Derivata. $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x_0 \in X$

Derivata di f in x_0

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

se questo limite esiste finito.

f è derivabile in $x_0 \iff \exists$ retta tg. al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$ di equazione

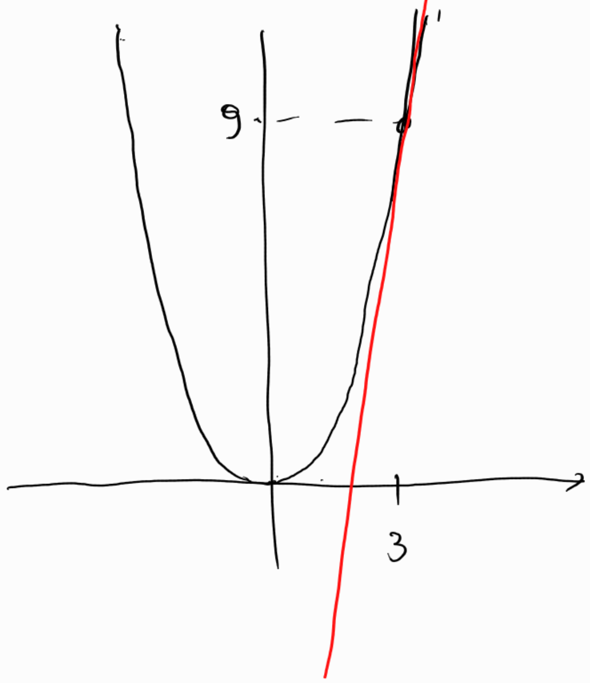
$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

cioè

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{\text{migliore approx. lineare di } f \text{ in } x_0} + o(x - x_0) \quad \text{per } x \to x_0$$

Trovare la retta tangente al grafico di $f(x) = x^2$ nel punto $(3, 9)$

$$y = \underbrace{f(3)}_{=9} + \underbrace{f'(3)}_{=6}(x - 3) = 9 + 6(x - 3) = 6x - 9$$



Quando una funzione f è derivabile $\forall x_0 \in X$, diremo che è derivabile in X, e resta definita la funzione "derivata" di f.

$$f': X \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f'(x)$$

Derivate delle funzioni elementari

1) $\boxed{f(x) \equiv c \quad , \text{ cioè } f(x) = c \quad \forall x \in \mathbb{R}.}$

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{\overset{=c}{f(x_0+h)} - \overset{=c}{f(x_0)}}{h}}_{=0} = 0 \qquad \forall x_0 \in \mathbb{R}.$$

2) $\boxed{f(x) = ax+b \quad a,b \in \mathbb{R} \implies f'(x) = a \quad \forall x \in \mathbb{R}}$

$(ax+b)' = a$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a(\cancel{x}+h)+\cancel{b}-(\cancel{ax}+\cancel{b})}{h} = a$$

3) $f(x) = x^2 \implies (x^2)' = 2x \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x^2}+2hx+h^2-\cancel{x^2}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} (2x+h) = 2x$$

4) $\boxed{(x^k)' = kx^{k-1} \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \forall k \in \mathbb{N}.}$

$$\longrightarrow (x^k)' = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^k - x^k}{h} = \lim_{h\to 0} x^k \frac{\overbrace{\left[\left(1+\frac{h}{x}\right)^k - 1\right]}^{\sim \frac{kh}{x}}}{h} =$$

$\frac{h}{x} \to 0$

$(1+t)^\alpha - 1 \sim \alpha t \qquad t \to 0$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^k \cdot k\cancel{h}}{x\,\cancel{h}} = kx^{k-1}$$

Il calcolo per $x=0$ è ovvio $\quad f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{h^k - 0}{h} \overset{k\geq 2}{=} 0 = k0^{k-1}$

Questo calcolo si ripete esattamente se invece di k abbiamo un qualunque esponente reale.

5) $$\boxed{(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \quad \forall x>0, \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}.}$$

OSS se α è razionale, e se entrambi i membri dell'uguaglianza hanno senso, la formula 5) ha senso anche per $x=0$ opp. per $x<0$.

$$(x^{4/3})' = \frac{4}{3} x^{1/3} \qquad \cancel{\forall x>0} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

controllare che il conto funziona anche per $x<0$ e per $x=0$.

$$(x^{1/3})' = \frac{1}{3} x^{-2/3} = \frac{1}{3x^{2/3}} \qquad \forall x \neq 0$$

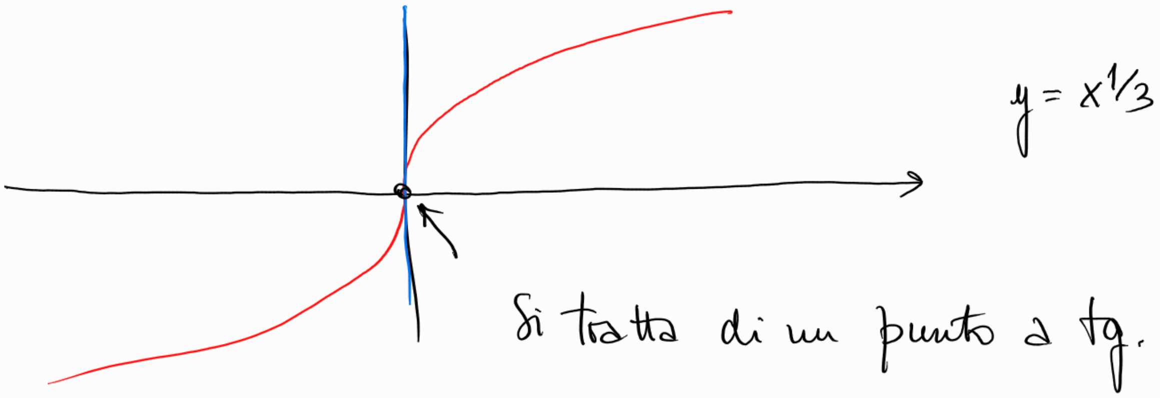
$f(x) = x^{1/3}$ è definita su $\mathbb{R}$. Cosa succede per $x=0$?

Applichiamo la def^{ne}:

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - \overset{=0}{f(0)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^{1/3}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{2/3}} = +\infty$$

0^+

$f(x) = x^{1/3}$ non è derivabile in $x=0$.



Si tratta di un punto a tg. verticale.

DEF Sia $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sia $x_0 \in X$. Diremo che $(x_0, f(x_0))$ è un punto a tg. verticale del grafico di f se:

1) f è continua in x_0

2) $$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty$$

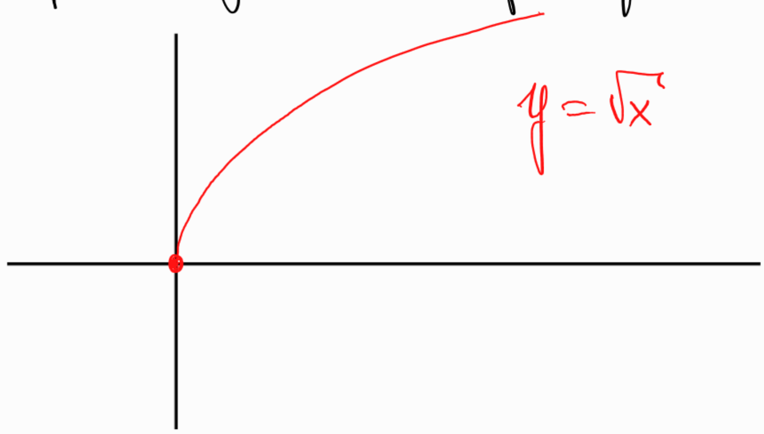
oppure $$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\infty.$$

$f(x) = x^{1/2} = \sqrt{x} : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$. continua in $[0,+\infty)$

$f'(x) = \frac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \forall x > 0.$

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - \cancel{f(0)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$$

$x=0$ è pto a tg. verticale per $f(x) = \sqrt{x}$



$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1 \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\left(\frac{1}{x^4}\right)' = -\frac{4}{x^5} \qquad \forall x \neq 0.$$

6) $\boxed{(e^x)' = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}.}$

$$(e^x)' = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h\to 0} e^x \boxed{\frac{e^h - 1}{h}} = e^x$$

1

6') $\boxed{(a^x)' = a^x \log a \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall a > 0}$

$$(a^x)' = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h\to 0} a^x \frac{a^h - 1}{h} = a^x \log a$$

$\log a$

$$\frac{a^h-1}{h} = \boxed{\frac{e^{h\log a}-1}{h\log a}}\ \log a \to \log a$$

$$\downarrow \quad t = h\log a \to 0$$

$$1$$

$$7)\ \boxed{(\log x)' = \frac{1}{x} \qquad \forall x>0.}$$

$$(\log x)' = \lim_{h\to 0}\frac{\log(x+h)-\log x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\log\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\log\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h/x}\,\frac{1}{x} = \frac{1}{x}$$

$$\downarrow$$

$$1$$

$$7')\ \boxed{(\log_a x)' = \frac{1}{x\log a} \qquad \forall x>0,\quad \forall a>0, a\neq 1.}$$

$$(\log_a x)' = \lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h} = \quad \text{(cambio di base)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\log\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\log a \quad h} = \frac{1}{x\log a} = \frac{\log_a e}{x}$$

$$\downarrow 1/x$$

$$8)\ \boxed{(\sin x)' = \cos x \qquad \forall x\in\mathbb{R}.}$$

(Grazie all'uso dei radianti invece dei gradi!)

$$(\sin x)' = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \boxed{\frac{1}{h}\, 2\, \underbrace{\sin\left(\frac{\cancel{x}+h-\cancel{x}}{2}\right)}_{\sim h/2}} \underbrace{\cos\left(\frac{x+h+x}{2}\right)}_{=\cos\left(\frac{2x+h}{2}\right) = \cos\left(x+\frac{h}{2}\right) \to \cos x} = \cos x$$

$$\downarrow$$
$$1$$

8') $\boxed{(\cos x)' = -\sin x \qquad \forall x \in \mathbb{R}.}$

(dim. simile).

TEOREMA f è derivabile in $x_0 \Rightarrow f$ è continua in x_0.

Dim. f è derivabile in $x_0 \Rightarrow$

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)(x-x_0)}_{o(1)} + \underbrace{o(x-x_0)}_{=o(1)} \quad \text{per } x\to x_0$$

$$= f(x_0) + o(1) \qquad \text{per } x\to x_0$$

cioè $\quad f(x) \to f(x_0) \quad$ per $x\to x_0$ (cioè la continuità)

$\square$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{\underbrace{x-x_0}_{\to 0}} = f'(x_0)\in\mathbb{R} \Rightarrow$$ anche il numeratore va a zero.

OSS Non è vero il viceversa. Esistono funzioni continue ma non derivabili.

1) $f(x) = x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$ continua in tutto $\mathbb{R}$. (quindi anche in $x=0$)

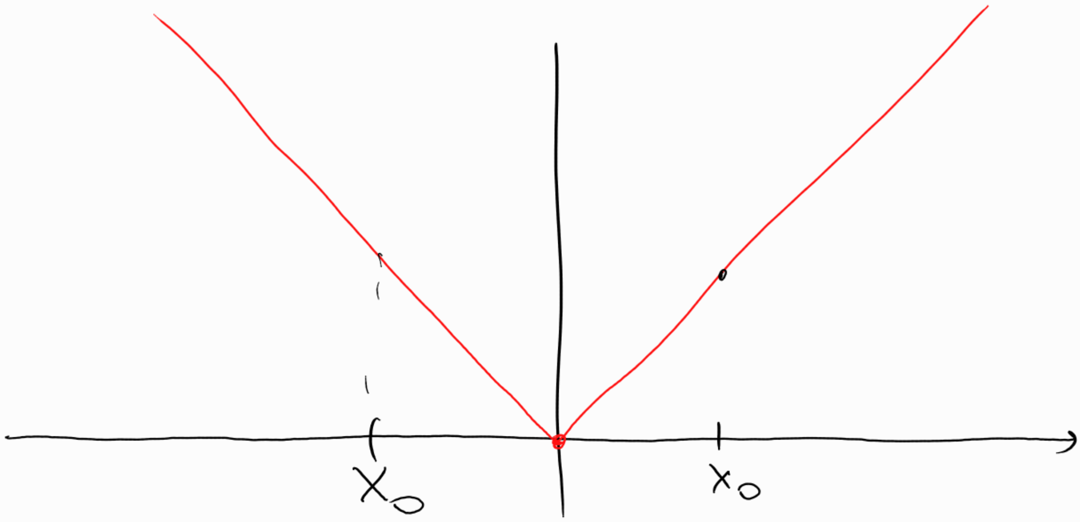
ma non è derivabile in $x=0$.

2) $f(x) = \sqrt{x}$ continua in $x=0$ ma non derivabile

3) $f(x) = |x|$ continua in tutto $\mathbb{R}$.

$$(|x|)' = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

se $x_0 > 0$, allora $|x| = x$ in un intorno di x_0



$x_0 > 0$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|x| - |x_0|}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1 \qquad f'(x_0) = 1$$

se $x_0 < 0$ $\qquad f'(x_0) = -1$.

Cerco di calcolare la derivata di $f(x) = |x|$ in $x_0 = 0$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - \cancel{f(0)}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x} \nexists$$

$f(x) = |x|$ non è derivabile in $x_0 = 0$.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$$

Si tratta di un punto angoloso

DEF Si dice **derivata destra** di f in x_0

$$f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Si dice **derivata sinistra** di f in x_0

$$f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

DEF $(x_0, f(x_0))$ si dice **punto angoloso** del grafico di f se

1) f continua in x_0
2) $\exists\ f'_+(x_0)$ e $f'_-(x_0)$, di cui almeno una finita, ma sono diverse tra loro.

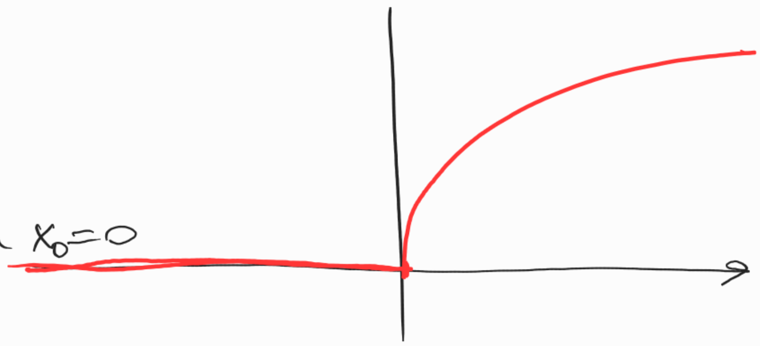
Nel caso del valore assoluto $\quad f'_+(0)=1$

$$f'_-(0)=-1.$$

$f(x)=\sqrt{x}$ ha un punto a tg. verticale in $x=0$

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

ha un punto angoloso in $x_0=0$



$$f'_+(0)=+\infty$$

$$f'_-(0)=0$$

$$(|x|)'=\left\{\begin{array}{ll}1 & \text{se } x>0\\ \nexists & \text{se } x=0\\ -1 & \text{se } x<0\end{array}\right\} = \operatorname{sign} x \qquad \text{se } x\neq 0$$

$$D\left(x^{4/3}\right) = \frac{4}{3}x^{1/3}$$

$$D\left(x^{2}\right) = 2x \qquad D\left(x^{3}\right) = 3x^{2}$$

$$D(\sin x) = \cos x$$

$$D(\cos x) = -\sin x$$

$$D\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}$$

In questi esempi la derivata di una f. dispari è pari, e viceversa.

PROP

1) se f è derivabile e dispari $\Longrightarrow$ f' è pari
2) se f è derivabile e pari $\Longrightarrow$ f' è dispari

Dim 1)

f dispari

$$f'(-x) = \lim_{h\to 0} \frac{\overbrace{f(-x+h)}^{-f(x-h)} - \overbrace{f(-x)}^{-f(x)}}{h} =$$

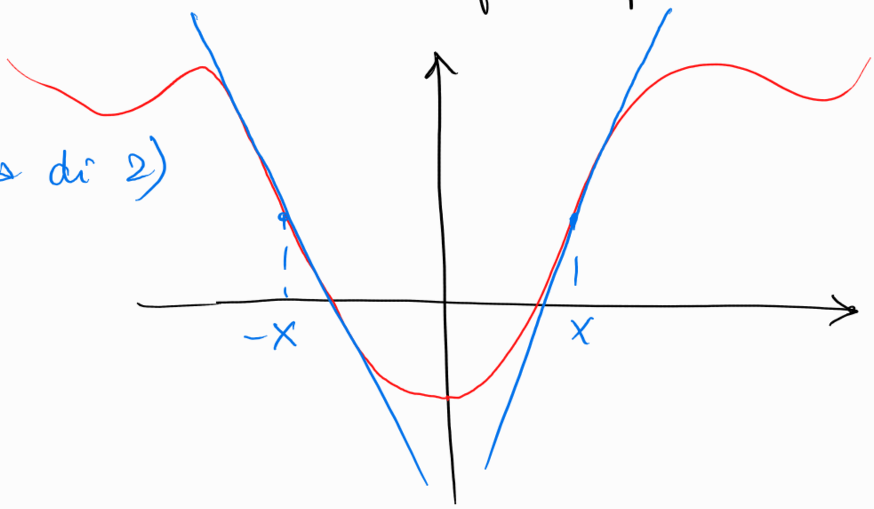
$$= \lim_{h\to 0} \frac{-f(x-h) + f(x)}{h} =$$

$-h = k \to 0$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{-f(x+k) + f(x)}{-k} = \lim_{k\to 0} \frac{f(x+k) - f(x)}{k} =$$

$$= f'(x) \quad \forall x \quad \Longrightarrow \quad f' \text{ è pari}$$

Spiegazione grafica di 2)



$$D(\log x) = \frac{1}{x} \qquad \forall x > 0$$

$$\Rightarrow \boxed{D(\log|x|) = \frac{1}{x}} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Algebra delle derivate

Siano $f, g : X \to \mathbb{R}$. Se f e g siano derivabili in $x_0 \in X$. Allora:

1) $f+g$ è derivabile in x_0, e

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

Dim.

$$(f+g)'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{(f(x_0+h) + g(x_0+h)) - (f(x_0) + g(x_0))}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(\underbrace{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}_{\downarrow \; f'(x_0)} + \underbrace{\frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}}_{\downarrow \; g'(x_0)} \right) =$$

$$= f'(x_0) + g'(x_0) \qquad \square$$

1') $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha f + \beta g$ è derivabile in x_0, e

$$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$$ (Linearità della derivata)

$$(5x^6 + 4x^2 - 7\sin x)' = 5 \cdot 6x^5 + 4 \cdot 2x - 7 \cdot \cos x =$$

$$= 30x^5 + 8x - 7\cos x$$

2) Il prodotto fg è derivabile in x_0, e

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)\,g(x_0) + f(x_0)\,g'(x_0)$$

Esempio:

$$(x^3\cos x)' = 3x^2\cos x - x^3\sin x$$

$$\left((x^4-3x+1)e^x\right)' = (4x^3-3)e^x + (x^4-3x+1)e^x =$$
$$= e^x\left(x^4+4x^3-3x-2\right)$$

Dim.

$$(fg)'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\boxed{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0+h)g(x_0)} + \boxed{f(x_0+h)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[\underbrace{f(x_0+h)}_{\to f(x_0)} \underbrace{\boxed{\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}}}_{\to g'(x_0)} + g(x_0) \underbrace{\boxed{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}}_{\to f'(x_0)}\right]$$

perché f è continua in x_0 (essendo derivabile)

$$= f(x_0)\,g'(x_0) + f'(x_0)\,g(x_0) \qquad \square$$

3) se $g(x_0) \neq 0$, allora $\dfrac{1}{g(x)}$ è derivabile in x_0

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

Esempio $\quad \left(\dfrac{1}{x^3-3x}\right)' = -\dfrac{3(x^2-1)}{(x^3-3x)^2} \quad \forall x \neq 0, \pm\sqrt{3}$

DIM $\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{\frac{1}{g(x_0+h)} - \frac{1}{g(x_0)}}{h} =$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{g(x_0) - g(x_0+h)}{h \; g(x_0+h)\, g(x_0)} =$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$-g'(x_0) \qquad g(x_0)$$

OSS se $g(x_0) \neq 0$ per la permanenza del segno $g(x_0+h) \neq 0$ per h suff^{te} piccolo

$$= -\frac{g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

$\square$

4) se $g(x_0) \neq 0$, allora $\frac{f(x)}{g(x)}$ è derivabile in x_0, e

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(x_0) \underset{(2)+(3)}{=} f'(x_0)\frac{1}{g(x_0)} + f(x_0)\left(-\frac{g'(x_0)}{(g(x_0))^2}\right) =$$

$$= \frac{f'(x_0)\, g(x_0) - f(x_0)\, g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

$\square$

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{\cos^2 x} \\ 1 + \operatorname{tg}^2 x \end{cases} \qquad \forall x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$(\operatorname{cotg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \operatorname{cotg}^2 x)$$

$$\forall x \neq k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\left(\frac{5x-2}{x^2-1}\right)' = \frac{5(x^2-1)-(5x-2)\,2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-5x^2+4x-5}{(x^2-1)^2}$$

$\forall x \neq \pm 1.$

TEOREMA derivata di f. composta (chain rule)

Siano $f: Y \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$g: X \subseteq \mathbb{R} \to Y$

(Quindi è definita $f \circ g: X \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(g(x))$)

Se g è derivabile in $x_0 \in X$, e f è derivabile in $g(x_0)$, allora $f \circ g$ è derivabile in x_0, e

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))\, g'(x_0)$$

Esempi:

$$(\operatorname{sen}(x^3))' = \cos(x^3)\, 3x^2$$

$$((\operatorname{sen} x)^3)' = 3 \sin^2 x \cos x$$

$$(e^{-x})' = e^{-x}(-1) = -e^{-x}$$

$$(\log(3x-5))' = \frac{1}{3x-5} \cdot 3 = \frac{3}{3x-5} \qquad \forall x > \frac{5}{3}$$

Se f è derivabile, allora

$$(f(ax+b))' = a f'(ax+b) \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

$$(\cos(3x+2))' = -3 \sin(3x+2)$$

Dim. del teorema con l'ipotesi aggiuntiva che g sia strett. monotòna vicino a x_0 (ma si aggiusta).

$$(f\circ g)'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \boxed{\frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)}} \; \boxed{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}} \to g'(x_0) =$$

$$f'(g(x_0)) \xleftarrow[y\to y_0]{} \frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0}$$

$y = g(x) \to g(x_0) = y_0$ perché g è continua in x_0.

$y_0 = g(x_0)$

OSS. ho usato l'hyp. di stretta monotonia di g per assicurarmi che non ho diviso per zero.

$$= f'(g(x_0))\, g'(x_0) \qquad \square$$

$$(x^x)' = (e^{x\log x})' = e^{x\log x}(x\log x)' =$$

$$= x^x\left(\log x + x\cdot\frac{1}{x}\right) = x^x(\log x + 1) \qquad \square$$