Esempio importante:

Sia $b \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{n\to+\infty} b^n \begin{cases} = +\infty & \text{se } b > 1. \quad (1) \\ = 1 \quad \text{(la succ}^{ne}\text{ è costante)} & \text{se } b = 1 \\ = 0 & \text{se } -1 < b < 1 \quad (|b| < 1) \quad (2) \\ \nexists & \text{se } b \leq -1 \quad (3) \end{cases}$$

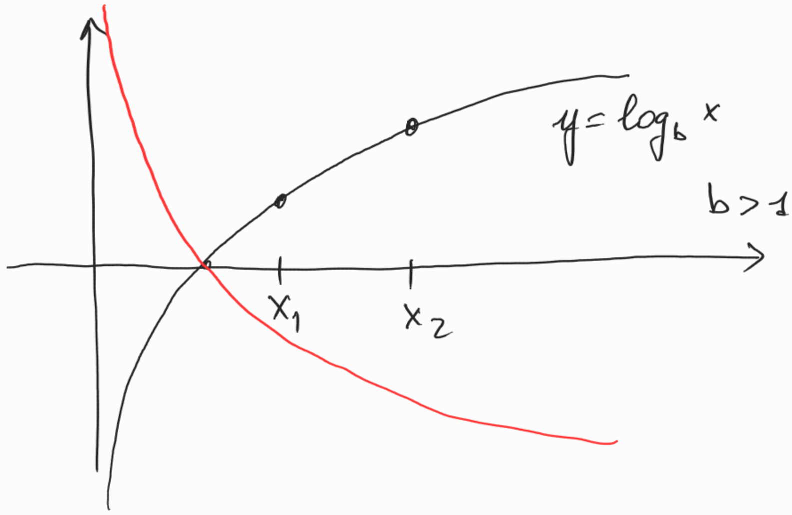
(1) Fissiamo $M > 0$. Devo trovare k t.c. $b^n > M \quad \forall n > k$.

OSS $\log_b x \quad b > 1$

$0 < b < 1$

f strettamente crescente, cioè

$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_b x_1 < \log_b x_2$



$$b^n > M \iff \underbrace{\log_b(b^n)}_{= n} > \log_b M \iff n > \underbrace{\log_b M}_{= k}$$

(2) $|b| < 1$

$$b^n \to 0 \iff |b^n| = \underbrace{|b|^n \longrightarrow 0}_{\text{proviamo questo.}}$$

se $b = 0$, il limite è ovvio

se $0 < |b| < 1$

Fix $\varepsilon > 0$, cerco k t.c. $|b|^n < \varepsilon \quad \forall n > k$.

applico la funzione $\log_{|b|}$ a entrambi i membri.

$$|b|^n < \varepsilon \iff \underbrace{\log_{|b|}(|b|^n)}_{n} > \log_{|b|} \varepsilon \iff n > \underbrace{\log_{|b|} \varepsilon}_{= k.}$$

③ se $b \leq -1 \Rightarrow \begin{cases} b^n \leq -1 & \text{se } n \text{ è dispari} \\ b^n \geq 1 & \text{se } n \text{ è pari} \end{cases}$

PROPRIETÀ dei limiti di successioni

TEOREMA (Unicità del limite)

Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri reali. Allora $\lim_{n\to+\infty} a_n$, se esiste, è unico.

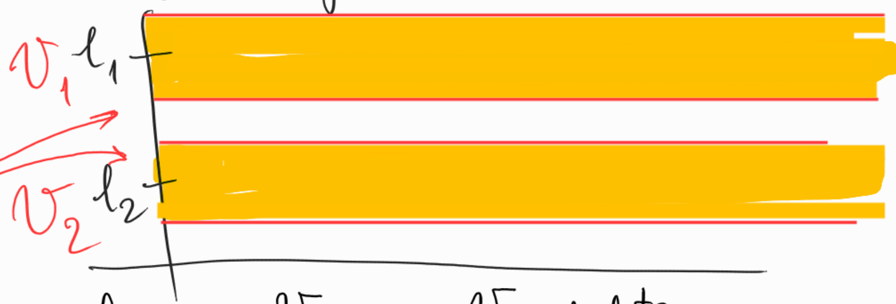
DIM. per assurdo. Supponiamo che esistano $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}^*$ $\ell_1 \neq \ell_2$ t.c. $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell_1$, $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell_2$.

$\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell_1 \Leftrightarrow \forall V_1$ intorno di ℓ_1 $a_n \in V_1$ definitivamente

$\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell_2 \Leftrightarrow \forall V_2$ " " ℓ_2 $a_n \in V_2$ "

Posso sempre scegliere V_1 e V_2 disgiunti tra loro

La successione dovrebbe stare definitivamente in ciascuno di questi due intorni!



In questo caso è impossibile che $a_n \in V_1$ $a_n \in V_2$ def^{te}.
si avrebbe infatti $a_n \in V_1 \cap V_2 = \emptyset$ ASSURDO!

<u>OSS</u> Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}^*$, e considero una successione $\{\tilde{a}_n\}$ ottenuta modificando un numero finito di termini di a_n allora anche $\lim_{n\to+\infty} \tilde{a}_n = \ell$. Il motivo è che definitivamente $a_n = \tilde{a}_n$

TEOREMA della PERMANENZA del segno

Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \in (0,+\infty]$, allora $a_n > 0$ definitivamente
$\in [-\infty, 0)$ " $a_n < 0$ "

DIM. Se $\ell \in (0,+\infty]$, posso prendere un intorno V di ℓ costituito solo da numeri positivi.

(Se $\ell \in (0,+\infty)$, prendo l'intorno di centro ℓ e raggio ℓ
$V = (0, 2\ell)$
se $\ell = +\infty$, prendo $V = (0,+\infty]$)

Poiché definitivamente $a_n \in V \Rightarrow$ def^{te} $a_n > 0$. $\square$

A volte si usa nel seguente modo:

Se $a_n \geq 0$ def^{te}, $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \implies \ell \geq 0$.

Infatti, se fosse $\ell < 0$, dovrebbe essere $a_n < 0$ def^{te}

Attenzione! La seguente implicazione è errata

$a_n > 0$ def^{te} $\implies \ell = \lim_{n\to+\infty} a_n > 0$ FALSO

potrebbe essere nullo!

Per esempio $a_n = \frac{1}{n} > 0$, ma $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$

Teorema del confronto (o dei carabinieri)

Siano $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ tre successioni di numeri reali t.c.

$$a_n \leq b_n \leq c_n \quad \text{definitivamente}$$

Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} c_n = \ell \in \mathbb{R}^*$, allora anche $\lim_{n\to+\infty} b_n = \ell$.

Esempio. $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$

Infatti $\underbrace{-\frac{1}{n}}_{\downarrow\, 0} \le \frac{\sin n}{n} \le \underbrace{\frac{1}{n}}_{\downarrow\, 0}$

OSS Il teorema dei carabinieri viene spesso utilizzato come segue:

Poiché $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R} \iff \lim_{n\to+\infty} |a_n - \ell| = 0$

Per provare questo basta provare questo

$$0 \le |a_n - \ell| \le c_n \longrightarrow 0$$

basta trovare un carabiniere da questo lato

Per es., per provare che $\frac{\sin n}{n} \to 0$

$$0 \le \left|\frac{\sin n}{n}\right| = \frac{|\sin n|}{n} \le \frac{1}{n} \to 0$$

Dim. teor. carabinieri.

$a_n \le b_n \le c_n$ def^{te}, $a_n \to \ell$, $c_n \to \ell$

Sia ℓ come nell'enunciato.

Sia V un generico intorno di ℓ.

Per def^{ne} di limite $a_n \in V$ def^{te}

$c_n \in V$ def^{te}

ma V è un intervallo. Se a_n e $c_n \in V$, anche $b_n \in V$ def^{te}.

Poiché V è arbitrario, abbiamo provato che $b_n \to \ell$. $\square$

OSS Se $\ell = +\infty$ oppure $-\infty$, di carabiniere ne basta uno.

TEOREMA "del carabiniere"

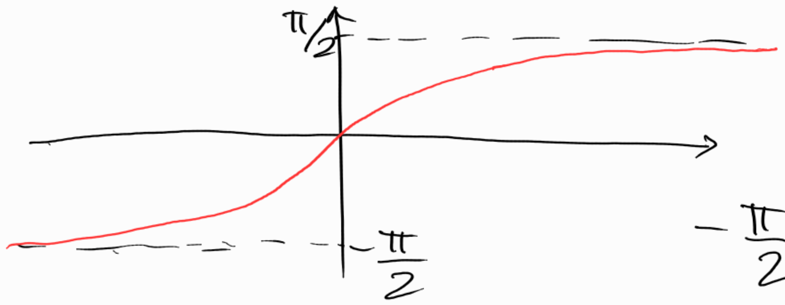
Se $a_n \le b_n$ def^{te}, allora

1) se $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, anche $\lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$

2) se $\lim_{n\to+\infty} b_n = -\infty$, anche $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$

Esempio:

$$\lim_{n\to+\infty} \left(5 - 2\operatorname{arctg}(n^2)\right)\underbrace{(n^2-1)}_{\downarrow \atop +\infty}$$



$y = \operatorname{arctg} x$.

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}$$

$$5 - 2\operatorname{arctg}(n^2) \geq 5 - \pi > 0$$

$$\underbrace{\left(5 - 2\operatorname{arctg}(n^2)\right)}_{\substack{\geq \\ 5-\pi \\ \geq \\ 1}}(n^2-1) \geq \underbrace{(5-\pi)\underbrace{(n^2-1)}_{\downarrow \atop +\infty}}_{\downarrow \atop +\infty} \longrightarrow +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{5n}{n+\cos^2 n} = 5 \qquad \text{verifichiamolo.}$$

Devo provare che $\left|\frac{5n}{n+\cos^2 n} - 5\right| \to 0$

$$0 \leq \left|\frac{5n}{n+\cos^2 n} - 5\right| = \left|\frac{\cancel{5n} - \cancel{5n} - 5\cos^2 n}{n+\cos^2 n}\right| =$$

$$= \frac{|-5\cos^2 n|}{|n+\cos^2 n|} = \frac{\overbrace{5\cos^2 n}^{\leq 5}}{\underbrace{n+\cos^2 n}_{\geq \atop n}} \leq \frac{5}{n} \to 0$$

Torniamo alla succ^{ne} $\frac{\sin n}{n} \to 0$

Abbiamo usato il fatto che $\frac{1}{n} \to 0$

e $-1 \leq \sin n \leq 1$

<u>Def.</u> Una succ^{ne} $\{a_n\}$ si dice

- limitata superiormente se $\exists\, M$ t.c. $a_n \leq M \ \forall n \in \mathbb{N}$
- " inferiormente se $\exists\, m$ t.c $a_n \geq m \ \forall n \in \mathbb{N}$.
- limitata se è limitata sup. e inf.

<u>OSS</u>

$\{a_n\}$ è limitata $\iff \exists K$ t.c. $|a_n| \leq K$.

$\boxed{\Leftarrow}$ se $|a_n| \leq K \Rightarrow -K \leq a_n \leq K$. è limitata

$\boxed{\Rightarrow}$ se $-7 \leq a_n \leq 3 \Rightarrow |a_n| \leq 7$

In generale se $m \leq a_n \leq M \Rightarrow |a_n| \leq K = \max\{|m|, |M|\}$

$$\underbrace{-|m|}_{\substack{\rotatebox{90}{$\leq$} \\ \min\{-|m|,-|M|\} \\ \| \\ -\max\{|m|,|M|\} \\ \| \\ -K}} \leq m \leq a_n \leq M \leq |M| \leq \max\{|m|, |M|\} = K$$

$\iff |a_n| \leq K$.

DEF Una succ^{ne} il cui limite vale zero si dice **infinitesima**.

TEOREMA

Il prodotto di una successione infinitesima e una limitata è infinitesimo.

In formule:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0 \\ |b_n| \leq K \ \forall n \end{array}\right| \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n b_n = 0.$$

Dim

$$0 \le |a_n b_n| \le K\underbrace{|a_n|}_{\downarrow\, 0} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

+ teor. dei carabinieri $\square$

Esempio:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3\sin^4(n^2) - 5\cos n}{n^2+2}$$

$$=$$

$$\underbrace{\left(3\sin^4(n^2) - 5\cos n\right)}_{\text{limitata}} \underbrace{\frac{1}{n^2+2}}_{\downarrow\, 0} \longrightarrow 0$$

dis. triangolare

$$\left|3\sin^4(n^2) - 5\cos n\right| \le \left|3\sin^4(n^2)\right| + \left|5\cos n\right| =$$

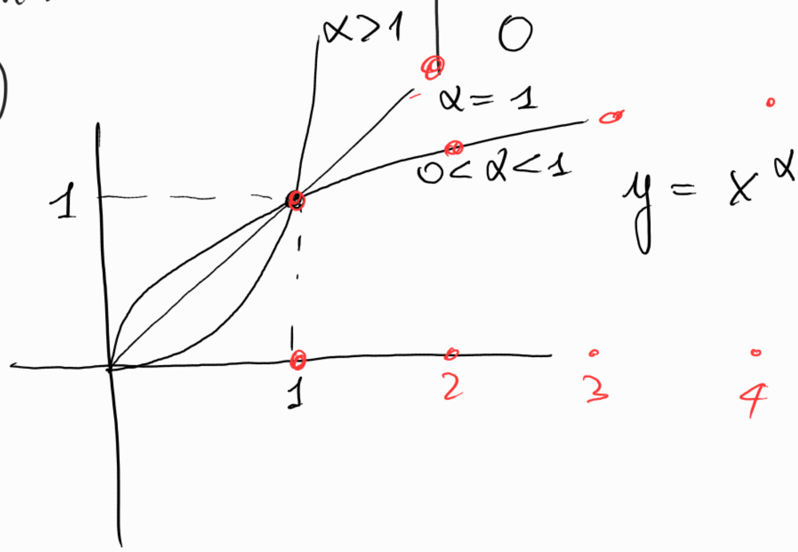
$$= \underbrace{3\sin^4(n^2)}_{\substack{\wedge \\ 3}} + \underbrace{5|\cos n|}_{\substack{\wedge \\ 5}} \le 8 \qquad \forall n$$

Limiti di potenze

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha>0 \\ 1 & \text{se } \alpha=0 \\ 0 & \text{se } \alpha<0 \end{cases}$$

(la succ^{ne} n^0 vale 1)

$(\alpha\in\mathbb{R})$



$y = x^\alpha$ se $\alpha > 0$

$\alpha>0$ $\quad \lim_{n\to+\infty} \underset{a_n^\alpha}{n^\alpha} = +\infty$?

$a_n^\alpha > M$

Fix $M>0$ $\quad$ cerco K t.c. $n^\alpha > M \quad \forall n > K$.

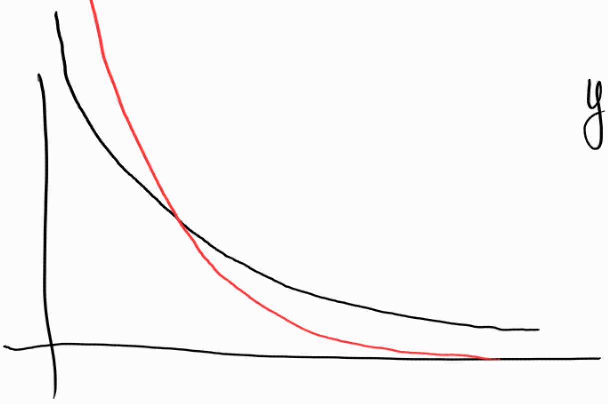
OSS. x^α e la sua inversa $x^{1/\alpha}$ sono entrambe crescenti se $\alpha>0$.

$$\overset{(a_n)^\alpha}{n^\alpha} > M \iff \overset{a_n}{n} > M^{1/\alpha} = k$$

$\alpha<0$ Fisso $\varepsilon>0$. cerco k t.c. $|n^\alpha| = n^\alpha < \varepsilon$ $\forall n>k$.

$$n^\alpha < \varepsilon \iff n > \varepsilon^{1/\alpha} = k$$

Se $\alpha<0$



OSS Al posto di n si può mettere una succ^{ne} $a_n \to +\infty$

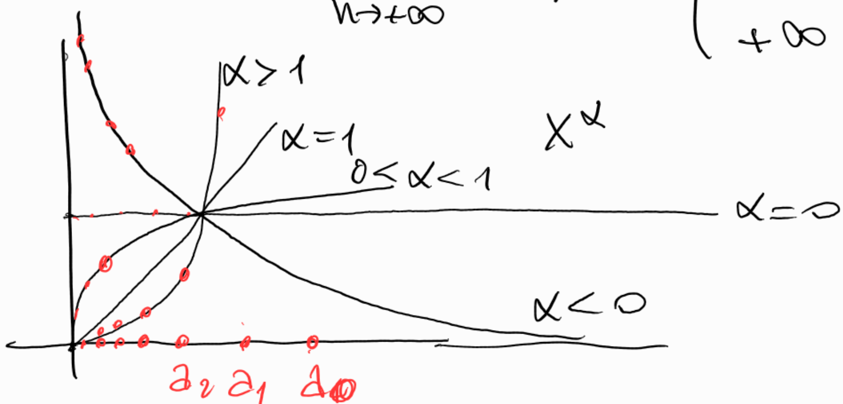
$$\text{se } a_n \to +\infty \implies a_n^\alpha \to \begin{cases} +\infty & \alpha>0 \\ 1 & \alpha=0 \\ 0 & \alpha<0 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{\underbrace{n^3+3n+5}_{\downarrow +\infty}} = \lim_{n\to+\infty} (n^3+3n+5)^{1/2} = +\infty$$

$n^3+3n+5 \geq 3n \to +\infty$

Supponiamo che $\boxed{a_n \geq 0}$ t.c. $a_n \to 0$

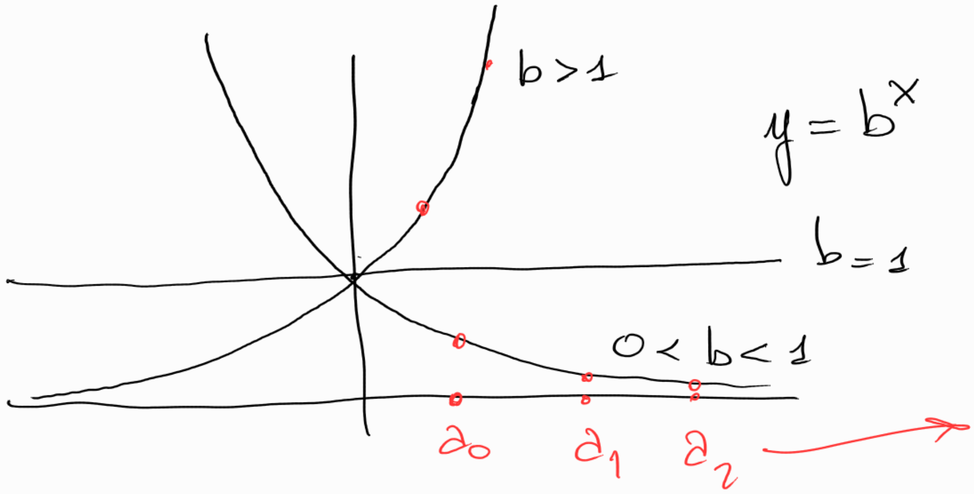
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \implies \lim_{n\to+\infty} (a_n)^\alpha = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha>0 \\ 1 & \alpha=0 \\ +\infty & \alpha<0 \end{cases}$$



$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a \in (0,+\infty) \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n^{\alpha} = a^{\alpha}$$

Limiti di esponenziali. $\qquad b>0$

se $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} b^{a_n} = \begin{cases} +\infty & \text{se } b>1 \\ 1 & \text{se } b=1 \\ 0 & \text{se } 0<b<1. \end{cases}$



Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} b^{a_n} = \begin{cases} 0 & \text{se } b>1 \\ 1 & \text{se } b=1 \\ +\infty & \text{se } 0<b<1. \end{cases}$

se $\lim_{n\to+\infty} a_n = a \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} b^{a_n} = b^{a}.$