Confronti tra infiniti.

- Gli esponenziali (con base >1) sono infiniti di ordine superiore rispetto alle potenze.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b^n}{n^\alpha} = +\infty \qquad \text{se } b>1,\ \alpha\in\mathbb{R}$$

Anzi, questo è vero anche se n è sostituito da $a_n \to +\infty$

$$a_n \to +\infty \implies \lim_{n\to+\infty} \frac{b^{a_n}}{(a_n)^\alpha} = +\infty \qquad \text{se } b>1.$$

- I logaritmi sono infiniti di ordine inferiore rispetto a qualunque potenza positiva.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log_b n}{n^\alpha} = 0 \qquad \text{se } \alpha>0,\ b>0\ b\neq 1.$$

Si può dimostrare che questo è vero anche se n è sostituito da $a_n \to +\infty$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log_b a_n}{(a_n)^\alpha} = 0 \qquad \text{se } a_n\to+\infty,\ \text{se } \alpha>0,\ b>0\ b\neq 1.$$

se $b>1$ basta porre $\log_b a_n = t_n \to +\infty$

Questo vale anche se prendo una potenza del logaritmo

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(\log_b a_n)^\beta}{(a_n)^\alpha} = 0 \qquad \forall\alpha>0,\ \forall a_n\to+\infty,\ \forall b>1\ \forall\beta>0$$

Fattoriale $n! = n(n-1)\dots 2\cdot 1$ se $n\in\mathbb{N}_+$

$1! = 1$ $\qquad$ $0! = 1.$

$2! = 2\cdot 1 = 2$

$3! = 6$

$4! = 24$

$5! = 120$

$6! = 720$

$7! = 5040$

$\{n!\}$ è un infinito di ordine superiore rispetto agli esponenziali

$$\boxed{\textbf{PROP} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{b^n} = +\infty \quad \forall b>1}$$

Dim Usiamo il criterio del rapporto per la succ.ne $a_n = \dfrac{n!}{b^n}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\overset{\cancel{n!}(n+1)}{\overset{\shortparallel}{(n+1)!}}}{b^{\cancel{n+1}}}\cdot\frac{\cancel{b^n}}{\cancel{n!}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{b} = +\infty$$

Criterio del rapporto

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$$

- n^n è infinito di ordine superiore rispetto a $n!$

$$\boxed{\textbf{PROP} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty}$$

Dim Poniamo $a_n = \dfrac{n^n}{n!}$.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^{n+\cancel{1}}}{\cancel{(n+1)}\cancel{!}}\cdot\frac{\cancel{n!}}{n^n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^n}{n^n} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e > 1 \xRightarrow{\text{crit. rapporto}} a_n \to +\infty.$$

$\square$

$$\lim_{n\to+\infty} \underbrace{\boxed{\frac{(2n)!}{n^n}}}_{= a_n} = +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\overbrace{(2n+2)!}^{\cancel{(2n)!}(2n+1)(2n+2)}}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{\cancel{(2n)!}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(2n+1)2\cancel{(n+1)}}{(n+1)^{n+\cancel{1}}} \cdot n^n = \lim_{n\to+\infty} \frac{2(2n+1)}{\underbrace{\boxed{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}}_{\to e}} = +\infty$$

Formula di Stirling per il fattoriale

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \quad \text{per } n\to+\infty$$

Gerarchie di infiniti

$n\to+\infty$

$$\log n < \sqrt{n} < n < n^2 < n^3 < \dots < n^{100} < \dots < 2^n < 3^n < \dots < n! < n^n < \dots$$

dove $a_n < b_n$ significa $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{a_n} = +\infty$

$$n^n < n^{n+1} < (2n)^n <$$

$$< \sqrt{\log\log n} < \log\log n < (\log\log n)^2 < \sqrt{\log n} < \log n$$

$$n < n \log\log n < n \log n < n (\log n)^2 < \dots < n^{1{,}001}$$

Uso della gerarchia di infiniti.

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{3^n - 5n^2 \log n}{n^2 2^n - n^5} = \lim_{n \to +\infty} \frac{3^n(1+o(1))}{n^2 2^n (1+o(1))} =$$

$$3^n - \underbrace{5n^2 \log n}_{\text{compreso tra } n^2 \text{ e } n^3} = 3^n \left(1 - \frac{5n^2 \log n}{3^n}\right) = 3^n(1+o(1))$$

esponenz.

$$\overset{\text{def}^{\text{te}}}{0 \leq \frac{5n^2 \log n}{3^n} \leq \frac{n^3}{3^n} \to 0}$$

$$n^2 2^n - n^5 = n^2 2^n \left(1 - \frac{n^{\cancel{5}3}}{\cancel{n^2} \cdot 2^n}\right) = n^2 2^n (1+o(1))$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{(3/2)^n}{n^2} (1+o(1)) = +\infty.$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{5^{\log_2 n}}{n} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^{\frac{1}{\log_5 2}}}{n} = +\infty$$

$\frac{1}{\log_5 2} > 1$

$$\left[5^{\log_2 n} = 5^{\frac{\log_5 n}{\log_5 2}} = \left(5^{\log_5 n}\right)^{\frac{1}{\log_5 2}} = n^{\frac{1}{\log_5 2}}\right]$$

Altro modo

$$\frac{5^{\log_2 n}}{2^{\log_2 n}} = \left(\frac{5}{2}\right)^{\log_2 n} \to +\infty.$$

$\frac{5}{2} > 1$, $\log_2 n \nearrow +\infty$

$\log n \qquad \log_2 n \qquad \log(n^2) \qquad \log(n^3)$

sono infiniti dello stesso ordine, anzi differiscono solo per una costante.

$$\log_2 n = \frac{\log n}{\log 2}, \quad \log(n^2) = 2\log n, \quad \log(n^3) = 3\log n.$$

Sottosuccessioni

DEF Data una successione $\{a_n\}$, si dice sottosuccessione di $\{a_n\}$ una successione della forma $b_n = a_{k_n}$, dove $\{k_n\}$ è una successione strett. crescente di interi naturali.

Esempi

$\{a_n\} = \frac{1}{n}$ $\qquad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots$

$\{a_{2n}\} = \frac{1}{2n}$ $\qquad \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \dots$

$\{a_{2n-1}\} = \frac{1}{2n-1}$ $\qquad 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \dots$

$\{a_{n^2}\} = \frac{1}{n^2}$ $\qquad 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots$

$\{a_{k_n}\} = \frac{1}{k_n}$ $\qquad \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{11}, \dots$

$k_n =$ sequenza dei numeri primi.

Le prossime non sono sottosucc^{ni} di $\left\{\frac{1}{n}\right\}$

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \dots$$

$$\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \dots$$

PROP. Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}^*$, allora ogni sottosucc^{ne} di $\{a_n\}$ tende ancora a ℓ.

Dim. Ipotesi $\forall U$ intorno di ℓ $\exists \bar{n}$ t.c. $a_n \in U$ $\forall n \geq \bar{n}$

Sia $\{a_{k_n}\}$, dove $\{k_n\}$ è una succ^{ne} strettamente crescente di interi, una sottosucc^{ne} di $\{a_n\}$.

<u>Tesi</u> $\forall V$ intorno di ℓ $\exists\ \bar{n}$ t.c. $a_{k_n} \in V$ $\forall n \geq \bar{\bar{n}}$

<u>OSS</u> k_n strett. crescente $\Rightarrow$ si ha $k_n \geq n$

$\Rightarrow$ Basta prendere $\bar{\bar{n}} = \bar{n}$. Infatti se $n \geq \bar{n}$

$k_n \geq n \geq \bar{n} \Rightarrow a_{k_n} \in V$. $\square$

COROLLARIO Se una successione $\{a_n\}$ ammette due sottosucc^{ni} che hanno limiti diversi, essa non ammette limite.

<u>Esempio</u> $a_n = (-1)^n$ non ammette limite. Dimostriamolo.

basta considerare $a_{2n} = (-1)^{2n} = 1 \longrightarrow 1$

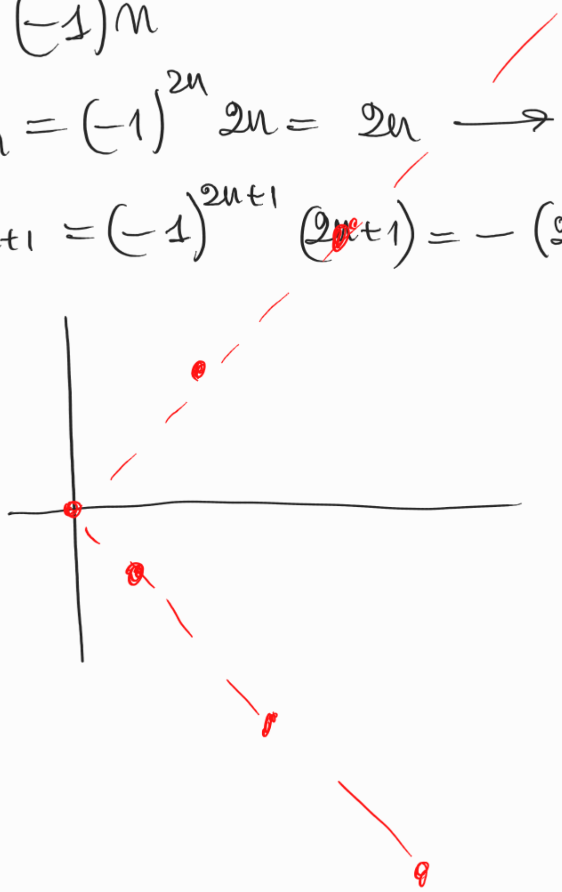
$a_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = -1 \longrightarrow -1$.

$a_n = (-1)^n n$

$a_{2n} = (-1)^{2n} 2n = 2n \longrightarrow +\infty$

$a_{2n+1} = (-1)^{2n+1} (2n+1) = -(2n+1) \longrightarrow -\infty$

$\Rightarrow$ a_n non ha limite.



Se $\lim_{n\to+\infty} a_{k_n} = \ell$, cosa posso dire sul limite dell'intera successione $\{a_n\}$?

Posso solo dire che se il limite di $\{a_n\}$ esiste, esso vale ℓ.

PROP. Supponiamo di avere due sottosucc^{ni} di $\{a_n\}$, siano esse $\{a_{k_n}\}$, $\{a_{h_n}\}$ (k_n e h_n sono successioni strett. crescenti di interi) t.c. $\boxed{\{k_n\} \cup \{h_n\} = \mathbb{N}}$.

Esempio $\left| \begin{array}{l} k_n = 2n \\ h_n = 2n+1 \end{array} \right.$

Se proviamo che $\lim_{n\to+\infty} a_{k_n} = \lim_{n\to+\infty} a_{h_n} = \ell$, allora tutta la succ^{ne} $\{a_n\}$ tende a ℓ.

Esempio

$$a_n = \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$$

Considero

$$\left. \begin{array}{l} a_{2n} = \dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}} \longrightarrow 0 \\[2ex] a_{2n+1} = \dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{\sqrt{2n+2}} \longrightarrow 0 \end{array} \right| \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

Teorema di Bolzano-Weierstrass

Ogni successione limitata ammette almeno una sottosucc^{ne} convergente.

Per es. $a_n = (-1)^n$ è limitata.

$a_{2n} = (-1)^{2n} = 1$ converge a 1

$a_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = -1$ " " -1.

$a_n = \operatorname{sen} n$ è limitata. $\Rightarrow$ BW assicura che posso una sottosucc convergente a un numero $\ell \in [-1,1]$.

Cominciamo dalla seguente

PROP. Ogni succ^{ne} $\{a_n\}$ ammette una sottosucc^{ne} monotòna.

Supponiamo di aver provato quest'ultima.

Dim di Bolzano-Weierstrass

Sia $\{a_n\}$ una succ^{ne} limitata. Per la proposizione precedente $\exists\ \{a_{k_n}\}$ monotòna, che è anch'essa limitata.
Per il teorema sui limiti delle succ^{ni} monotòne, questa è convergente $\square$

Riferimento sul testo consigliato: §§ 2.11, 2.12.