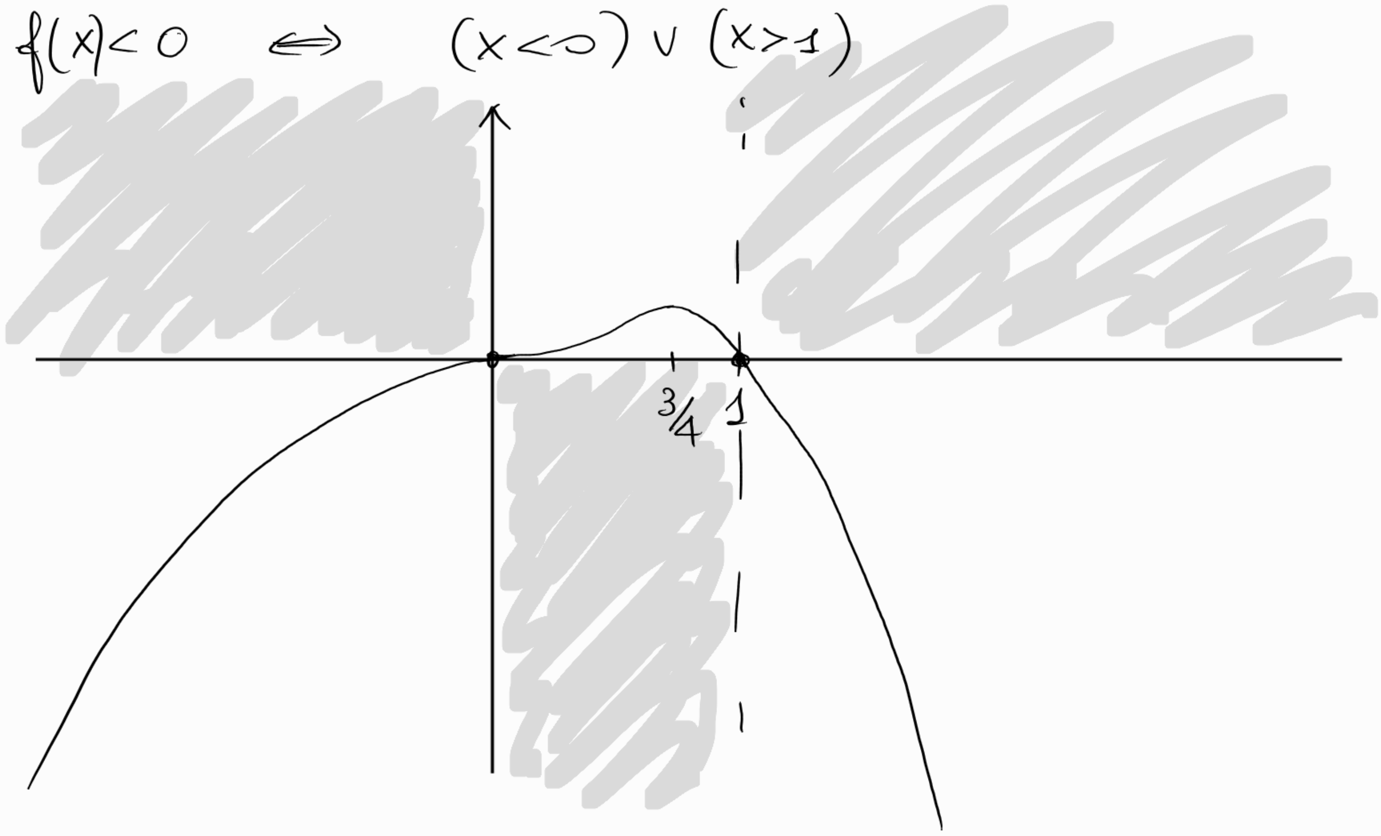
$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = -\infty$$

Segno di f: $\quad f(x) = 0 \iff (x=0) \vee (x=1)$

$f(x) > 0 \iff 0 < x < 1$



$f(x) < 0 \iff (x<0) \vee (x>1)$



$$f'(x) = (x^3 - x^4)' = 3x^2 - 4x^3 = x^2(3-4x)$$

$f'(x) = 0 \iff (x=0) \vee \left(x = \frac{3}{4}\right)$

$f'(x) > 0 \iff \left(x < \frac{3}{4}\right) \wedge (x \neq 0) \iff x \in (-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{3}{4}\right)$

$$f'(x)<0 \iff x>\frac{3}{4}$$

f strett. crescente in $(-\infty,0]$ e in $\left[0,\frac{3}{4}\right]$, quindi in $\left(-\infty,\frac{3}{4}\right]$

f strett. decrescente in $\left[\frac{3}{4},+\infty\right)$.

$x=\frac{3}{4}$ è pto di max. assoluto.

$x=0$ è pto critico di f ma non è estremo locale.

$$f\left(\frac{3}{4}\right)=\max f=\left(\frac{3}{4}\right)^3\cdot\frac{1}{4}=\frac{27}{256}$$

Estremi locali e assoluti di

$$f(x)=\underbrace{x^{-4}-2x^{-2}}=\underbrace{\frac{1}{x^4}-\frac{2}{x^2}}=\frac{1-2x^2}{x^4}$$

$\text{dom} f=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

f è pari $\Rightarrow$ la studio solo per $x>0$.

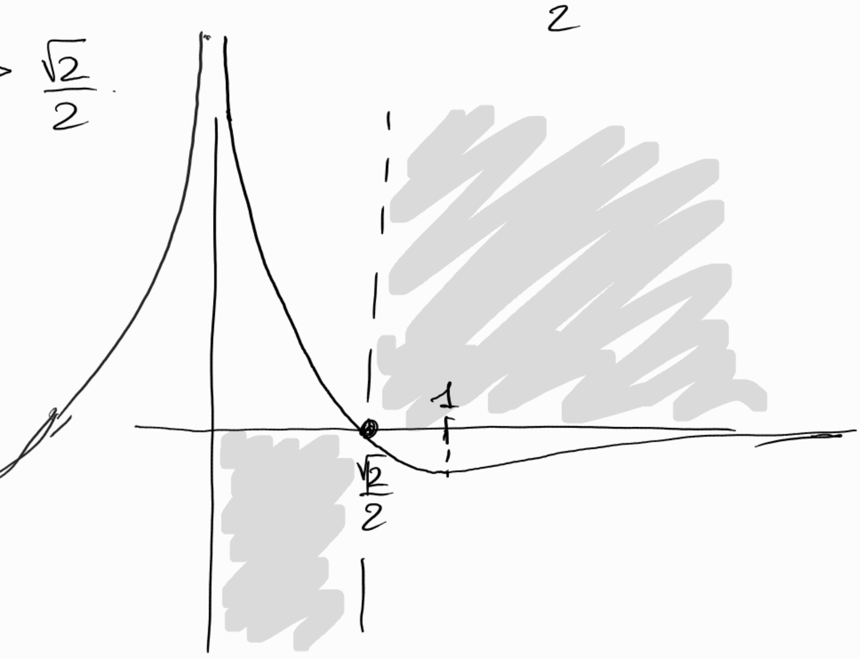
$$f(x)=0 \iff x=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f(x)>0 \iff 1-2x^2>0 \iff 0<x<\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f(x)<0 \iff x>\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=+\infty$$



$$f'(x)=-4x^{-5}+2\cdot2x^{-3}=$$

$$=4\left(-\frac{1}{x^5}+\frac{1}{x^3}\right)=$$

$$=4\,\frac{x^2-1}{x^5}$$

$f'(x) = 0 \iff x = 1$

$f'(x) > 0 \iff x > 1$

$ < 0 \iff 0 < x < 1$

f strett. crescente in $[1, +\infty)$

f strett. decrescente in $(0, 1]$

$x = 1$ è pto di min. assoluto.

Asintoto verticale di f.

Sia $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. La retta di eq^{ne} $x = x_0$ si dice **asintoto verticale** di f se $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$ oppure

$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty$

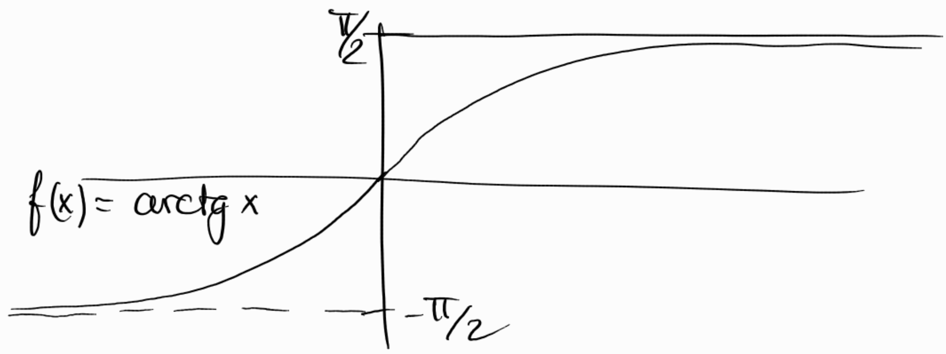
Nel caso visto, la retta $x = 0$ è asintoto verticale di $f(x) = \frac{1}{x^4} - \frac{2}{x^2}$

Asintoto orizzontale di f

La retta $y = y_0$ $(y_0 \in \mathbb{R})$ si dice **asintoto orizzontale di f** per $x \to +\infty$ (o per $x \to -\infty$) se $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = y_0$ (oppure $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = y_0$).

Nel caso appena studiato, la retta $\underbrace{y = 0}_{\text{asse } x}$ è asintoto orizzontale di $f(x) = \frac{1}{x^4} - \frac{2}{x^2}$ per $x \to \pm\infty$

$f(x) = \operatorname{arctg} x$



$y = \frac{\pi}{2}$ è asintoto orizz. di $f(x) = \operatorname{arctg} x$ per $x \to +\infty$.

$y = -\frac{\pi}{2}$ è asint. orizz. di $f(x) = \operatorname{arctg} x$

per $x \to -\infty$.