Come conseguenza dei precedenti risultato, ogni funzione costruita a partire da funzioni derivabili con le quattro operazioni e composizioni è derivabile nel suo dominio. Per esempio,

$$f(x) = \frac{\log(x^4+3x^2+7)\sin e^x}{x^2 + \left(\operatorname{tg}\left(\frac{3}{1+x^2}\right)\right)^3}$$ è derivabile nel suo dominio.

$$f(x) = \sqrt{|x|} = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{se } x \geq 0 \\ \sqrt{-x} & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

dominio: $\mathbb{R}$, continua in $\mathbb{R}$, derivabile (almeno) in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

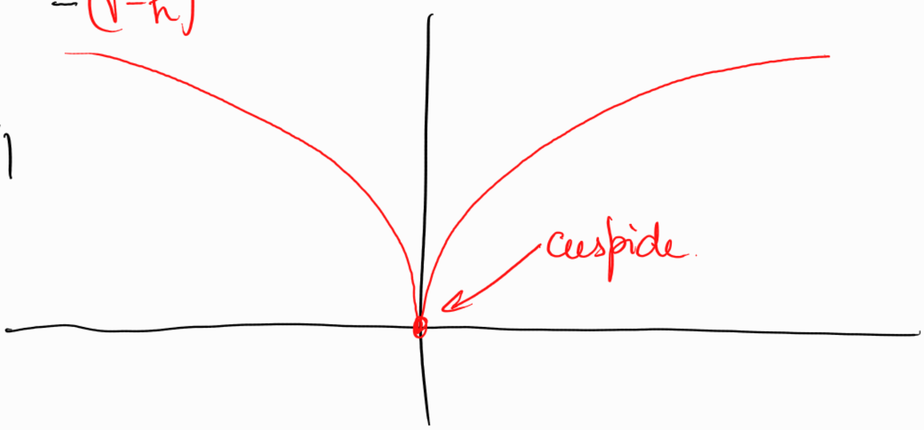
$$\left.\begin{array}{ll} \text{se } x>0 & f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \\ \text{se } x<0 & f'(x) = -\dfrac{1}{2\sqrt{-x}} \end{array}\right\} = \frac{\operatorname{sign} x}{2\sqrt{|x|}} \quad \text{per } x \neq 0.$$

$\boxed{x=0}$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{|h|} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{|h|}}{h} \quad \nexists$$

$$\left.\begin{array}{l} f'_+(0) = \displaystyle\lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{h}}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty \\ f'_-(0) = \displaystyle\lim_{h\to 0^-} \frac{\sqrt{-h}}{\underset{\displaystyle -(\sqrt{-h})^2}{\underset{\shortparallel}{h}}} = \lim_{h\to 0}\left(-\frac{1}{\sqrt{-h}}\right) = -\infty \end{array}\right| \Rightarrow f \text{ non è derivabile in } x=0$$

$y = \sqrt{|x|}$

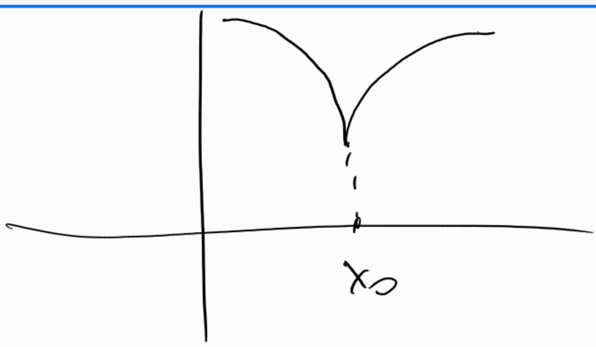


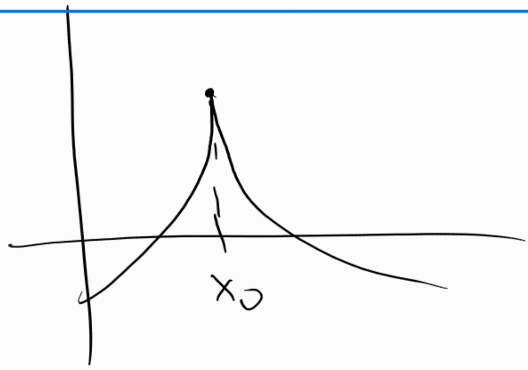
Def. Se

i) f è continua in x_0;

ii) $f'_+(x_0) = +\infty \quad f'_-(x_0) = -\infty$ (oppure viceversa)

allora $(x_0, f(x_0))$ si dice <u>punto di cuspide</u> del grafico di f.





$$f(x) = x|x| = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

dominio: $\mathbb{R}$. f continua in $\mathbb{R}$.

derivabile? sicuramente lo è per $x \neq 0$.

$$f'(x) = \left.\begin{cases} 2x & \text{se } x > 0 \\ -2x & \text{se } x < 0. \end{cases}\right\} = 2(\operatorname{sign} x)x = 2|x|$$

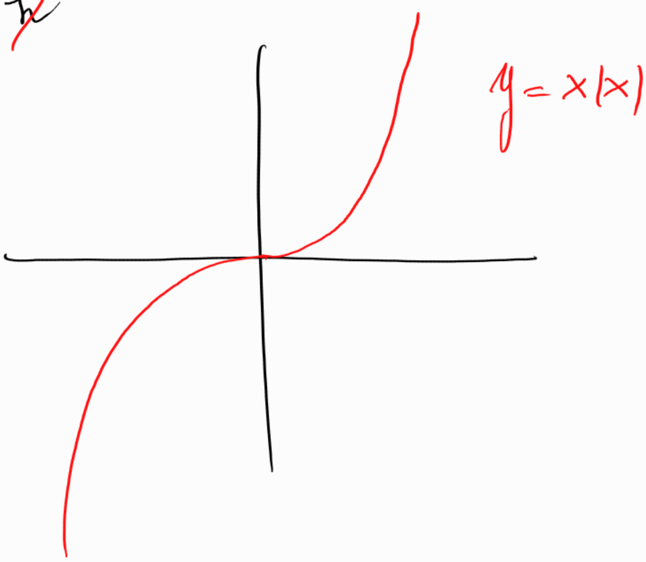
$x = 0$?

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - \cancel{f(0)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}|h|}{\cancel{h}} = 0$$ derivabile anche in $x=0$

$$\boxed{f'(x) = 2|x|} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

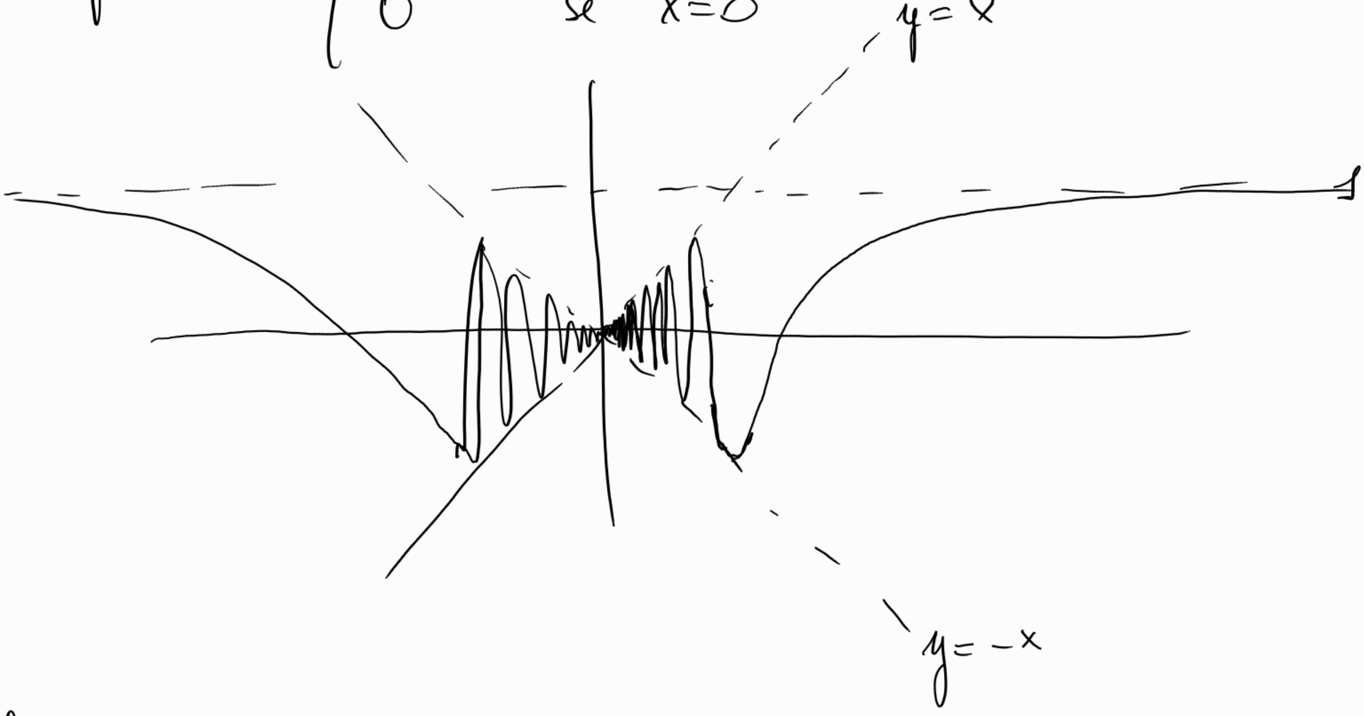
$$(x|x|)' = 2|x|$$

$$\boxed{\left(\frac{x|x|}{2}\right)' = |x|}$$



Abbiamo visto delle classificazioni (pto a tg verticale, pto angoloso, cuspide) di punti in cui una f è continua ma non derivabile.
Questo non esaurisce tutte le possibilità

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$



f continua? ovviamente sì per $x \neq 0$

$$\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} \stackrel{?}{=} f(0) = 0$$ vero (infinitesimo per limitata)

f derivabile? ovviamente sì per $x \neq 0$

$$f'(x) = \sin \frac{1}{x} + x\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cos\frac{1}{x} = \underbrace{\sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}}$$

$$\left(\sin \frac{1}{x}\right)' = \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

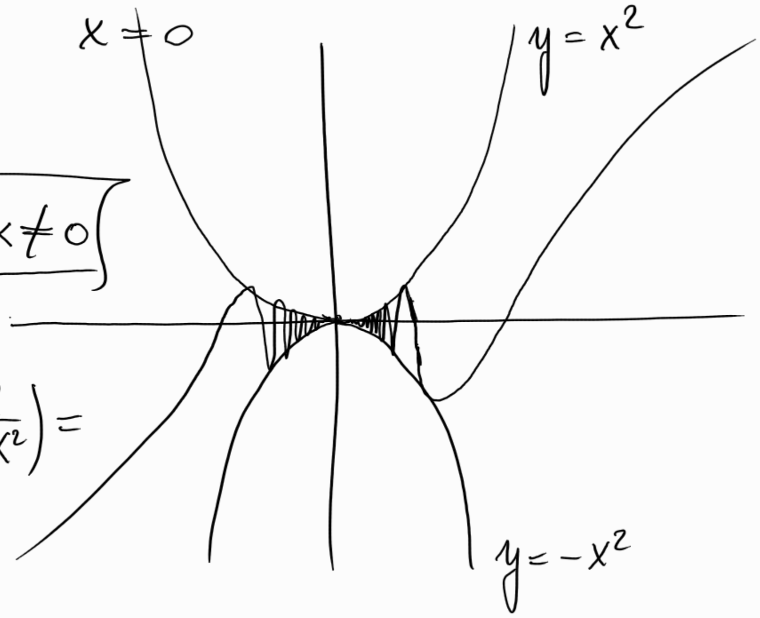
$x = 0$? $\quad f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h} \sin \frac{1}{h}}{\cancel{h}} \quad \nexists$

non esistono neanche $f'_+(0)$ e $f'_-(0)$

Piccola modifica:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$$

f continua in $\mathbb{R}$.



$\boxed{\text{per } x \neq 0}$

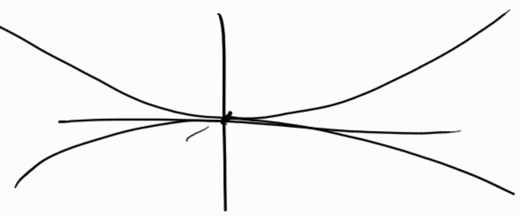
$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos \frac{1}{x} \left(-\frac{1}{x^2}\right) =$$

$$= 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

$\boxed{\text{per } x \neq 0}$

$\boxed{x = 0?}$

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{h^{\cancel{2}} \sin \frac{1}{h}}{\cancel{h}} = \lim_{h \to 0} h \sin \frac{1}{h} = 0$$



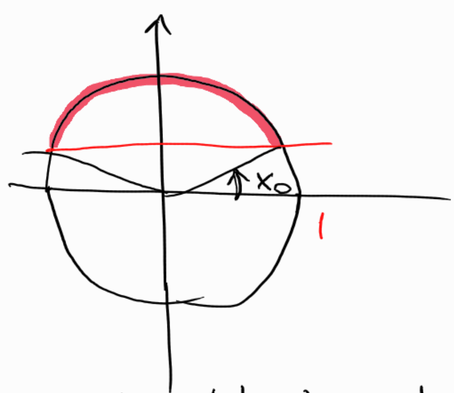
$\Rightarrow f$ derivabile in $\mathbb{R}$

$f(x) = \sqrt{3 \sin x - 1}$ $\qquad$ f periodica di periodo 2π.

dominio: $\qquad 3 \sin x \geq 1 \qquad \sin x \geq \frac{1}{3}$

$$x_0 + 2k\pi \leq x \leq \pi - x_0 + 2k\pi$$

dove $\quad x_0 = \arcsin \frac{1}{3}$



f continua? sì perché composizione di f. continue.

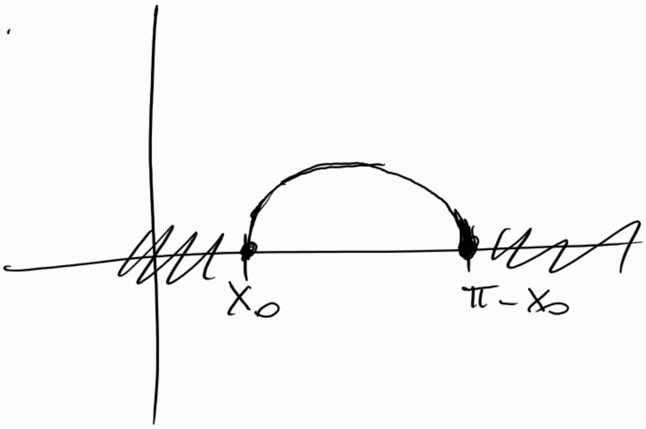
f derivabile? non chiaro perché $\sqrt{t}$ non è derivabile per $t = 0$.

f sicuramente derivabile dove $3 \sin x - 1 > 0$, cioè per

$$\arcsin \frac{1}{3} + 2k\pi < x < \pi - \arcsin \frac{1}{3} + 2k\pi$$

Per tali x $\quad f'(x) = \dfrac{3\cos x}{2\sqrt{3\sin x - 1}}$

Derivata in $x_0 = \arcsin \frac{1}{3}$.



$$f'(x_0) = f'_+(x_0) =$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h) - \overbrace{f(x_0)}^{=0}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{3\sin(x_0+h) - 1}}{h}$$ difficile

Si usa un altro metodo (che giustificheremo in seguito)

TEOR Supponiamo f continua in $[x_0, b)$, derivabile in (x_0, b)

Se $\exists \lim_{x\to x_0^+} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}^*$

allora $f'_+(x_0) = \ell$.

Nel nostro caso f verifica le ipotesi in x_0

$$\lim_{x\to x_0^+} f'(x) = \lim_{x\to x_0^+} \frac{\overset{\to \cos x_0 > 0}{3\cos x}}{\underbrace{2\sqrt{3\sin x - 1}}_{\downarrow\, 0^+}} = +\infty$$

Teor. $\Longrightarrow$ $\quad f'_+(x_0) = +\infty$ $\quad$ Pto a tg. verticale

Allo stesso modo si vede che

$$f'_-(\pi - x_0) = \lim_{x\to(\pi-x_0)^-} f'(x) = \lim_{x\to(\pi-x_0)^-} \frac{\overset{\cos(\pi-x_0) < 0}{3\cos x}}{\underbrace{2\sqrt{3\sin x - 1}}_{\downarrow\, 0^+}}$$

$$= -\infty$$

Attenzione: il precedente teorema non funziona se $\lim_{x \to x_0^+} f'(x)$ non esiste.

Nei due esempi visti prima

$$f(x) = \begin{cases} x \sin 1/x & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

In entrambi i casi

$\lim_{x \to 0^+} f'(x) \nexists$, ma nel primo caso $f'_+(0) \nexists$
nel secondo caso $f'_+(0) = 0$

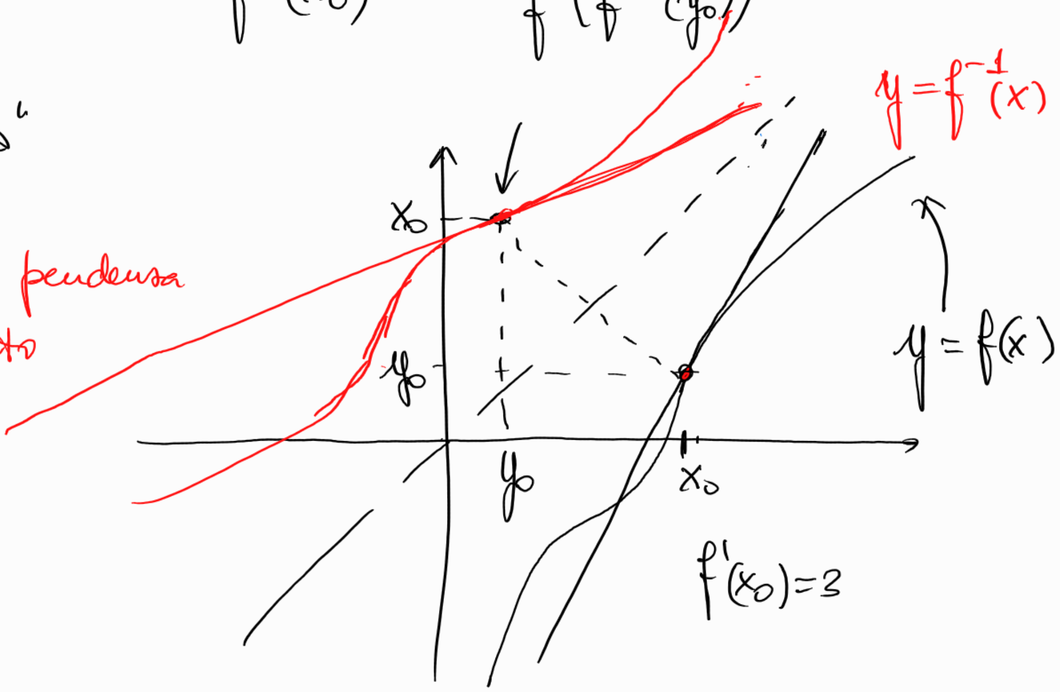
Teorema (derivata della funzione inversa)

Siano I intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ continua e strett. monotòna.
(quindi: 1) $\operatorname{im} f = J$ intervallo
2) $\exists\, f^{-1} : J \to I$ strett. monotòna e continua)
Se f è derivabile in $x_0 \in I$ e $f'(x_0) \neq 0$,
allora f^{-1} è derivabile in $y_0 = f(x_0)$, e si ha

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

Spiegazione "grafica"

Il grafico di f^{-1} ha pendenza pari a $\frac{1}{3}$ nel punto $y_0 = f(x_0)$



Esempio: $f(x) = 1 + 2x + x^5 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

derivabile e strett. crescente im $f = \mathbb{R}$.

$\Rightarrow \exists\, f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strett. crescente e continua.

Per trovare f^{-1} dovrei risolvere (in x) l'eq^ne $1+2x+x^5 = y$

$f'(x) = 2 + 5x^4 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Il teorema dice che: $\forall x \in \mathbb{R}$, posto $y = f(x) = 1+2x+x^5$,

f^{-1} è derivabile in y (quindi derivabile $\forall y \in \mathbb{R}$)

e $$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{2+5x^4}$$

Per es. $f(0) = 1$ $\quad x_0 = 0, \ y_0 = 1$.

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2}$$

$x_0 = 1 \qquad y_0 = f(x_0) = 4$

$f'(x_0) = 2 + 5x_0^4 = 7$.

$$\Rightarrow f^{-1}(4) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{7}$$

$f(x) = x^2 : [0,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty)$ strett. crescente e derivabile

$f^{-1}(y) = \sqrt{y}$

$\forall x_0 > 0 \qquad f'(x_0) = 2x_0 > 0$

Sia $y_0 = f(x_0) = x_0^2$.

$\Rightarrow f^{-1}(y)$ è derivabile in y_0

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{2x_0} = \frac{1}{2\sqrt{y_0}}$$

Questo lo posso ripetere $\forall x_0 > 0 \Rightarrow \forall y_0 > 0$

$\Rightarrow \forall y > 0$ $\quad (f^{-1})'(y) = (\sqrt{y})' = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}$

$f(x) = e^x : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ strett. crescente e derivabile

$f'(x) = e^x > 0 \quad \forall x.$

$\Rightarrow$ Posso applicare il teorema $\forall x \in \mathbb{R}$, $\Rightarrow \forall y \in (0, +\infty)$

$\forall y > 0 \quad D(\log y) = (f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(x)} = \dfrac{1}{e^x} = \dfrac{1}{y}.$

$x = f^{-1}(y) = \log y$

$f(x) = \operatorname{sen} x \Big|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ strett. crescente e derivabile.

$f'(x) = \cos x \neq 0 \iff x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$f^{-1} : [-1, 1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$\qquad y \longmapsto \arcsin y$

$$\forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{sia} \quad y = f(x) = \sin x$$
$$x = \arcsin y$$

$$(\arcsin y)' = (f^{-1})'(y) = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\underbrace{(\sin x)^2}_{= y}}} =$$

$$x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$
$$\cos x = \cancel{\pm} + \sqrt{1-\sin^2 x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$ Questo lo posso fare $\forall y \in (-1,1)$

$$\Longrightarrow (\arcsin y)' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \quad \forall y \in (-1,1)$$

$$\boxed{(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \forall x \in (-1,1)}$$

$$f(x) = \cos x \big|_{[0,\pi]} : [0,\pi] \longrightarrow [-1,1]$$ derivabile strett. decrescente biiettiva.

$$f^{-1} : [-1,1] \to [0,\pi]$$
$$y \mapsto \arccos y.$$

$$f'(x) = -\sin x < 0 \qquad \forall x \in (0,\pi)$$
a cui corrispondono tutti gli $y \in (-1,1)$

$$(\arccos y)' = (f^{-1})'(y) = \frac{1}{-\sin x}\Bigg|_{x=\arccos y} = -\frac{1}{\sin x}\Bigg|_{x=\arccos y} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}}\Bigg|_{x=\arccos y} = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

OSS $\forall x \in (0,\pi)$
$\sin x = \cancel{\pm}\, + \sqrt{1-\cos^2 x}$

Riscrivo

$$\boxed{(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \forall x \in (-1,1)}$$

$f(x) = \operatorname{tg} x \big|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})} : \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabile, strett. crescente, biiettiva.

$$f^{-1}(y): \mathbb{R} \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$
$$y \longmapsto \operatorname{arctg} y.$$

$$f'(x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x > 0 \qquad \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\forall y \in \mathbb{R} \qquad (\operatorname{arctg} y)' = (f^{-1})'(y) = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+y^2}$$

Riscrivo

$$\boxed{(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}}$$

Dim teorema

$$(f^{-1})'(y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} =$$

$x = f^{-1}(y) \xrightarrow[y \to y_0]{} f^{-1}(y_0) = x_0$
per continuità della f. inversa

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{1}{\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)} = \frac{1}{f'(x_0)}$$ $\square$

$\searrow f'(x_0)$

Estensione del teorema

$f: I \to J$ strett. crescente e continua.

Sia $x_0 \in I$ t.c. $f'(x_0)=0$.

Allora f^{-1} ha un punto a tg verticale in $y_0 = f(x_0)$, cioè

$$(f^{-1})'(y_0) = +\infty$$

Applicazioni:

1) $f(x) = x^3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strett. crescente derivabile e biettiva

$f'(0) = 0$ $\qquad x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 0$

$$f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad y \mapsto \sqrt[3]{y}$$

$$(f^{-1})'(0) = +\infty.$$

---

2) $f(x) = \sin x \big|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} : [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$ strett. crescente derivabile e biiettiva

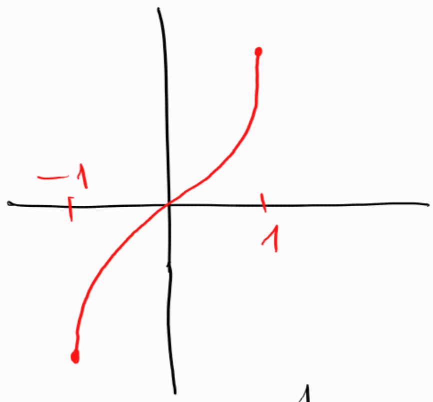
$$f^{-1}(y): [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}], \quad y \mapsto \arcsin y.$$

se $x_0 = -\frac{\pi}{2}$ $\qquad f'(x_0) = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$

$\Rightarrow y_0 = \sin x_0 = -1 \Rightarrow \arcsin'(-1) = +\infty$

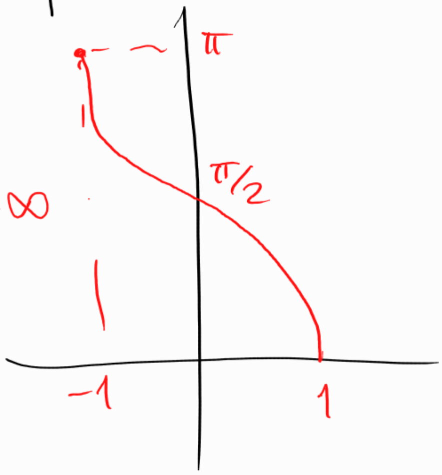
$x_0 = \frac{\pi}{2} \qquad f'(x_0) = 0$

$y_0 = \sin(x_0) = 1 \implies \arcsin'(1) = +\infty$



arccos x

in $x = \pm 1$ ha derivata $-\infty$



$$f(x) = \operatorname{arctg}(x^2 - x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{1 + (x^2 - x)^2}(2x - 1)$$

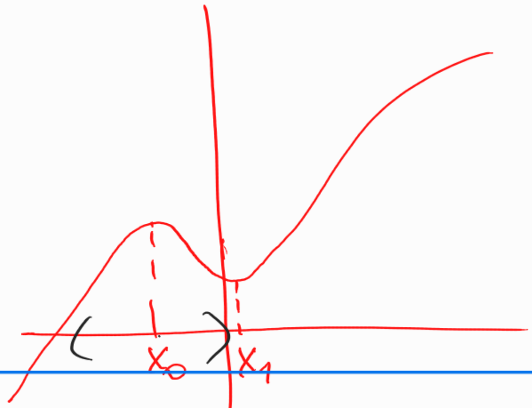
Estremi relativi di una funzione.

$$f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Si dice pto di massimo assoluto (o globale) di f un pto $x_0 \in X$ t.c.
minimo

$$f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in X$$
$\leq$

$f(x_0)$ si chiama massimo ass di f
minimo



DEF x_0 si dice **pto di massimo relativo (locale)**
minimo

se $\exists\ U$ intorno di x_0 t.c.

$$f(x) \underset{\geq}{\leq} f(x_0) \qquad \forall x \in X \cap U$$

il punto si dice di massimo rel. <u>stretto</u> se

$$f(x) \underset{>}{<} f(x_0) \qquad \forall x \in X \cap U \setminus \{x_0\}$$

<u>OSS</u> Ovviamente un pto di max. assoluto è anche pto di max. locale, il viceversa non è detto.