Limiti di funzioni monotòne

Limiti di succ^{ni} monotòne.

Sia $\{a_n\}$ una succ^{ne} crescente. Allora $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$

Con le dovute modifiche, vale un teorema simile per le funzioni:

TEOREMA Sia $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ crescente
decrescente
(se $x_1, x_2 \in X$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$)

Allora:

1) sia $x_0 \in \mathbb{R}^*$ un punto di accum. sinistro di X
(cioè ogni intorno sinistro di x_0 $\to (x_0-\delta, x_0)$ se $x_0 \in \mathbb{R}$; $\to (M, +\infty]$ se $x_0 = +\infty$
contiene infiniti punti di X).

inf

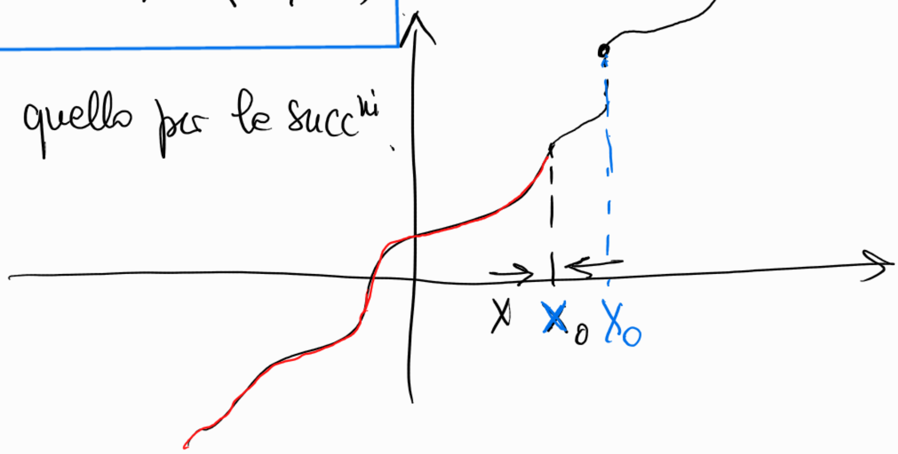
$$\Rightarrow \exists \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \sup_{x\in X\cap(-\infty, x_0)} f(x)$$

2) sia $x_0 \in \mathbb{R}^*$ un punto di accum. destro di X

sup

$$\to \exists \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \inf_{x\in X\cap(x_0, +\infty)} f(x)$$

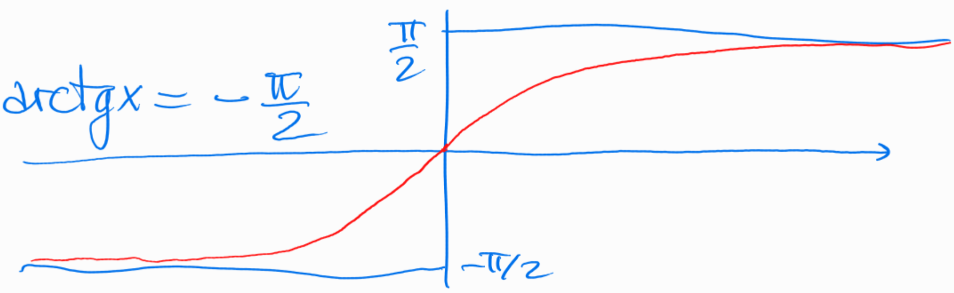
Dim molto simile a quella per le succ^{ni}.



Esempio

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \sup_{x\in\mathbb{R}} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = \inf_{x\in\mathbb{R}} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$$



Abbiamo utilizzato molte volte il seguente ragionamento intuitivo.

$$\lim_{x\to+\infty} 2^{1/x} = \lim_{y\to 0} 2^y = 1$$

OSS $\frac{1}{x} = y \to 0$

$$\frac{2x^2-x}{x^2+1} = \frac{2-1/x}{1+1/x^2} = 2$$

$$\lim_{x\to-\infty} \log\left(\frac{2x^2-x}{x^2+1}\right) = \lim_{y\to 2} \log y = \log 2.$$

$2-\frac{1}{x} = 2+\frac{2}{x^2}$

$-\frac{1}{x} = \frac{2}{x^2}$

vero def^{te} per $x\to-\infty$

OSS $\frac{2x^2-x}{x^2+1} = y \to 2$

Limite di funzione composta

Sia $g: X\subseteq \mathbb{R} \to Y\subseteq \mathbb{R}$, $f: Y\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

Resta definita la funzione composta.

$$f\circ g: \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \cup\!\!\!\!\!\!\;\shortparallel & & \\ x & \longmapsto & f(g(x)) \end{array}$$

Se esistono i limiti:

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = \ell \in \mathbb{R}^*, \quad \lim_{y\to \ell} f(y) = k\in\mathbb{R}^*$$

e in più

$$\boxed{g(x)\neq \ell \text{ def}^{te} \text{ per } x\to x_0.} \quad (*)$$

Allora

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = \lim_{y\to\ell} f(y) = k}$$

Dim teorema

Hyp. 1 $\forall W$ intorno di k. $\exists V$ intorno di ℓ t.c.

$f(y)\in W \quad \forall y \in V\cap Y\setminus\{\ell\}$

Hyp. 2 $\forall V$ intorno di ℓ $\exists U$ intorno di x_0 t.c.

$g(x)\in V\cap Y\setminus\{\ell\} \quad \forall x\in U\cap X\setminus\{x_0\}$

Tesi $\forall W$ intorno di k $\exists\, U$ intorno di x_0 t.c.

$$f(g(x)) \in W \qquad \forall x \in U \cap X \setminus \{x_0\}$$

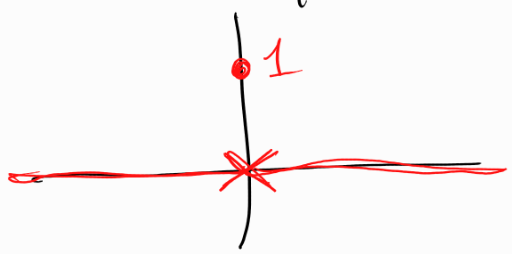
Fisso W intorno di k. Prendo V come nell'hyp. 1.
Per tale intorno V di ℓ prendo U come nell'hyp. 2.

$$x \in U \cap X \setminus \{x_0\} \overset{\text{hyp } 2}{\Rightarrow} g(x) \in V \cap Y \setminus \{\ell\} \overset{\text{hyp } 2}{\Rightarrow} f(g(x)) \in W$$

OSS L'hyp. $(*)$ serve:

$$g(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto 0 \qquad x \mapsto \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0} g(x) = 0, \quad \lim_{y \to 0} f(y) = 0$$



$$\lim_{x \to 0} f(g(x)) \cancel{=} \lim_{y \to 0} f(y) = 0$$
$$g(x) = y \to 0$$

Errato

$$\lim_{x \to 0} f(g(x)) = \lim_{x \to 0} f(0) = \lim_{x \to 0} 1 = 1$$

OSS 2 L'hyp $(*)$ non serve se f è definita in ℓ e in più $f(\ell) = \lim_{y \to \ell} f(y)$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt[8]{3x^8 + 6x^6} - x \right) = \lim_{x \to +\infty} \underbrace{x}_{+\infty} \underbrace{\left(\sqrt[8]{3 + \frac{6}{x^2}} - 1 \right)}_{\sqrt[8]{3} - 1 > 0} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[8]{x^8+6x^6}-x\right)\left(\left(x^8+6x^6\right)^{7/8}+\left(x^8+6x^6\right)^{6/8}x+\dots+x^7\right)$$

$$A^8-B^8=(A-B)\left(A^7+A^6B+A^5B^2+\dots+B^7\right)$$

$$=A^8+\cancel{A^7B}+\cancel{A^6B^2}+\dots\dots+\cancel{AB^7}+$$
$$-\cancel{A^7B}-\cancel{A^6B^2}+\dots\dots-\cancel{AB^7}-B^8$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^8}+6x^6-\cancel{x^8}}{x^7(8)}=0$$

In modo semplice:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[8]{x^8+6x^6}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}x\underbrace{\left(\sqrt[8]{1+\frac{6}{x^2}}-1\right)}_{\sim\frac{3}{4x^2}}=$$

<u>OSS</u> $\displaystyle\lim_{t\to0}\frac{(1+t)^\alpha-1}{t}=\alpha$ o equivalentemente

$$(1+t)^\alpha-1\sim\alpha t\qquad\text{per } t\to0$$

Prendiamo $\alpha=1/8$ $\quad\frac{6}{x^2}\longrightarrow0$ per $x\to+\infty$, da cui

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{6}{x^2}\right)^{1/8}-1}{6/x^2}=\lim_{t\to0}\frac{(1+t)^{1/8}-1}{t}=\frac{1}{8}$$

$$t=\frac{6}{x^2}\to0$$

o equivalentemente $\quad\left(1+\frac{6}{x^2}\right)^{1/8}-1\sim\frac{6}{8x^2}\quad$ per $x\to+\infty$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\,\frac{3}{4x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{4x}=0\,..$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}x\underbrace{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1\right)}_{\sim\frac{1}{2x}}=\frac{1}{2}$$

$$\sqrt{1+t}-1\sim\frac{t}{2}\qquad\text{per } t\to0$$

$$\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1\sim\frac{1}{2x}\qquad\text{per } x\to+\infty$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{(\cos x)^{\text{tg}\,x}-1}^{\sim -x^3/2}}{x^3} = \left(\frac{0}{0}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$(\cos x)^{\text{tg}\,x} - 1 = \underbrace{e^{\text{tg}\,x\,\overbrace{\log(\cos x)}^{\to 0}} - 1}\sim (*)$$

$e^t - 1 \sim t$ per $t \to 0$ al posto di t ci metto

$e^{\text{tg}\,x \log(\cos x)} - 1 \sim \text{tg}\,x \log(\cos x)$ $\quad \underbrace{\text{tg}\,x \log(\cos x)}\to 0$

$$(*) \sim \underbrace{\text{tg}\,x}_{\substack{\wr \\ x}}\ \underbrace{\log(\cos x)}_{\substack{\shortparallel \\ \log(1+\underbrace{(\cos x - 1)}_{\downarrow\, 0})}} \sim -\frac{x^3}{2}$$

$\log(1+t)\sim t$ per $t \to 0$

$\sim \cos x - 1 \sim -\dfrac{x^2}{2}$

Confronto tra infiniti / infinitesimi.

Ordinare i seguenti infiniti per $x \to -\infty$:

$f(x) = \sqrt{1+x^4}$, $g(x) = |x|^{\pi} \underset{x<0}{=} (-x)^{\pi}$

$h(x) = 2^{\sqrt{-x}}$ $\qquad K(x) = x^2 \overbrace{\log_2(x^2)}^{= 2\log_2(-x)}$

Ricordo che

$f(x)$ è un infinito di ordine inferiore rispetto a $g(x)$ se per $x \to x_0$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \qquad (\text{cioè se } f(x) = o(g(x)) \text{ per } x \to x_0)$$

$\boxed{x \to -\infty}$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{1+x^4}}{|x|^{\pi}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{(-x)^2\overbrace{\sqrt{1+1/x^4}}^{\to 1}}{(-x)^{\pi}} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{1+o(1)}{(-x)^{\pi-2}} = 0 \qquad f \prec g \prec h$$

$$f(x) \sim (-x)^2 \qquad g(x) = (-x)^{\pi} \qquad x \to -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{h(x)}{g(x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2^{\sqrt{-x}}}{(-x)^{\pi}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{2^{t}}{t^{2\pi}} = +\infty$$

$$\sqrt{-x} = t \to +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{k(x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{1+x^4} \cancel{\sim (-x)^2}}{2\cancel{(-x)^2}\log_2(-x)} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{k(x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{(-x)^{\pi}}{2(-x)^2\log_2(-x)} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^{\pi}}{2t^2\log t} =$$

$$-x = t \to +\infty$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{t^{\pi-2}}{2\log t} = +\infty$$

$$f \prec k \prec g \prec h$$