Funzioni continue.

Sia $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in X$ pto di accum. di X

f continua in x_0 $\iff$ $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Teoremi sui limiti applicati alle funzioni continue.

Teorema della permanenza del segno.

Se f è continua in x_0, e $f(x_0) > 0$, allora esiste un intorno di x_0 in cui $f(x) > 0$.

Teorema (operazioni con le f. continue)

Se $f, g: X \to \mathbb{R}$ sono continue in x_0, allora sono continue in x_0 anche la loro somma, differenza, combinazione lineare, il prodotto, il rapporto $f(x)/g(x)$ (se $g(x_0) \neq 0$)

Quindi $f(x) = \dfrac{\sin^3 x + 5\cos x}{e^x (5 - x^4)}$ è continua nel suo dominio $\mathbb{R} \setminus \{\pm \sqrt[4]{5}\}$

Teorema (composizione di funzioni continua)

Siano $f: Y \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g: X \subseteq \mathbb{R} \to \cancel{\mathbb{R}}\ Y$

(quindi resta definito $f \circ g(x) = f(g(x)) : X \to \mathbb{R}$)

Se g è continua in $x_0 \in X$, e f è continua in $g(x_0)$, allora $f \circ g$ è continua in x_0.

Esempi $\quad \operatorname{sen}(x^2 + 3x^5)$ è continua in $\mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{(e^x + 1)^x}{\sqrt[4]{(x+1)^2 + \cos^4 x}} \quad \text{è continua in } \mathbb{R}$$

Dim

f continua in $g(x_0)$

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = \lim_{y \to g(x_0)} f(y) = f(g(x_0)) \qquad \square$$

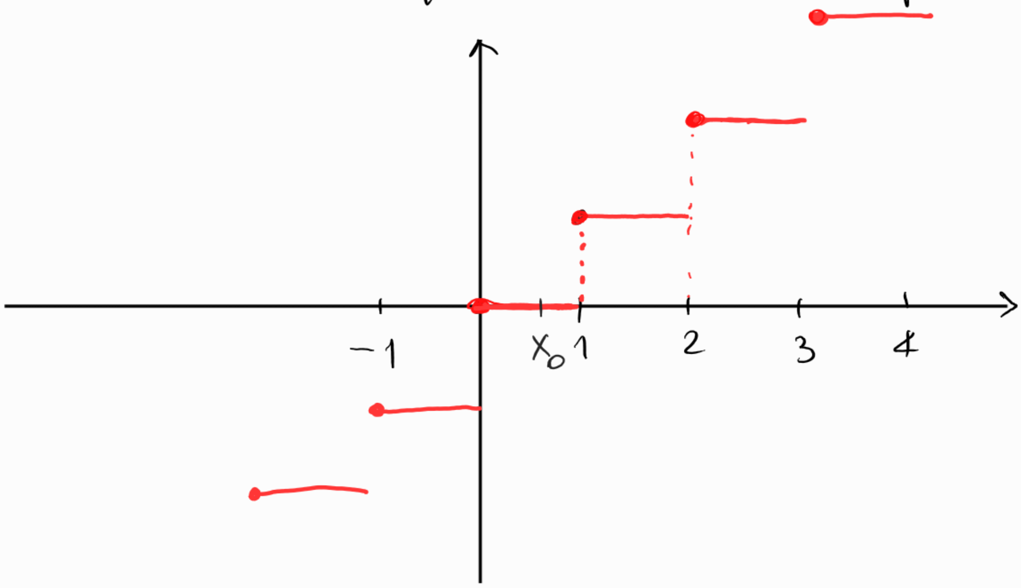
$y = g(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} g(x_0)$ perché g è continua.

OSS poiché la funz. "esterna" f è continua in $g(x_0)$,

non ho dovuto imporre la cond.ne $g(x) \neq g(x_0)$ def.te per $x \to x_0$

Esempi di funzioni discontinue:

$$f(x) = \lfloor x \rfloor = \max \{ k \in \mathbb{Z} : k \le x \}$$ parte intera di x.



Se $x_0 \notin \mathbb{Z}$, f è continua in x_0, infatti esiste un intorno di x_0 in cui f è costante

Ma se $x_0 \in \mathbb{Z}$, $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = x_0 = f(x_0)$, ma $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = x_0 - 1$.

Se $x_0 = 1$. $f(1) = 1$.

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) \nexists$, più precisamente $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} 1 = 1 = f(1)$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} 0 = 0$

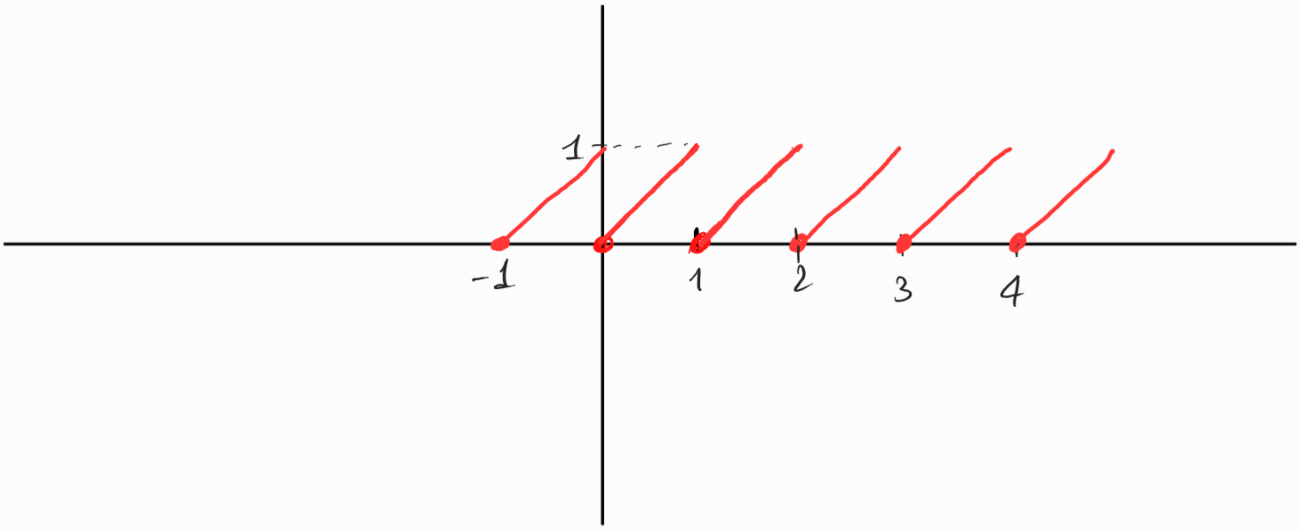
In tali punti $(x_0 \in \mathbb{Z})$ f è continua "da destra".

Altro esempio: $f(x) = \{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ parte frazionaria di x

$\{4\} = 0$ $\qquad \{-4\} = 0$

$\left\{\frac{9}{4}\right\} = \frac{9}{4} - 2 = \frac{1}{4}$ $\qquad \{\pi\} = 0,1415926\ldots$

$\{-\pi\} = -\pi + 4 = 0,858\ldots$



$f(x) = \{x\}$ è periodica di periodo 1. $\{x+1\} = \{x\}$ $\forall x \in \mathbb{R}$

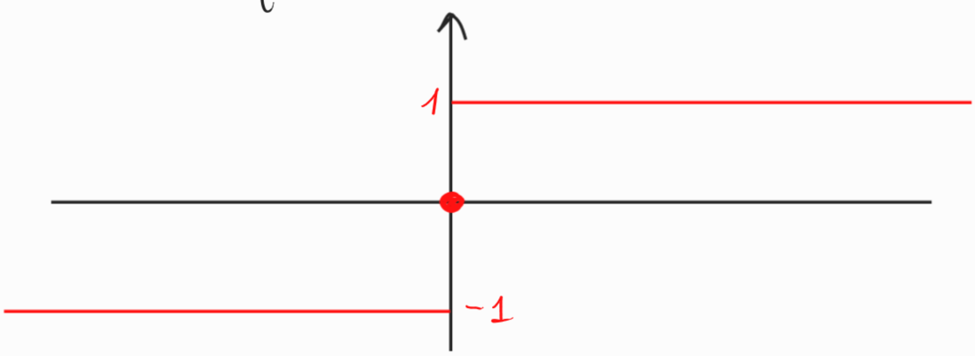
continua $\forall x_0 \notin \mathbb{Z}$, discontinua in $x_0 \in \mathbb{Z}$.

Se $x_0 \in \mathbb{Z}$. $\lim_{x \to x_0} \{x\} \nexists$

$\lim_{x \to x_0^+} \{x\} = 0 = \{x_0\}$ $\lim_{x \to x_0^-} \{x\} = 1 \neq \{x_0\}$.

continua da destra in tutti i punti

$$f(x) = \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

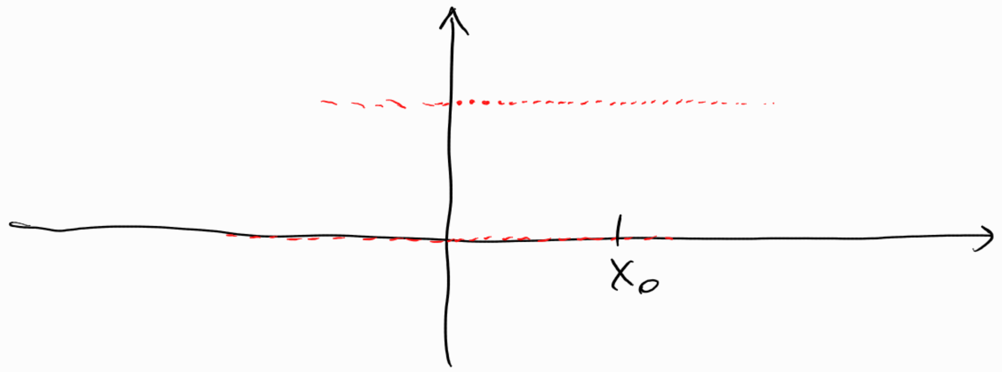


sign x è continua in $x_0 \neq 0$, ma non è continua in $x_0 = 0$

$\lim_{x \to 0^+} \operatorname{sign} x = 1$, $\lim_{x \to 0^-} \operatorname{sign} x = -1$

La funzione di Dirichlet

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$



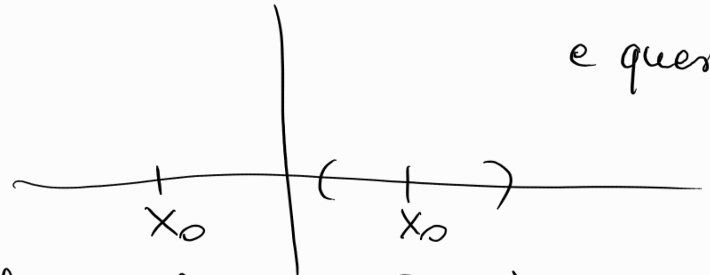
discontinua in ogni punto $x_0 \in \mathbb{R}$. $\lim\limits_{x \to x_0^\pm} f(x) \nexists$

<u>Esercizio</u> Studiare, al variare di $p \geq 0$, la continuità di

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\log(1+px)}{x} & \text{se} \quad x > 0. \\[2ex] \dfrac{x^2+3x+1}{x^2+2} & \text{se} \quad x \leq 0. \end{cases}$$

Se $x_0 > 0$, esiste un intorno di x_0 in cui $f(x) = \dfrac{\log(1+px)}{x}$

e questa è continua in quanto rapporto di funzioni continue



$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{\log(1+px)}{x} = \frac{\log(1+px_0)}{x_0} = f(x_0)$$

Quindi $\forall p \geq 0$, f è continua in $(0, +\infty)$

Se $x_0 < 0$, esiste un intorno in cui $f(x) = \dfrac{x^2+3x+1}{x^2+2}$

quindi f è continua in x_0.

Pb. di continuità solo in $x_0 = 0$.

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{x^2+3x+1}{x^2+2} = \frac{1}{2} = f(0)$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \underbrace{\boxed{\frac{\log(1+px)}{px}}}_{\downarrow \, 1} p = p \overset{?}{=} f(0) = 1/2$$

f è continua in 0 (e quindi in $\mathbb{R}$) se e solo se $p = 1/2$.

Studiare la continuità di $f(x) = \begin{cases} x \sin(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$

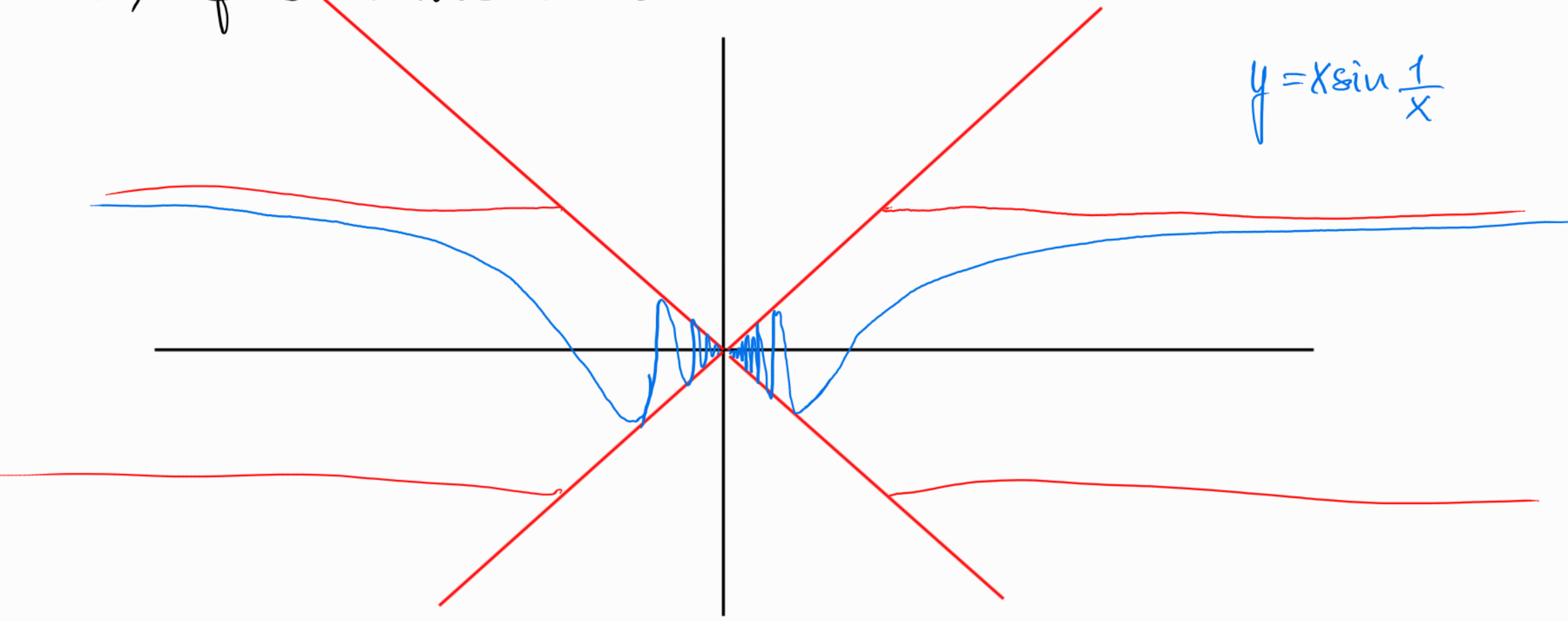
Sicuramente f è continua $\forall x_0 \neq 0$.

in $x_0 = 0$?

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \underbrace{x}_{\to 0} \underbrace{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{\text{limitata.}} = 0 = f(0)$$

$$0 \leq \left|x \sin \frac{1}{x}\right| = |x| \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq \underbrace{|x|}_{\substack{x\to 0 \\ \to 0}}$$

$\Rightarrow f$ è continua in $\mathbb{R}$.



$$\lim_{x\to+\infty} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(1/x)}{1/x} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\sin t}{t} = 1$$

$t = \frac{1}{x} \to 0^+$

Pti di discontinuità

$f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in X$ pto non isolato di X.

Se f non è continua in x_0, diremo che.

1) f ha una "<u>discontinuità eliminabile</u>" in x_0 se $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \in \mathbb{R}$, ma tale limite è $\neq f(x_0)$

In questo caso basta cambiare il valore di f nel punto x_0, cioè porre

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in X,\ x \neq x_0 \\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x) & \text{se } x = x_0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 5 & x = 0 \end{cases}.$$

È discontinua in $x_0 = 0$ in quanto $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1 \neq 5 = f(0)$

Se prendo $\tilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$, questa è continua in $\mathbb{R}$.

2) f ha una "<u>discontinuità di salto</u>" (o "<u>discontinuità di 1ª specie</u>") in x_0 se esistono finiti

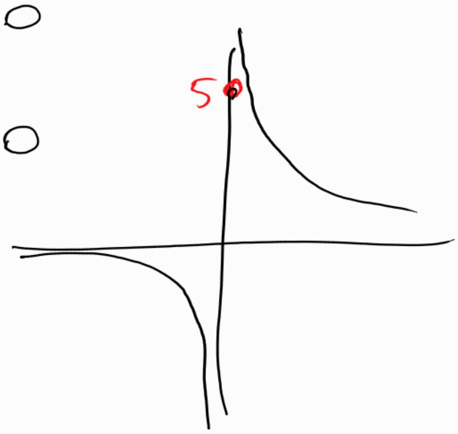
$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ ma sono diversi tra loro.

Esempio $\operatorname{sign} x$ ha una discontinuità di salto in $x_0 = 0$.

$\lfloor x \rfloor$ e $\{x\}$ hanno discontinuità di salto $\forall x_0 \in \mathbb{Z}$

3) f ha una "<u>discontinuità di 2ª specie</u>" in tutti gli altri casi.

<u>Esempio</u> $f(x) = \begin{cases} 1/x & x \neq 0 \\ 5 & x = 0 \end{cases}$



è discontinua in 0, in quanto

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty \qquad \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$

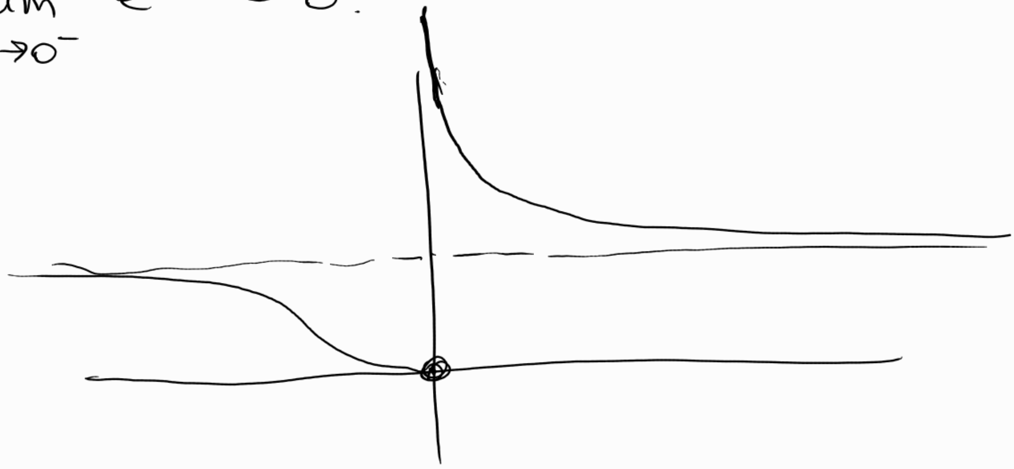
$$f(x) = \begin{cases} e^{1/x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

f è continua $\forall x_0 \neq 0$.

In $x_0 = 0$? ha una discontinuità di 2ª specie.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} e^{1/x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} e^{1/x} = 0.$$

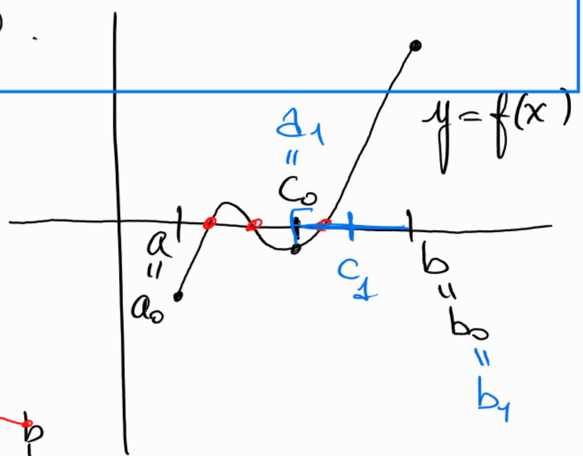


Teorema degli zeri

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$.

Se $f(a)f(b) < 0$ (cioè: f assume valori di segno opposto agli estremi)

Allora $\exists\, c \in (a,b)$ t.c. $f(c) = 0$.



OSS. Tutte le ipotesi servono:

- f deve essere continua.

- L'insieme deve essere un intervallo

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad f(-1) = -1 < 0, \quad f(1) = 1 > 0.$$

ma $1/x$ non si annulla mai.

Dim. Supponiamo che $f(a) < 0$, $f(b) > 0$.

Poniamo $a_0 = a$, $b_0 = b$. Prendo $c_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}$

$$\begin{cases} \text{se } f(c_0) = 0 \Rightarrow \text{ho finito.} \\ \text{se } f(c_0) < 0 \Rightarrow \text{pongo } a_1 = c_0, \ b_1 = b_0 \\ \text{se } f(c_0) > 0 \Rightarrow \text{pongo } a_1 = a_0, \ b_1 = c_0. \end{cases}$$

Prendo $c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$

$$\begin{cases} \text{se } f(c_1) = 0 \Rightarrow \text{ho finito} \\ \text{se } f(c_1) < 0 \Rightarrow \text{pongo } a_2 = c_1, \ b_2 = b_1 \\ \text{se } f(c_1) > 0 \Rightarrow \text{pongo } a_2 = a_1, \ b_2 = c_1 \end{cases}$$

e così via.

Al passaggio n-esimo (se non ho trovato già lo zero).

Pongo $c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$

$$\begin{cases} f(c_n) = 0 \Rightarrow \text{ho finito} \\ f(c_n) < 0 \Rightarrow \text{pongo } a_{n+1} = c_n, \ b_{n+1} = b_n \\ f(c_n) > 0 \Rightarrow \text{pongo } a_{n+1} = a_n, \ b_{n+1} = c_n \end{cases}$$

Se questo procedimento non si ferma, cioè se $f(c_n) \neq 0 \ \forall n$.

Ho così costruito due succ^{ni}

$\{a_n\}, \{b_n\}$ di punti di $[a,b]$. t.c.

$\{a_n\}$ crescente $\quad f(a_n) < 0$

$\{b_n\}$ decrescente $\quad f(b_n) > 0$.

$a_n < b_n$, $\quad b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \longrightarrow 0$

$$\left.\begin{array}{l} a_n \text{ crescente} \\ a_n \in [a,b] \end{array}\right| \Longrightarrow \exists \lim_{n\to+\infty} a_n = c' \in [a,b]$$

$$\left.\begin{array}{l} b_n \text{ decrescente} \\ b_n \in [a,b] \end{array}\right| \Longrightarrow \exists \lim_{n\to+\infty} b_n = c'' \in [a,b].$$

OSS $c' = c''$ in quanto $b_n - a_n \longrightarrow 0$

$\searrow c'' - c'$

Pongo $c' = c'' = c$

$a_n \to c \Longrightarrow f(a_n) \to f(c)$ per la continuità e il teorema ponte.

$f(a_n) < 0 \Longrightarrow f(c) \leq 0$ per la permanenza del segno

$b_n \to c \Longrightarrow f(b_n) \to f(c)$

$f(b_n) > 0 \Longrightarrow f(c) \geq 0$

$f(c) = 0$

$\square$