DEF $\{a_n\}, \{b_n\}$ due succ^{ni} def^{te} non nulle.
Esse si dicono **asintoticamente equivalenti** per $n \to +\infty$ e scriveremo $a_n \sim b_n$ per $n \to +\infty$ se

$$\boxed{a_n = b_n (1 + o(1))} \text{ per } n \to +\infty$$

oppure equivalentemente

$$\frac{a_n}{b_n} \to 1 \quad \text{per } n \to +\infty.$$

Per es. $a_n = 2n^3 - n + 5$, $a_n \sim 2n^3$

$$\frac{2n^3 - n + 5}{2n^3} \xrightarrow{?} 1 \qquad \text{sì.}$$

OSS se $a_n \sim b_n$
e se $\lim_{n \to +\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}^* \implies \lim_{n \to +\infty} b_n = \ell$.

ma il viceversa non è vero, per es.

$a_n = n \to +\infty$
$b_n = n^2 \to +\infty$ | ma non sono asintoticamente equiv.

Il viceversa è vero però se $\ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

se $a_n \to \ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$b_n \to \ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\implies \dfrac{a_n}{b_n} \to \dfrac{\ell}{\ell} = 1$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{2n^5 - n^3 + 7}{n^5 - 2n + 3n^2} = \lim_{n \to +\infty} \frac{2n^5 (1 + o(1))}{n^5 (1 + o(1))} = 2$$

Domanda: quando, nell'espressione di un limite, posso sostituire una successione con una asint. equivalente? Quando, invece, porta a errori?

PROP. Siano $\{a_n\}, \{\bar{a}_n\}, \{b_n\}, \{\bar{b}_n\}$ successioni def^{te} non nulle t.c. $a_n \sim \bar{a}_n$, $b_n \sim \bar{b}_n$. Allora:

1) $\dfrac{a_n}{b_n} \sim \dfrac{\bar{a}_n}{\bar{b}_n}$

infatti

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\bar{a}_n}{\bar{b}_n}\boxed{\frac{(1+o(1))}{(1+o(1))}} = \frac{\bar{a}_n}{\bar{b}_n}(1+o(1))$$

$\Downarrow$

$1+o(1)$

cioè la tesi.

2) $a_n b_n \sim \bar{a}_n \cdot \bar{b}_n$

Infatti

$$\frac{a_n b_n}{\bar{a}_n \bar{b}_n} = \underbrace{\frac{a_n}{\bar{a}_n}}_{\downarrow\, 1} \cdot \underbrace{\frac{b_n}{\bar{b}_n}}_{\downarrow\, 1} \longrightarrow 1$$

3) Sia $r \in \mathbb{R}$.

$$(a_n)^r \sim (\bar{a}_n)^r$$

dim

$$\frac{(a_n)^r}{(\bar{a}_n)^r} = \left(\frac{a_n}{\bar{a}_n}\right)^r \longrightarrow 1^r = 1$$

OSS $2n^5 - n^3 + 7 \sim 2n^5$
$n^5 - n^2 + 3n^3 \sim n^5$

$$\Longrightarrow \frac{2n^5 - n^3 + 7}{n^5 - n^2 + 3n^3} \sim \frac{2\cancel{n^5}}{\cancel{n^5}} = 2$$

cioè il limite vale 2.

$$\frac{2n^6 - n^3 + 7}{n^5 - n^2 + 3n^3} \sim \frac{2n^6}{n^5} = 2n \longrightarrow +\infty$$

Attenzione. sostituire succ^{ni} asintoticamente equivalenti in addendi di una somma (o differenza) oppure all'interno di funzioni può portare a errori!

$(n+1)^2 \sim n^2$ ok.

$\boxed{(n+1)^2 - n^2 \sim n^2 - n^2 = 0}$ ERRATO.

$(n+1)^2 - n^2 = \cancel{n^2} + 2n + 1 - \cancel{n^2} \to +\infty$

$\underbrace{(n+1)^2}_{= n^2(1+o(1))} - n^2 = n^2(1+o(1)) - n^2 = \cancel{n^2} + n^2 o(1) - \cancel{n^2} = n^2 o(1)$

In questo caso non posso concludere nulla (forma indet.)

$n^2+n \sim n^2$ $\boxed{\Longrightarrow e^{n^2+n} \sim e^{n^2}}$ Sbagliato!

$$\frac{e^{n^2+n}}{e^{n^2}} = e^n \to +\infty$$

Non posso sostituire succ^{ni} asint. equivalenti dentro un esponent.

$1 + \frac{1}{n} \sim 1 \quad \Longrightarrow \quad \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{\to e} \sim \underbrace{1^n}_{\to 1}$ FALSO

NO!

Tuttavia anche in una somma (senza sostituire) può essere utile considerare le asintotiche equivalenze per capire quali termini "comandano"

$$\underbrace{\sqrt{n^3+1}}_{\sim n^{3/2}} - n = n^{3/2} \underbrace{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^3}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)}_{= 1+o(1)} \sim n^{3/2}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^x + n^{-4-x}}{n^{x-2}+n^6} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

OSS $\quad n^\alpha + n^\beta \sim \begin{cases} n^\alpha & \text{se } \alpha > \beta \\ 2n^\alpha & \alpha = \beta \\ n^\beta & \beta > \alpha \end{cases}$

$\alpha > \beta \quad n^\alpha + n^\beta = n^\alpha\left(1 + \underbrace{n^{\beta-\alpha}}_{o(1)}\right) \sim n^\alpha$

NUM $n^x + n^{-4-x} \sim \begin{cases} n^x & x > -2 \\ 2n^{-2} & x = -2 \\ n^{-4-x} & x < -2 \end{cases}$

$$x \gtreqless -4-x \iff x \gtreqless -2$$

DEN $n^{x-2} + n^6 \sim \begin{cases} n^{x-2} & \text{se } x > 8 \\ 2n^6 & \text{se } x = 8 \\ n^6 & \text{se } x < 8 \end{cases}$

$x > 8$ $\quad \dfrac{n^x + n^{-4-x}}{n^{x-2} + n^6} \sim \dfrac{n^x}{n^{x-2}} = n^2 \longrightarrow +\infty$

$x = 8$ $\quad \dfrac{n^x + n^{-4-x}}{n^{x-2} + n^6} \sim \dfrac{n^8}{2n^6} = \dfrac{n^2}{2} \longrightarrow +\infty$

$-2 < x < 8$ $\quad \dfrac{n^x + n^{-4-x}}{n^{x-2} + n^6} \sim \dfrac{n^x}{n^6} = n^{x-6} \rightarrow \begin{cases} +\infty & 6 < x < 8 \\ 1 & x = 6 \\ 0 & -2 < x < 6 \end{cases}$

$x = -2$ $\quad // \sim \dfrac{2n^{-2}}{n^6} = \dfrac{2}{n^8} \longrightarrow 0$

$x < -2$ $\quad \dfrac{n^x + n^{-4-x}}{n^{x-2} + n^6} \sim \dfrac{n^{-4-x}}{n^6} = n^{-10-x} \begin{cases} +\infty & x < -10 \\ 1 & x = -10 \\ 0 & -10 < x < -2 \end{cases}$

$$-10 - x > 0 \qquad x < -10$$

Risultato $\quad \lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \begin{cases} +\infty & x < -10 \text{ opp } x > 6 \\ 1 & (x = -10) \vee (x = 6) \\ 0 & -10 < x < 6 \end{cases}$

CONFRONTO TRA INFINITI

Una successione che tende a $\pm\infty$ si chiama "infinito".

Vogliamo chiarire come si confrontano tra loro infiniti diversi

Situazione tipica:

$a_n, b_n \to +\infty$ $\qquad \dfrac{a_n}{b_n}$ $\quad$ a_n tende a mandare la fraz. verso $+\infty$, b_n tende a mandare la fraz. verso 0.

DEF Siano $\{a_n\}, \{b_n\}$ due succ^{ni} tendenti a $+\infty$ opp. $-\infty$.

Diremo che

$\{a_n\}$ è un infinito di ordine superiore risp. a $\{b_n\}$ opp. $\{b_n\}$ è un infinito di ordine inferiore risp. a $\{a_n\}$. se

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{a_n} = 0 \quad \text{opp.} \quad \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n}{b_n}\right| = +\infty$$

In questo caso scriveremo $\quad a_n \succ b_n$ (per $n\to+\infty$)

Diremo che **$\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono infiniti dello stesso ordine**

se $\quad \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, cioè se

$$a_n \sim \ell b_n \qquad \left(\text{scriveremo} \quad a_n \asymp b_n\right)$$

Per es. $\quad n^3$ è un infinito di ordine superiore risp. a n^2.

n^3+5n^2 è un infinito di ordine inferiore risp. a $(3n-2)^5$

$(3n-2)^5$ è infinito dello stesso ordine di n^5

Confronto tra potenze ed esponenziali.

Considero n^α $(\alpha>0)$ e b^n $(b>1)$

sono infiniti. Dobbiamo confrontarli.

PROP. 1 Siano $b>1$, $\alpha\in\mathbb{R}$. Allora

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{b^n}{n^\alpha}=+\infty$$

OSS è ovvio se $\alpha\leq 0$. Se $\alpha>0$ è un confronto tra infiniti, e ci dice che

b^n $(b>1)$ è infinito di ordine sup. risp. a n^α

DIM. si basa sulla seguente prop. (che dim. dopo).

PROP. (Criterio del rapporto per succ^{ni})

Sia $\{a_n\}$ una succ^{ne} a termini positivi t.c.

$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\ell$. Allora

1) se $\ell\in[0,1)$ $\Rightarrow$ $\lim_{n\to+\infty}a_n=0$

2) se $\ell\in(1,+\infty]$ $\Rightarrow$ $\lim_{n\to+\infty}a_n=+\infty$.

OSS Il criterio non dice nulla se $\ell=1$.

Dim la prop. 1 basandoci sul criterio del rapporto.

$\boxed{b>1}$ $\qquad$ $\frac{b^n}{n^\alpha}=a_n$

Vediamo a cosa tende $\frac{a_{n+1}}{a_n}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\frac{b^{n+1}}{(n+1)^\alpha}\right)}{\left(\frac{b^n}{n^\alpha}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{b^{\cancel{n}+1}}{\cancel{b^n}} \boxed{\frac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha}} =$$

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha \to 1$$

$$= b > 1 \overset{\text{criterio rapporto}}{\Longrightarrow} a_n \to +\infty \quad \square.$$

$$b^n \succ n^\alpha \qquad (b>1,\ \alpha>0)$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3^n}{n^7 - 2n^5 + 5} = +\infty.$$

$\sim n^7$

La stessa cosa vale se invece di n prendo una succ^{ne} che tende a $+\infty$.

Prop 2 $a_n \to +\infty$, $b>1$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Allora

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b^{a_n}}{(a_n)^\alpha} = +\infty.$$

(Per la dim. utilizzare $L[a_n]$).

PROP 3 Siano $b>1$, $\alpha>0$. Allora

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log_b n}{n^\alpha} = 0.$$

OSS $n = b^{\log_b n}$

Dim

$$\frac{\log_b n}{n^\alpha} = \frac{\log_b n}{b^{\alpha \log_b n}} = \frac{a_n}{(b^\alpha)^{a_n}} \xrightarrow[\text{prop.2}]{} 0.$$

$a_n \to +\infty$

$b^\alpha > 1$