Confronto di infiniti (e infinitesimi)

1) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^\alpha}{b^x} = 0$ $\quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall b > 1$.

ovvio se $\alpha \le 0$

se $\alpha > 0$ è un confronto tra infiniti.

Diremo che "per $x \to +\infty$ b^x $(b>1)$ è un infinito di ordine <u>superiore</u> rispetto a x^α $(\alpha > 0)$"

Scriveremo anche "$x^\alpha = o(b^x)$ per $x \to +\infty$"

che significa semplicemente $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^\alpha}{b^x} = 0$ $\left(\text{per } b>1,\ \alpha \in \mathbb{R}\right)$

Siano $f(x), g(x) : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^*$ pto di accum. di X; f e g def^{te} $\neq 0$ per $x \to x_0$.

Scriveremo che $f(x) = o(g(x))$ per $x \to x_0$

se $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$

In particolare se $g(x) \equiv 1$

"$f(x) = o(1)$ per $x \to x_0$" significa $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$.

<u>Esempi</u>: $x = o(x^2)$ per $x \to +\infty$, $x \to -\infty$

significa $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

e quindi "x è un infinito di ordine inferiore risp. a x^2 per $x \to +\infty$, $-\infty$"

<u>Attenzione</u> $x^2 = o(x)$ per $x \to 0$

$\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2}{x} = \lim_{x\to 0} x = 0$

Quindi: per $x \to 0$ contano di più le potenze basse di x.

In questo caso stiamo confrontando due infinitesimi.
Diremo che "x^2 è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a x per $x \to 0$"

DEF Siano $f(x), g(x)$ diverse da zero def^{te} per $x \to x_0$, e siano infinitesime per $x \to x_0$.
Diremo che "$f(x)$ è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a $g(x)$ per $x \to x_0$"

se $$f(x) = o(g(x)) \quad \text{per } x \to x_0$$

ossia $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Se f e g sono infiniti per $x \to x_0$, diremo che "$f(x)$ è un infinito di ordine superiore rispetto a $g(x)$ per $x \to x_0$"

se "$g(x) = o(f(x))$ per $x \to x_0$"

cioè $$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$$

2) $$\lim_{x \to -\infty} \underbrace{|x|^\alpha}_{= (-x)^\alpha} b^x = 0 \qquad \forall b > 1, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

$\alpha > 0$ $$\underbrace{|x|^\alpha}_{\to +\infty} \underbrace{b^x}_{\to 0} = (-x)^\alpha b^x = y^\alpha b^{-y} = \frac{y^\alpha}{b^y} \xrightarrow[y \to +\infty]{} 0$$

pongo $-x = y \to +\infty$

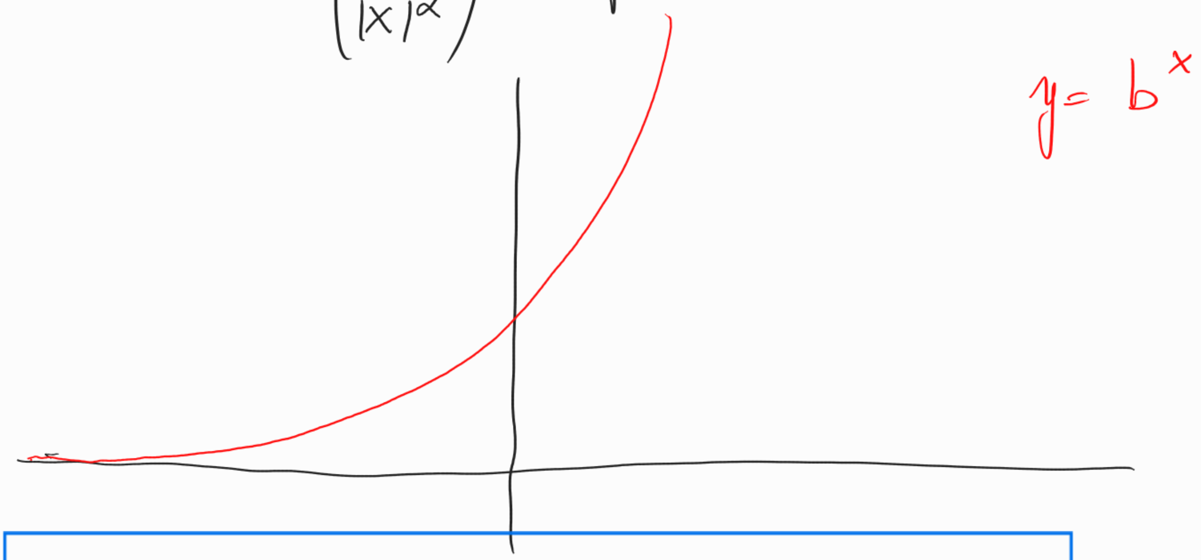
Il precedente limite si interpreta così:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{b^x}{1/|x|^\alpha} = 0 \qquad b > 1, \ \alpha > 0$$

e si può descrivere come

"per $x \to -\infty$, b^x è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a $\frac{1}{|x|^\alpha}$, $\forall b > 1$, $\forall \alpha > 0$"

"$b^x = o\left(\frac{1}{|x|^\alpha}\right)$ per $x \to -\infty$"



3) $$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{\log_b x}{x^\alpha} = 0 \quad \forall \alpha > 0, \ \forall b > 0 \ b \neq 1}$$

Per verificarlo:

a) $\forall$ succ^{ne} $a_n \to +\infty$ $\quad \lim_{n \to +\infty} \frac{\log_b a_n}{a_n^\alpha} = 0$

$\xRightarrow{\text{thm. ponte}}$ $\lim_{x \to +\infty} \frac{\log_b x}{x^\alpha} = 0$

b) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\log_b x}{x^\alpha} =$

Per semplicità $b > 1$.

$y = \log_b x \to +\infty$

OSS $x^\alpha = b^{\alpha \log_b x} = (b^\alpha)^y$

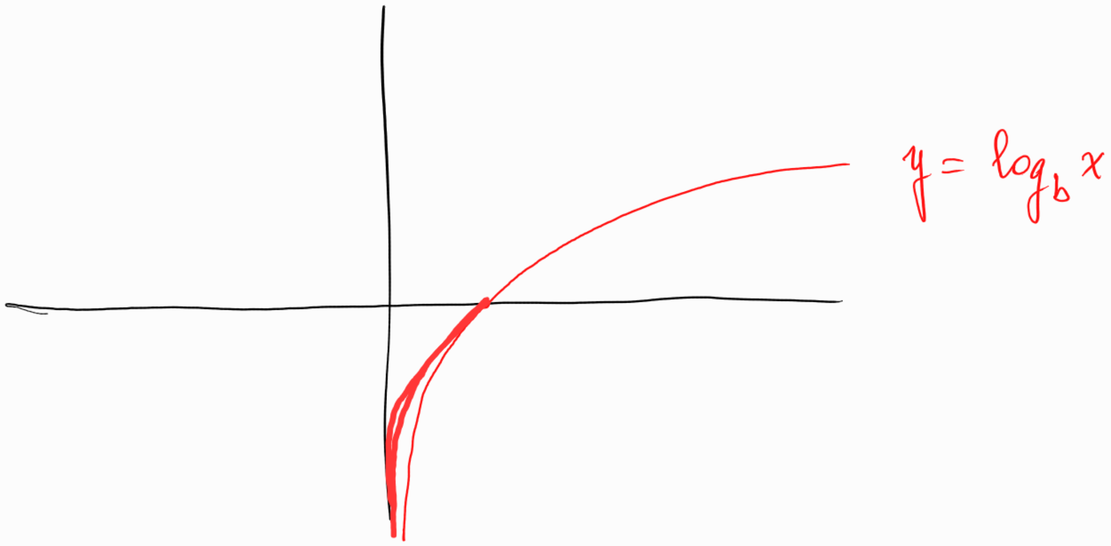
$= \lim_{y \to +\infty} \frac{y}{(b^\alpha)^y} \overset{(1)}{=} 0$

OSS $b > 1, \alpha > 0 \Rightarrow b^\alpha > 1$

Se $0 < b < 1$, basta fare un cambio di base.

"Abbiamo provato: $\log_b x = o(x^\alpha)$ per $x \to +\infty$ $\quad \forall \alpha > 0$, $\forall b > 0,\ b \neq 1$"

"per $x \to +\infty$ $\log_b x$ è un infinito di ordine inferiore rispetto a x^α $\quad \forall \alpha > 0,\ \forall b \dots$"



Si ha di più:

ovvio se $c \leq 0$

$$\lim_{x \to +\infty} \underbrace{\frac{|\log_b x|^c}{x^\alpha}}_{= \left(\frac{|\log_b x|}{x^{\frac{\alpha}{c}}}\right)^c \to 0} = 0 \qquad \forall c \in \mathbb{R} \qquad \boxed{\forall \alpha > 0}$$

$\forall b > 0,\ b \neq 1$

$\boxed{\text{se } c > 0}$

4) $$\boxed{\lim_{x \to 0^+} \underbrace{x^\alpha}_{\downarrow\, 0} \underbrace{\log_b x}_{\downarrow\, \pm\infty} = 0 \qquad \forall \alpha > 0 \quad \forall b > 0,\ b \neq 1}$$

$$\lim_{x \to 0^+} x^\alpha \log_b x = \lim_{y \to +\infty} \frac{1}{y^\alpha} \left(-\log_b y\right) \overset{(3)}{=} 0$$

sost. $\quad y = \frac{1}{x} \to +\infty, \quad \log_b x = \log_b \frac{1}{y} = -\log_b y.$

Il limite (4) si legge così:

"$\log_b x$ è un infinito di ordine inferiore rispetto a $\frac{1}{x^\alpha}$ per $x \to 0^+$ $\forall \alpha > 0$"

"$\log_b x = o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$ per $x \to 0^+$ $\quad \forall \alpha > 0, \ \forall b > 0, b \neq 1$.

Più in generale, si mostra che

$$\lim_{x \to 0^+} x^\alpha |\log_b x|^c = 0 \qquad \boxed{\forall \alpha > 0}, \ \forall c \in \mathbb{R}, \ \forall b > 0, \ b \neq 1$$

$$\lim_{x \to 0^+} x^x = (0^0) = \lim_{x \to 0^+} e^{x \log x} = e^0 = 1.$$

$x \to 0^+$

$$\underbrace{x}_{\to 0} \ \underbrace{\log x}_{\to -\infty} \xrightarrow{(4)} 0$$

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \to +\infty} n^{1/n} = (+\infty^0) =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} e^{\frac{1}{n} \log n} = e^0 = 1.$$

$n \to +\infty \qquad \frac{1}{n} \log n \xrightarrow{(3)} 0$

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{3n^4 - 2n^2 + 6} = \lim_{n \to +\infty} (3n^4 - 2n^2 + 6)^{1/n} = (+\infty)^0 =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \underbrace{n^{4/n}}_{= (n^{1/n})^4 \to 1} \underbrace{\left(3 - \frac{2}{n^2} + \frac{6}{n^4}\right)^{1/n}}_{\to 1} = 1$$

Si dimostra allo stesso modo che $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{P_k(n)} = 1$

$\forall$ polinomio $P_k(n)$ nella variabile n.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{\sqrt{\log x}}} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\log x}}{e^{\sqrt{\log x}}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} e^{\log x - \sqrt{\log x}} = +\infty$$

$$\log x - \sqrt{\log x} = \underbrace{\log x}_{\to +\infty} \underbrace{\left(1 - \underbrace{\frac{1}{\sqrt{\log x}}}_{\to 0}\right)}_{\to 1} \to +\infty$$

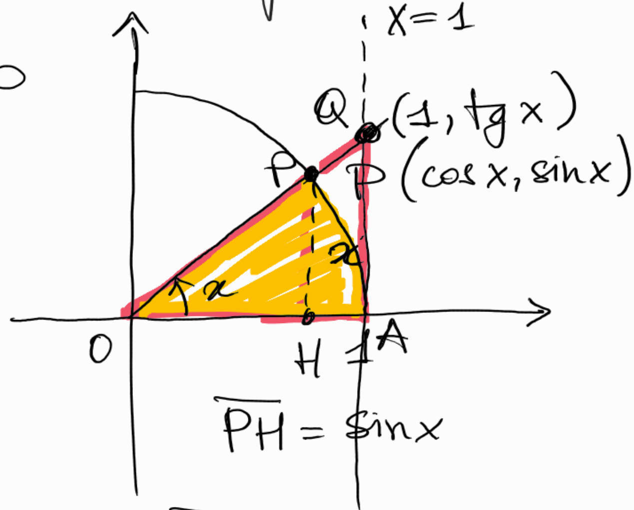
Limiti notevoli di funzioni trigonometriche

1) $$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$

Lemma $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2})$ $\sin x \overset{(A)}{\leq} x \overset{(B)}{\leq} \operatorname{tg} x$

(A) già provato, anzi è vero $\forall x \geq 0$

(B)



$\overline{PH} = \sin x$

Area settore circ = $\frac{x}{2}$

$$\frac{x}{2\pi} = \frac{\text{area}}{\pi}$$

Area $\widehat{OAQ} = \frac{1 \cdot \operatorname{tg} x}{2}$

$\overline{QA} : \overline{OA} = \overline{PH} : \overline{OH}$

$\overline{OA} = 1$, $\overline{PH} = \sin x$, $\overline{OH} = \cos x$

$$\overline{QA} = \frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$$

$$\frac{x}{2} \leq \frac{\operatorname{tg} x}{2} \qquad x \leq \operatorname{tg} x$$

$$\sin x \le x \le \frac{\sin x}{\cos x}$$ sia $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

divido per $\sin x > 0$

$$1 \le \frac{x}{\sin x} \le \frac{1}{\cos x}$$

Passo di reciproci

$$\cos x \le \frac{\sin x}{x} \le 1 \qquad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Facciamo $x \to 0^+$: $\cos x \to 1$, $1 \to 1$

Per il teor. dei carabinieri $\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$

Poiche $\frac{\sin x}{x}$ è una funzioni pari, si ha anche

$\lim_{x \to 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1$ e quindi $\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$

Altri modi di scriverlo

$$\sin x = x(1 + o(1)) \qquad \text{per } x \to 0$$

$$\sin x = x + \underbrace{x\, o(1)}_{= o(x)} = x + o(x) \qquad \text{per } x \to 0$$

$$\sin x \sim x \qquad \text{per } x \to 0$$

2) $\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}}$

Questo si scrive anche come:

$$1 - \cos x = \frac{x^2}{2}(1 + o(1)) \qquad \text{per } x \to 0$$

$$1-\cos x \sim \frac{x^2}{2} \qquad \text{per } x\to 0$$

$$1-\cos x = \frac{x^2}{2} + \underbrace{\frac{x^2}{2}\, o(1)}_{= o(x^2)} = \frac{x^2}{2} + o(x^2) \qquad \text{per } x\to 0$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \qquad \text{per } x\to 0.$$

Non è preciso, invece, scrivere

$$\cancel{\cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2}} \quad \text{ovvio perché entrambe tendono a } 1 \qquad \text{per } x\to 0$$

questo è vero, ma è vero anche $\cos x \sim 1+\frac{x}{3}$, per esempio

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}\,\frac{1+\cos x}{1+\cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{1-\cos^2 x}^{\sin^2 x}}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\boxed{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\boxed{\frac{1}{1+\cos x}}}_{\to 1/2} = \frac{1}{2}$$

3) $$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\underbrace{\cos x}_{\to 1}} \cdot \frac{1}{x} = 1$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1}$$

Scritture alternative:

$\operatorname{tg} x \sim x \qquad \text{per } x\to 0$

$\operatorname{tg} x = x\,(1+o(1)) \qquad \text{per } x\to 0$

$\operatorname{tg} x = x + o(x) \qquad$ ''

Esercizi

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \overbrace{\sin x}^{\to 0}}{\underbrace{\cos x - 1}_{\downarrow\, 0}} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \underbrace{\boxed{\frac{x^2}{(\cos x - 1)}}}_{\downarrow\, -2} \underbrace{\boxed{\frac{\sin x}{x}}}_{\downarrow\, 1} = -2$$

oppure

$$\frac{x \overbrace{\sin x}^{x(1+o(1))}}{\underbrace{\cos x - 1}_{-\frac{x^2}{2}(1+o(1))}} = \frac{\cancel{x} \cdot \cancel{x}\,(1+o(1))}{-\frac{\cancel{x^2}}{2}(1+o(1))} \to -2. \qquad x \to 0$$

Più sinteticamente

$$\frac{x \overbrace{\sin x}^{\sim x}}{\underbrace{\cos x - 1}_{\sim -\frac{x^2}{2}}} \sim \frac{x^2}{-\frac{x^2}{2}} = -2 \qquad x \to 0$$