Successioni (di numeri reali)

$$f: A \longrightarrow B$$
$$x \longmapsto f(x)$$

Una successione di numeri reali è una funzione che ha per dominio $\mathbb{N}$ (oppure $\mathbb{N}_+$) e per codominio un qualunque sottoinsieme di numeri reali

$$\{a_n\}\ \cancel{f}: \mathbb{N} \longrightarrow B \subseteq \mathbb{R}$$
$$n \longmapsto \cancel{f(n)}\ a_n \in B$$

Per esempio $\quad a_n = \dfrac{1}{n} \quad (n \in \mathbb{N}_+)$

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{1}{3}, \ldots$$

$$a_n = \frac{n+2}{n+5} \qquad a_0 = \frac{2}{5};\ a_1 = \frac{3}{8}, \text{etc...}$$

$b_n = \sqrt{n-5}$ definita solo per $n \geq 5$

(basta che sia definita $\forall n \geq n_0$)

DEF intorno di un numero reale.

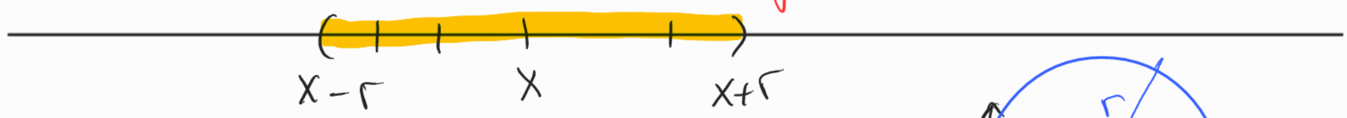
Dato $x \in \mathbb{R}$, dato $r \in \mathbb{R}^+$ (cioè $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$)

si dice intorno sferico di centro x e raggio r

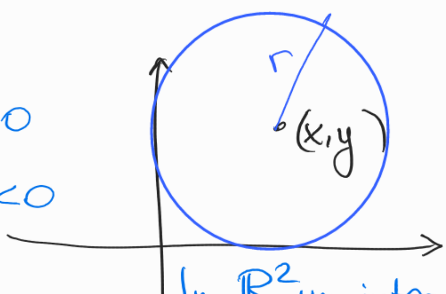
l'intervallo $B_r(x) = (x-r, x+r) = \{y \in \mathbb{R} : x-r < y < x+r\} =$

$= \{y \in \mathbb{R} : |y-x| < r\}$

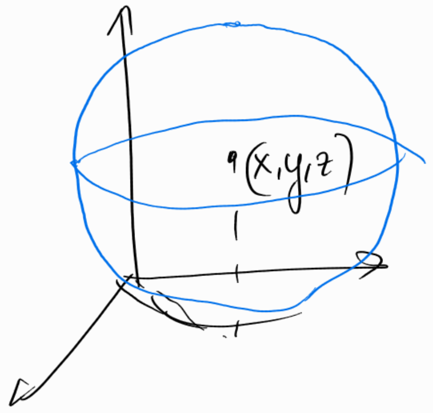
$|y-x|$: distanza di y da x



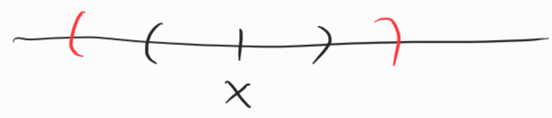
(Ricordo che $|y-x| = \begin{cases} y-x & \text{se } y-x \geq 0 \\ x-y & \text{se } y-x < 0 \end{cases}$)



In $\mathbb{R}^2$ un intorno è un cerchio



In $\mathbb{R}^3$ un intorno è una palla.

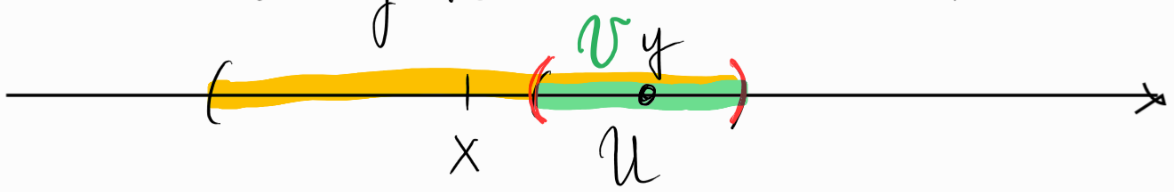


Proprietà degli intorni

1) Se $\mathcal{U}$ è un intorno di x, $x \in \mathcal{U}$.

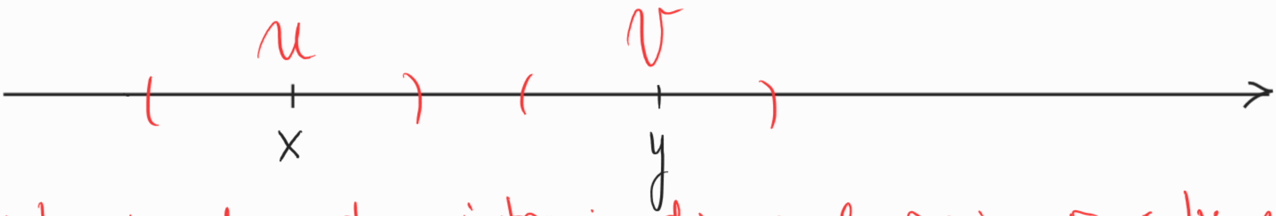
2) Se $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ sono intorni di x, $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ è ancora un intorno di x.

3) Se $\mathcal{U} = B_r(x)$ è un intorno di x, e se $y \in \mathcal{U}$, allora esiste un intorno $\mathcal{V}$ di y tutto contenuto in $\mathcal{U}$.



Basta prendere $\mathcal{V} = B_s(y)$ $\quad s \leq r - |x-y|$

4) separazione. Se $x \neq y$, allora esistono due intorni risp. di x e di y disgiunti tra loro.



Basta prendere due intorni di uguale raggio $r \leq \frac{|x-y|}{2}$

Considero la retta estesa $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

Def. si dice intorno di $+\infty$ una qualunque semiretta della forma $(a, +\infty]$ con $a \in \mathbb{R}$

si dice intorno di $-\infty$ una qualunque semiretta della forma $[-\infty, b)$, con $b \in \mathbb{R}$

Con queste definizioni continuano a valere le proprietà 1–4 degli intorni.

Proprietà vere definitivamente:

Una certa proprietà $P(n)$ dipendente da $n \in \mathbb{N}$ è vera definitivamente (per $n \to +\infty$) se $\exists\, \bar{n} \in \mathbb{N}$ t.c.

$P(n)$ è vera $\forall n \geq \bar{n}$
$>$

Esempio 1 $\quad P(n) \qquad \dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{1000} \qquad (n \in \mathbb{N})$

$1000 < n$

$P(n)$ è falsa per alcuni n, ma è sicuramente vera $\forall n \geq \bar{n} = 1001$ è vera definitivamente.

$\forall n > 1000$

Esempio 2: Gli angoli interni di un poligono regolare di n lati sono ottusi $\qquad P(n)$

è vera definitivamente (per $n \geq 5$)

Esempio 3. $a_n = n^2 - 100n$ è definitivamente crescente.

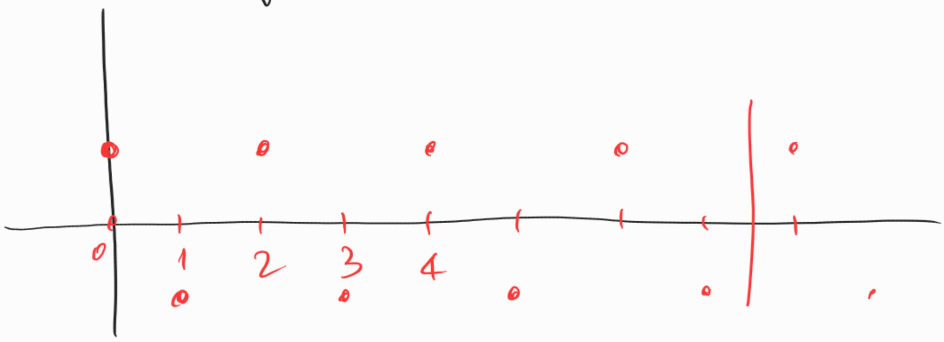
$$a_{n+1} \geq a_n \qquad P(n)$$
$$\Updownarrow$$
$$(n+1)^2 - 100(n+1) \geq n^2 - 100n$$
$$\Updownarrow$$
$$\cancel{n^2} + 2n + 1 - \cancel{100n} - 100 \geq \cancel{n^2} - \cancel{100n}$$
$$\Updownarrow$$
$$2n \geq 99$$
$$\Updownarrow$$
$$n \geq \frac{99}{2}$$
$$\Updownarrow$$
$$n \geq 50$$

Esempio 4

$$(-1)^n > 0. \qquad\qquad P(n)$$

P(n) è vera per tutti gli n pari,

ma non è vera definitivamente.



Esempio 5

$$1 \overset{A}{<} \frac{n^2}{n^2-5} \overset{B}{<} \frac{11}{10} \qquad\qquad P(n)$$

(A) $$1 < \frac{n^2}{n^2-5} \iff \frac{\cancel{n^2}-5}{n^2-5} < \frac{\cancel{n^2}}{n^2-5} \iff \frac{-5}{n^2-5} < 0 \iff$$

$$\iff n^2-5>0 \underset{n\geq 0}{\iff} n \geq \sqrt{5}$$

(B) $$\frac{n^2}{n^2-5} < \frac{11}{10} \iff \frac{10\,n^2}{10\,(n^2-5)} < \frac{11\,(n^2-5)}{10\,(n^2-5)} \iff$$

$$\iff \frac{n^2-55}{\underbrace{10\,(n^2-5)}_{n>\sqrt{5}\ \text{positivo}}} > 0 \overset{n>\sqrt{5}}{\iff} n^2>55 \iff n>\sqrt{55}$$

(B) vera $\forall n > \sqrt{55}$

Quindi P(n) è vera definitivamente (vera $\forall n>\sqrt{55}$)

$\forall n \geq 8$

se P(n) è vera definitivamente (vera $\forall n \geq \bar{n}$)
se Q(n) " " " (vera $\forall n \geq \bar{m}$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $P(n) \wedge Q(n)$ è anch'essa vera definitivamente (vera $\forall n \geq \bar{k} = \max\{\bar{m},\bar{n}\}$)

Def Limiti di successioni.

Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri reali.
Sia $\ell \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.
Diremo che $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$ oppure che $a_n \to \ell$ per $n \to +\infty$

se $\boxed{\forall V \text{ intorno di } \ell \text{ si ha } a_n \in V \text{ definitivamente}}$

cioè $\boxed{\forall V \text{ intorno di } \ell\ \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \text{ t.c. } a_n \in V\ \forall n \geq \bar{n}}$
(oppure: $\exists k \in \mathbb{R}$ t.c. $a_n \in V\ \forall n > k$)

La def^{ne} assume forme concrete differenti se $\ell \in \mathbb{R}$, $\ell = +\infty$, $\ell = -\infty$.

1° caso $\ell \in \mathbb{R}$

In questo caso gli intorni V di ℓ sono della forma

$$B_r(\ell) = (\ell - r, \ell + r) = \{y : |y - \ell| < \underset{\varepsilon}{r}\} \quad \text{con } r > 0.$$

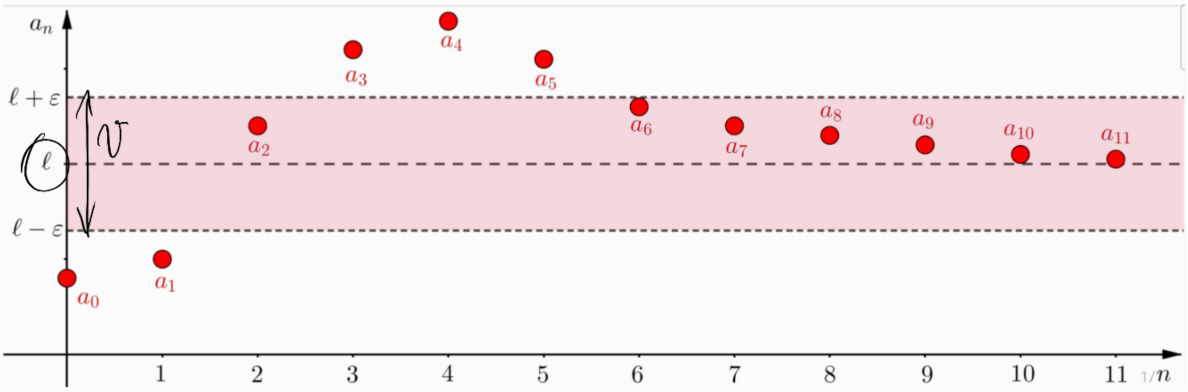
Tradizionalmente si usa ε invece di r.

$$\underbrace{\forall V \text{ intorno di } \ell}_{\forall \varepsilon > 0 \quad (V = B_\varepsilon(\ell))} \text{ si ha } \underbrace{a_n \in V}_{|a_n - \ell| < \varepsilon} \text{ definitivamente}$$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R} \iff \forall \varepsilon > 0 \text{ si ha } |a_n - \ell| < \varepsilon \text{ definitivamente}$$

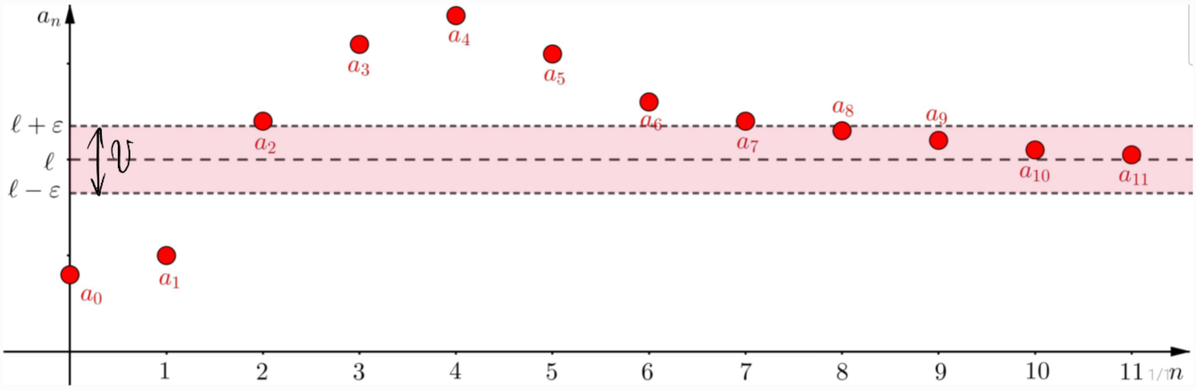
cioè $\quad \forall \varepsilon > 0\ \exists \bar{n}$ t.c. $|a_n - \ell| < \varepsilon\ \forall n \geq \bar{n}$

oppure $\quad \forall \varepsilon > 0\ \exists \underset{\mathbb{R}}{\overset{\cap}{k}}$ t.c. $|a_n - \ell| < \varepsilon\ \forall n > k$



da un certo indice in poi (qui è $\bar{n}=6$) gli a_n stanno in V.

Se prendo un ε più piccolo, in generale dovrò cambiare $\bar{n}$:



Qui dobbiamo prendere $\bar{n}=8$

Invece la scelta di $\bar{n}$ che faccio con un ε più piccolo va bene anche con un ε più grande.

Oss Se verifico la condizione per un certo $\varepsilon_0 > 0$, automaticamente essa è verificata (con lo stesso $\bar{n}$) per $\varepsilon > \varepsilon_0$.
Quindi basta controllare la definizione per ogni $\varepsilon > 0$ t.c. $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, dove $\varepsilon_0 > 0$ è scelto come vogliamo.

Esempio $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0. \quad (= \ell)$

$\forall \varepsilon > 0$, devo trovare K t.c. $\underbrace{\left| \frac{1}{n} - 0 \right|}_{1/n} < \varepsilon \qquad \forall n > K$

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon} =: K$$

Esempio: $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sqrt{4 - \frac{3}{n}} = 2 \, (= \ell)$

OSS il radicando è positivo.

Fissato $\varepsilon > 0$, devo trovare K t.c. $\underbrace{\left| \sqrt{4 - \frac{3}{n}} - 2 \right|}_{= \, 2 - \sqrt{4 - \frac{3}{n}}} < \varepsilon$

$$2 - \sqrt{4 - \frac{3}{n}} < \varepsilon$$
$$\Updownarrow$$
$$\sqrt{4 - \frac{3}{n}} > \underbrace{2 - \varepsilon}_{\geq 0}$$

$$\boxed{\text{OSS posso imporre } \varepsilon \leq \varepsilon_0 = 2}$$

$$\Updownarrow$$
$$\cancel{4} - \frac{3}{n} > (2 - \varepsilon)^2 = \cancel{4} + \varepsilon^2 - 4\varepsilon$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{3}{n} < 4\varepsilon - \varepsilon^2 = \varepsilon(4 - \varepsilon) > 0$$
$$\Updownarrow$$
$$n > \frac{3}{4\varepsilon - \varepsilon^2} =: K$$

<u>OSS</u> L'ordine dei quantificatori è importante.

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R} \iff \forall \varepsilon>0 \ \exists k\in\mathbb{R}: |a_n-\ell|<\varepsilon \ \forall n>k$$

(corretta)

$$\text{"} \quad \text{"} \iff \exists k\in\mathbb{R} \text{ t.c. } |a_n-\ell|<\varepsilon \ \forall n>k \ \forall\varepsilon>0.$$

(errata)

Per rendersene conto, bisogna osservare che scrivere $0 \le |a_n-\ell| < \varepsilon \ \forall \varepsilon>0$ significa $|a_n-\ell|=0$ cioè $a_n=\ell$ esattamente, che in generale è falso.