TEOREMA "PONTE"

$f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0, \ell \in \mathbb{R}^*$
x_0 pto di accum. di X.

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \iff \forall$ succ^{ne} $\{a_n\}$ a valori in $X \setminus \{x_0\}$
t.c. $a_n \to x_0$ si ha $f(a_n) \to \ell$.

DIM $\boxed{\Rightarrow}$

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ significa: $\forall V$ intorno di ℓ $\exists U$ intorno di x_0 t.c.
$f(x) \in V \quad \forall x \in U \cap X \setminus \{x_0\}$.

Sia ora $\{a_n\}$ a valori in $X \setminus \{x_0\}$ t.c. $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = x_0$.

Preso U intorno di x_0 (quello corrispondente a V) sappiamo che
$a_n \in U \cap X \setminus \{x_0\}$ def^{te} per $n \to +\infty$.

$\Downarrow$ dall' ipotesi della 1^a riga

$f(a_n) \in V$ def^{te} per $n \to +\infty$.

Abbiamo provato che: $\forall V$ intorno di ℓ $f(a_n) \in V$ def^{te}.

cioè $\lim\limits_{n \to +\infty} f(a_n) = \ell$

$\boxed{\Leftarrow}$ Devo provare che

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$, cioè $\forall V$ intorno di ℓ $\exists U$ intorno di x_0
t.c. $f(x) \in V$ $\forall x \in U \cap X \setminus \{x_0\}$.

Supponiamo per assurdo di no, cioè (negazione della def^{ne} di lim.)

$\exists$ un intorno V di ℓ t.c. $\forall U$ intorno di x_0
$\exists x \in U \cap X \setminus \{x_0\}$ verificante $f(x) \notin V$.

Voglio costruire una succ^{ne} $a_n \to x_0$ ma tale che $f(a_n) \not\to \ell$.

Supponiamo che $x_0 \in \mathbb{R}$.

V è sempre quello di prima!

Prendo $\mathcal{U} = (x_0 - 1, x_0 + 1) \Rightarrow \exists\, a_1 \in \mathcal{U} \cap X \setminus \{x_0\}$ verificante $f(a_1) \notin V$. $(|a_1 - x_0| < 1)$

Prendo $\mathcal{U} = (x_0 - \frac{1}{2}, x_0 + \frac{1}{2}) \Rightarrow \exists\, a_2 \in \mathcal{U} \cap X \setminus \{x_0\}$ verificante $f(a_2) \notin V$ $(|a_2 - x_0| < \frac{1}{2})$.

$\vdots$

Prendo $\mathcal{U} = (x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}) \Rightarrow \exists\, a_n \in \mathcal{U} \cap X \setminus \{x_0\}$ t.c. $f(a_n) \notin V$ $(|a_n - x_0| < \frac{1}{n})$.

In questo modo ho costruito una succ^{ne} $\{a_n\}$ a valori in $X \setminus \{x_0\}$.
si ha $0 \leq |a_n - x_0| < \frac{1}{n} \Rightarrow a_n \to x_0$

Però non può essere $f(a_n) \to \ell$, perché esiste un intorno V di ℓ t.c. $f(a_n) \notin V$ $\forall n$

Se $x_0 = +\infty$ prendo gli intorni $\mathcal{U}$ della forma $(n, +\infty)$ $\square$

La dim. per assurdo funziona così: invece di provare direttamente che
$$A \Rightarrow B$$
provo che $\underbrace{\neg B}_{\text{negazione di } B} \Rightarrow \neg A$.

Applicazione del teorema: non esistenza dei limiti

Per provare che $\nexists \lim_{x \to x_0} f(x)$, basta provare che

$\exists$ due succ^{ni} $\{a_n\}, \{b_n\}$ a valori in $X \setminus \{x_0\}$ t.c.
$a_n, b_n \longrightarrow x_0$ ma tali che $\lim_{n \to +\infty} f(a_n) \neq \lim_{n \to +\infty} f(b_n)$

Lo abbiamo fatto per provare che $\nexists \lim_{x\to+\infty} \sin x$.

$a_n = n\pi \to +\infty \qquad \sin(a_n) = 0 \longrightarrow 0$

$b_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \to +\infty \qquad \sin(b_n) = 1 \longrightarrow 1$.

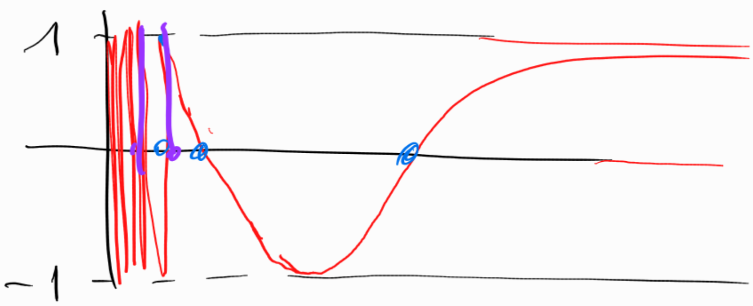
$\nexists \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$. Devo trovare due succ^{ni} $a_n, b_n \to 0$, a valori in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

t.c. $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} \neq \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{b_n}$.

$a_n = \frac{1}{n} \to 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} n = +\infty$

$b_n = -\frac{1}{n} \to 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} (-n) = -\infty$

$\nexists \lim_{x\to 0^+} \cos\frac{1}{x}$



$y = \cos\frac{1}{x}$

Cerco due succ^{ni} a_n, b_n a valori in $(0,+\infty)$

$a_n, b_n \to 0^+$, $\quad \cos\frac{1}{a_n}$, $\cos\frac{1}{b_n}$ abbiano limiti diversi.

$a_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+n\pi} \longrightarrow 0^+, \quad \cos\frac{1}{a_n} = \cos\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right) = 0 \longrightarrow 0$

$b_n = \frac{1}{2n\pi} \longrightarrow 0^+, \quad \cos\frac{1}{b_n} = \cos(2n\pi) = 1 \longrightarrow 1$

Proprietà dei limiti

Teorema $\lim_{x\to x_0} f(x)$, se esiste, è unico.

Permanenza del segno

Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \in (0,+\infty] \Rightarrow f(x) > 0$ def^{te} per $x \to x_0$

cioè $\exists\, U$ intorno di x_0 t.c.

$f(x) > 0 \quad \forall x \in U \cap X \setminus \{x_0\}$

Equivalentemente:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Se } f(x) \leq 0 \text{ def}^{te} \text{ per } x \to x_0 \\ \lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \end{array}\right| \Rightarrow \ell \leq 0$$

Generalizzazione:

Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$. e $m < \ell \Rightarrow f(x) > m$ def^{te} per $x \to x_0$

$M > \ell \Rightarrow \quad < M$

TEOREMA dei CARABINIERI $f, g, h : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$x_0, \ell \in \mathbb{R}^*$, x_0 pto di accum. per X.

Se $\quad f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ def^{te} per $x \to x_0$

e $\quad \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = \ell$.

Allora $\quad \lim_{x\to x_0} g(x) = \ell$.

Proviamo che $\lim_{x\to 0} \sin x = 0$

Voglio provare preliminarmente che $\boxed{|\sin x| \leq |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}.}$

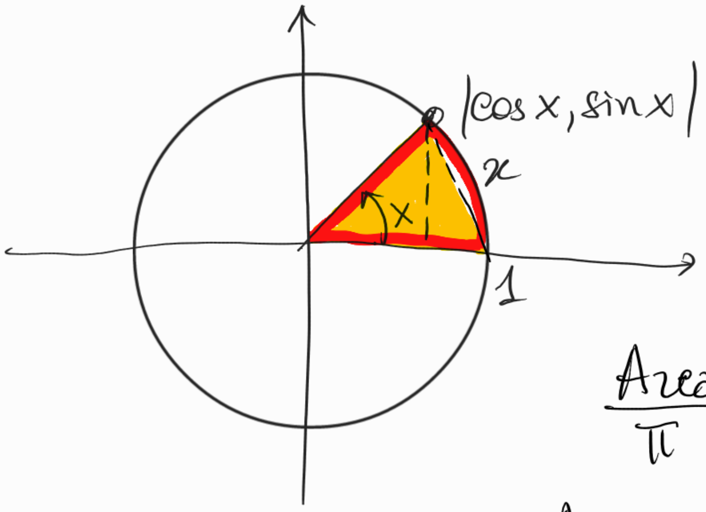
sono entrambe funzioni pari, quindi basta provarlo per $x \geq 0$.

$$|\sin x| \overset{?}{\leq} x \quad \forall x \geq 0.$$

Automaticamente vera se $x \geq 1$, basta provarlo $\forall x \in [0,1)$

siamo nel 1° quadrante (dove $\sin x > 0$)

Basta provare $\sin x \leq x \quad \forall x \in [0,1)$.

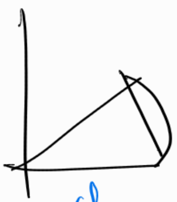


$$\text{Area} = \frac{\sin x}{2}$$

$$\text{Area} = \frac{x}{2}$$

$$\frac{\text{Area}}{\pi} = \frac{x}{2\pi}$$

$$\text{Area} \leq \text{Area}$$



$$\frac{\operatorname{sen} x}{\cancel{2}} \leq \frac{x}{\cancel{2}} \quad \text{ok.}$$

Ora proviamo che $\lim_{x\to 0} \sin x = 0$

$$0 \leq |\sin x| \leq |x| \qquad x \to 0$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$0 \qquad\qquad 0$$

$$\Rightarrow |\sin x| \xrightarrow{x\to 0} 0 \quad \Rightarrow \quad \sin x \xrightarrow{x\to 0} 0$$

Aritmetica dei limiti

$f, g : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^*$ pto di accum. di X.

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = m \in \mathbb{R}$. Allora

1) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to x_0} (\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha \ell + \beta m$$

2) $\lim_{x \to x_0} f(x) g(x) = \ell m$.

3) se $m \neq 0$ $\quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell}{m}$.

$\Downarrow$

implica che $g(x) \neq 0$ def^{te} per $x \to x_0$

Si possono dimostrare o con gli intorni oppure con il teor. ponte.

Vediamo la 2). Sia $\{a_n\}$ a valori in $X \setminus \{x_0\}$ t.c. $a_n \to x_0$. Per il teorema ponte $\boxed{\Rightarrow}$

$f(a_n) \to \ell$, $g(a_n) \to m \implies f(a_n) \cdot g(a_n) \to \ell \cdot m$.

Questo vale $\forall$ succ^{ne} $\{a_n\}$ t.c. . . .

Uso il teorema ponte $\boxed{\Leftarrow}$ $\lim_{x \to x_0} f(x) g(x) = \ell . m$

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 + 2x}{x - x^3} = -\frac{15}{24} = -\frac{5}{8}$$

$x \to 3 \Rightarrow \begin{array}{l} x^2 \to 9 \\ 2x \to 6 \end{array} \Big| \Rightarrow x^2 + 2x \to 9 + 6 = 15$

$x - x^3 \to 3 - 27 = -24$

Successivamente si estende l'aritmetica dei limiti alle stesse situazioni viste per le successioni:

$$\text{"} +\infty \cdot \ell = \begin{cases} +\infty & \text{se } \ell \in (0,+\infty] \\ -\infty & \text{se } \ell \in [-\infty, 0). \end{cases} \text{"}$$

Significa

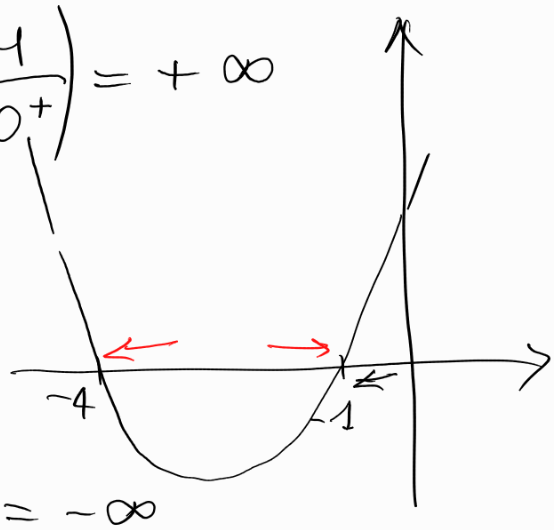
$$\text{se} \left. \begin{array}{l} \lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \\ \lim_{x\to x_0} g(x) = \ell \end{array} \right| \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)\, g(x) = - - -$$

$$\text{"} \frac{\ell}{0^+} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \ell \in (0,+\infty] \\ -\infty & \text{se } \ell \in [-\infty, 0). \end{cases} \text{"}$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{\overbrace{1-x^2}^{\to -8}}{\underbrace{(x-3)^2}_{\to 0^+}} = -\infty .$$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{1}{x^2+5x+4} = \left(\frac{1}{0^+}\right) = +\infty$$

$$y = x^2+5x+4$$



$$\lim_{x\to -1^-} \frac{1}{x^2+5x+4} = \left(\frac{1}{0^-}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to -4^+} \frac{1}{x^2+5x+4} = \left(\frac{1}{0^-}\right) = -\infty .$$

$$\lim_{x\to-\infty} \left(\underbrace{x}_{-\infty} - \underbrace{3\cos x^2}_{\nexists \text{ limite}}\right) = \text{"} -\infty + \text{limitata superiormente"} = -\infty.$$

$$x - 3\cos x^2 \leq x + 3 \longrightarrow -\infty$$