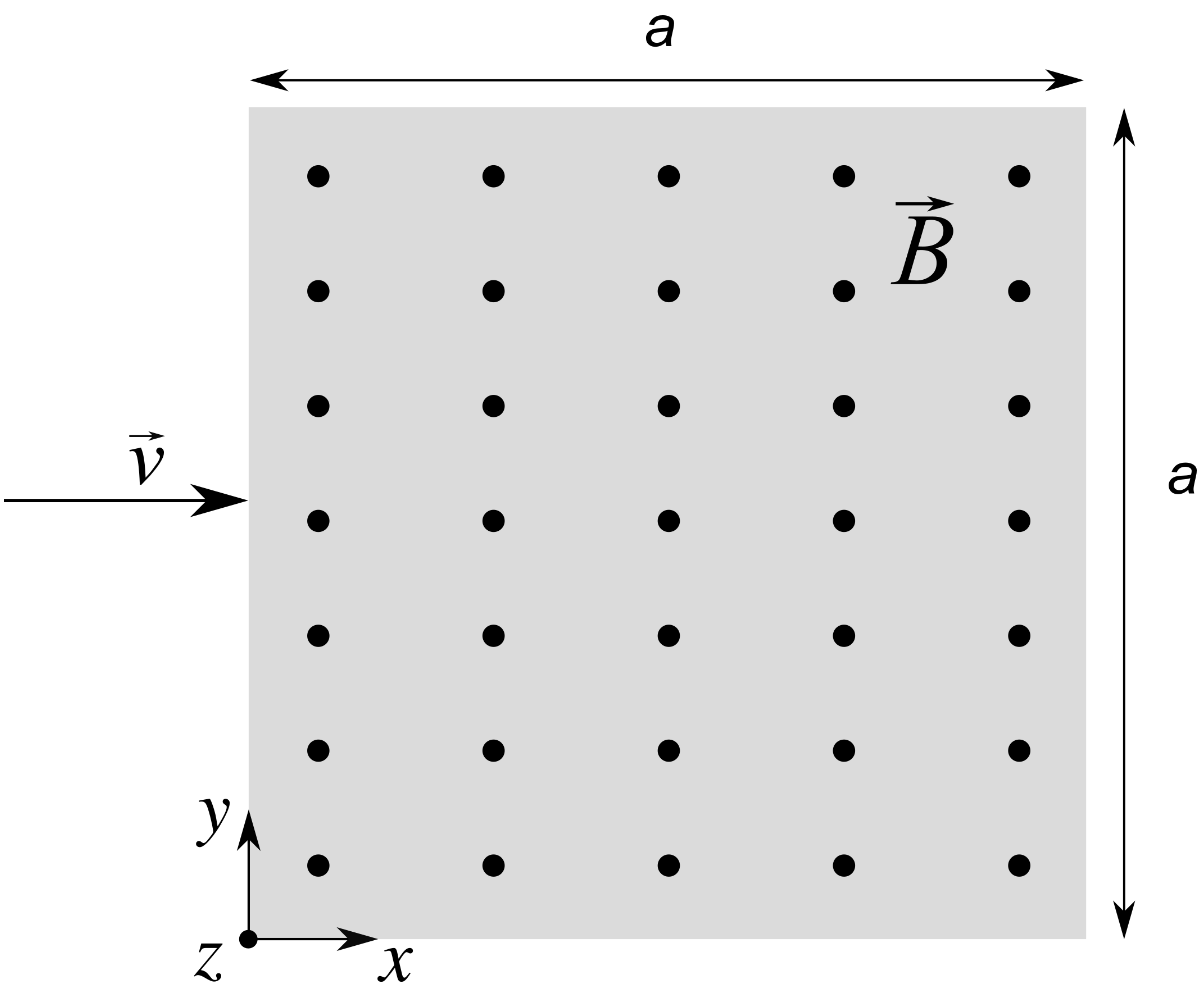
Esercizio 39

Testo



Una particella di carica $q > 0$ entra dal lato delle x negative e con velocità $\vec{v} = (v, 0, 0)$ nel centro di una regione in cui è presente un campo magnetico uniforme $\vec{B} = (0, 0, B)$. La regione si estende indefinitamente lungo $\hat{z}$ mentre ha dimensioni a sia lungo $\hat{x}$ che lungo $\hat{y}$.

1. Calcolare qual è l'angolo θ rispetto all'asse x con cui la particella esce dalla regione col campo se $B = \frac{mv}{10qa}$.
2. Calcolare per quali valori di B la particella esce dal lato da cui è entrata,
3. dal lato alla sua destra,
4. dal lato opposto a quello da cui è entrata.
5. Discutere cosa cambierebbe se la particella avesse una velocità iniziale $\vec{v} = (v_x, 0, v_z)$
6. Discutere cosa cambiarebbe se la particella possedesse una carica $q < 0$

Soluzione

1. Per quel valore di B il raggio della traiettoria è

$$
r = \frac{mv}{qB} = 10 a.
$$

Notiamo che la domanda è equivalente a chiedersi qual è l'angolo θ sotteso dall'arco di circonferenza compiuto dalla particella quando questa si è mossa di una distanza a lungo $\hat{x}$. Questo vuol dire che si ha

$$
a = r \sin \theta
$$

e quindi

$$
\sin(\theta) = \frac{a}{r} = \frac{1}{10}
$$

e quindi

$$
\theta = \arcsin(0.1) \approx 0.1
$$

2. La particella percorrerà la circonferenza verso il basso (utilizzare la definizione di forza di Lorentz per vederlo!). Per avere la condizione richiesta si deve avere $2r = 2\frac{mv}{qB} < a/2$, quindi

$$
B > \frac{4 m v}{qa}.
$$

3. Perché esca dal lato a destra, il campo deve essere chiaramente più debole di quello che la farebbe uscire dal lato da cui entrata. D'altro canto, deve essere più forte di quello che la farebbe uscire dal lato opposto. Si ha quindi

$$
B_o < B < \frac{4 m v}{qa}
$$

B_o si trova calcolando il caso limite; quello, cioè, per cui la particella uscirebbe dallo spigolo del quadrato. Questo si trova imponendo che il punto di entrata e lo spigolo si trovino alla stessa distanza dal centro della circonferenza che identifica la traiettoria. Consideriamo il punto di entrata come l'origine degli assi. È chiaro quindi che, in questo sistema di riferimento, il centro della circonferenza deve avere $x_c = 0$. Vale quindi $r = y_c$. D'altro canto, per lo spigolo vale

$$
r = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2} - y_c\right)^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4} + y_c^2 - ay_c}.
$$

Elevando entrambi i membri al quadrato e sostituendo $r = y_c$ si trova

$$
b^2 + \frac{a^2}{4} - ay_c = 0
$$

da cui si ricava

$$
y_c = \frac{5}{4} a = r = \frac{mv}{qB_0}
$$

e quindi la condizione richiesta diventa

$$
\frac{4}{5} \frac{mv}{qa} < B < \frac{4 m v}{qa}
$$

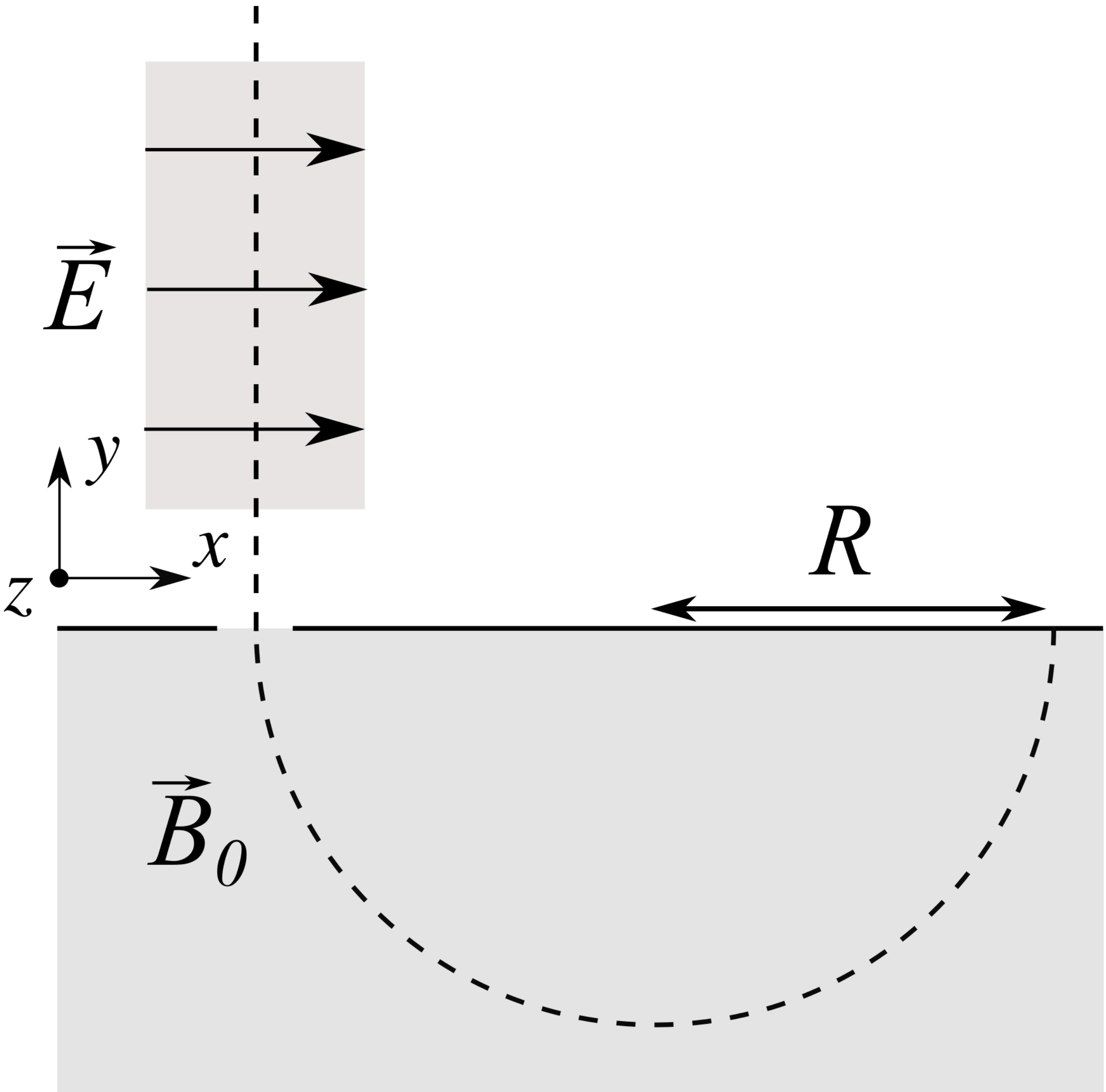
4. Poiché per $B = 0$ il moto risulta inalterato, la condizione richiesta è

$$
0 < B < \frac{4}{5} \frac{mv}{qa}
$$

5. Le espressioni trovate prima rimangono invariate, purché si ponga $v = v_x$, perché avere una velocità con componente lungo il campo dà luogo ad un moto uniforme elicoidale che non modifica affatto il moto lungo il piano xy.
6. Il verso di percorrenza della circonferenza (o degli archi di circonferenza) dipende dal segno della carica quindi, data la simmetria del sistema, con carica negativa si avrebbero le stesse relazioni.

Esercizio 40

Testo



Consideriamo uno spettrometro di massa costituito da un selettore di velocità seguito da una camera di deflessione. Il campo elettrico fra le placche del selettore di velocità ha modulo $E = 2.5$ kV/m e direzione $\hat{x}$ (vedi disegno), mentre il campo magnetico nella camera di deflessione ha modulo $B_0 = 0.035$ T. Per uno ione di carica $q = 1.6 \times 10^{-19}$ C e $m = 2.18 \times 10^{-26}$ Kg si misura un raggio della traiettoria $R = 0.28$ m. Determinare direzione, verso e modulo del campo magnetico presente nel selettore di velocità.

Soluzione

Affinché l'effetto del campo magnetico controbilanci quello del campo elettrico, $\vec{B}$ deve essere diretto lungo $\hat{z}$.

Per trovare il modulo consideriamo che dal raggio di curvatura è possibile ottenere direttamente la velocità degli ioni, che vale

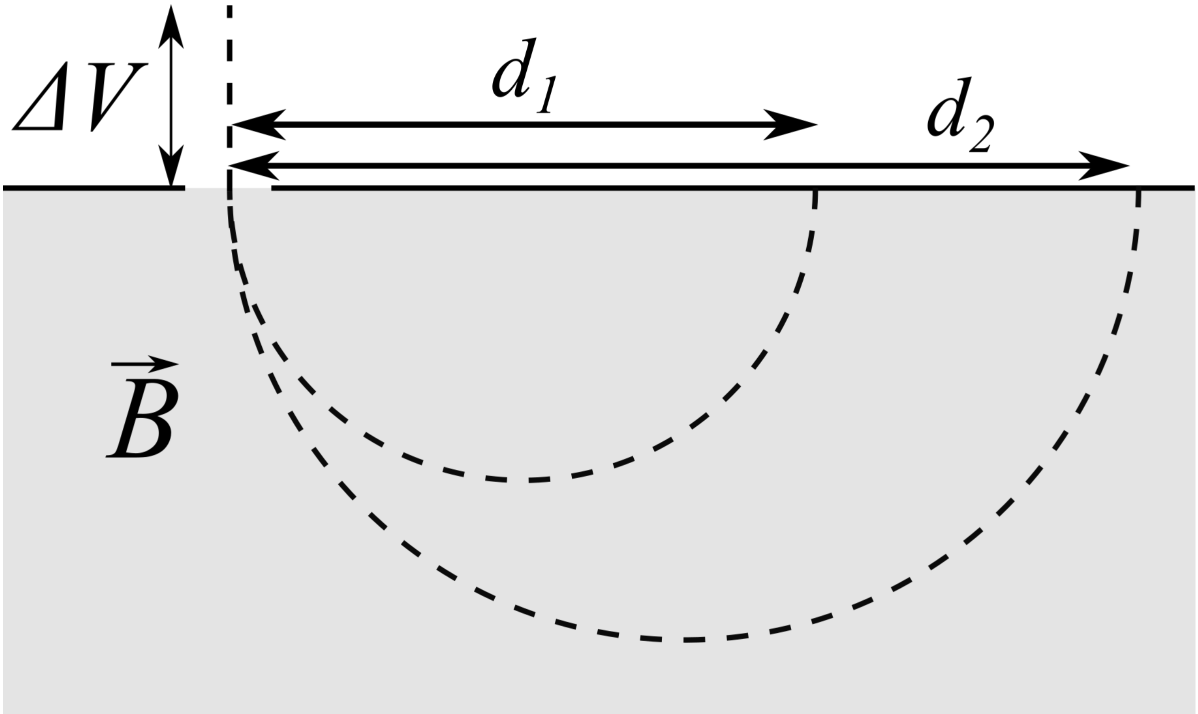
$$
v = \frac{rqB_0}{m} = 7.2 \times 10^{4} \, {\rm m/s}.
$$

Ricordando che in un selettore di velocità quest'ultima è data dal rapporto tra i moduli dei campi si trova

$$
B = \frac{E}{v} = 0.035 \, {\rm T}
$$

Esercizio 41

Testo



Un piccolo fascio di ioni di carica $q = 1.6 \times 10^{-19}$ C e velocità iniziale nulla viene accelerato da una d.d.p. $\Delta V = 23$ V e penetra ortogonalmente in una camera a vuoto di uno spettrometro di massa. All'interno vi è un campo magnetico uniforme. Si nota che nello spettrometro il fascio si divide in due componenti: una colpisce la parete da cui sono entrati gli ioni ad una distanza $d_1 = 280$ mm, l'altra ad una distanza $d_2 = 392$ mm. Il primo fascio è composto da ioni sodio aventi $m_1 = 3.8 \times 10^{-26}$ Kg.

1. Dato il disegno, determinare la direzione ed il verso del campo magnetico.
2. Calcolare la massa e la velocità del secondo tipo di ioni.

Soluzione

1. Poiché $q > 0$, il campo deve essere entrante nel foglio.
2. La velocità degli ioni sodio si calcola dall'energia cinetica, che vale

$$
\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = q\Delta V
$$

da cui si ottiene

$$
v_1 = \sqrt{\frac{2q\Delta V}{m_1}} = 1.4 \times 10^4 \, {\rm m / s}
$$

I raggi di curvatura delle due traiettorie sono

$$
\begin{align} R_1 & = \frac{1}{2} d_1 = 140 \, {\rm mm}\\ R_2 & = \frac{1}{2} d_2 = 196 \, {\rm mm} \end{align}
$$

e, per la legge del moto uniformemente accelerato, vale

$$
q B = \frac{m_1 v_1}{R_1} = \frac{m_1 v_2}{R_2}
$$

d'altro canto, l'energia cinetica iniziale è la stessa per entrambi i fasci, e quindi

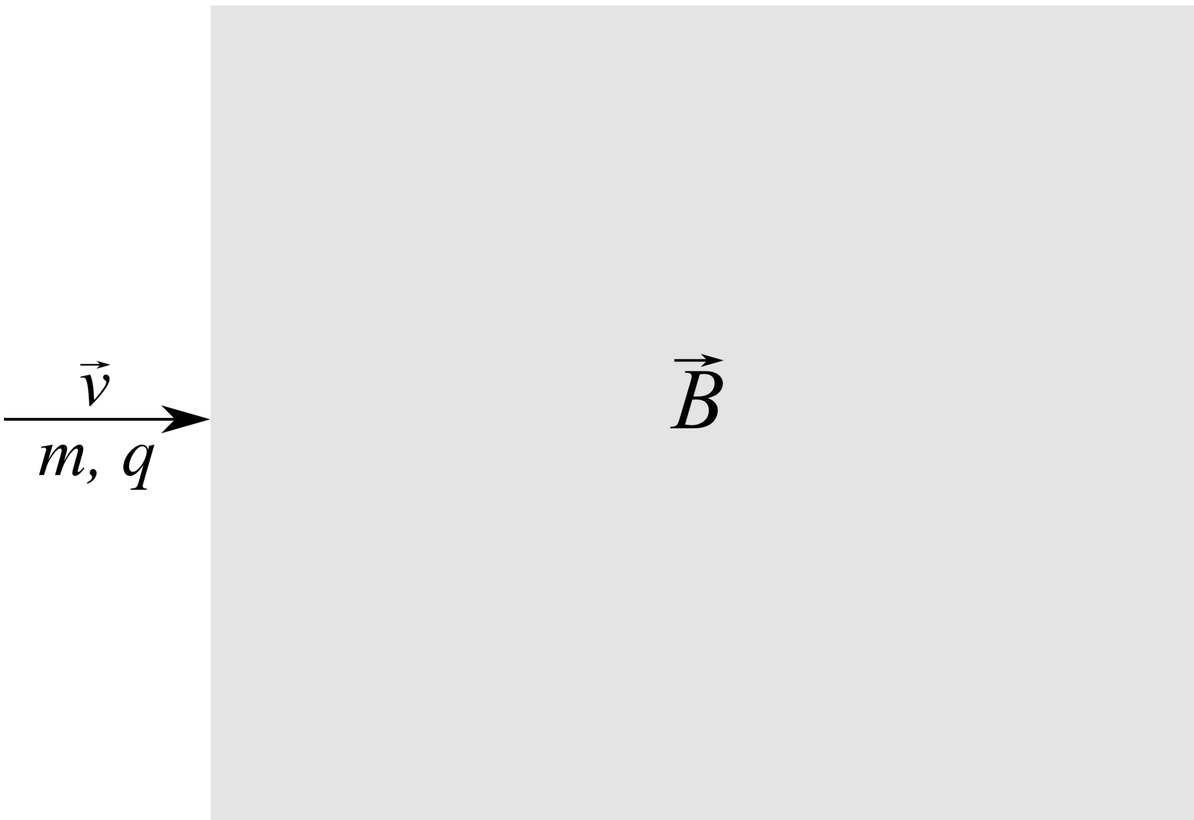
$$
\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} = m_2 v_2^2.
$$

Abbiamo due equazioni in due incognite. Risolvendo il sistema otteniamo

$$
\begin{align} m_2 & = m_1 \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 = 7.44 \times 10^{-26} \, {\rm Kg}\\ v_2 & = v_1 \frac{R_1}{R_2} = 10^4\, {\rm m / s} \end{align}
$$

Esercizio 42

Testo



Una particella di carica $q = 50$ mC e massa $m = 20$ g entra al tempo $t = 0$ in una regione molto grande dove è presente un campo magnetico di intensità $B = 0.25$ T ortogonale alla sua velocità iniziale, di modulo $v = 8$ m/s.

1. Calcolare la distanza a cui la particella riesce dalla regione col campo magnetico.
2. Calcolare il tempo che la particella trascorre nella regione col campo magnetico.
3. Calcolare l'intensità e la direzione del campo elettrico che bisogna applicare per far sì che che la traiettoria della particella rimanga inalterata.
4. Calcolare a che tempo bisognerebbe spegnere il campo magnetico per ottenere un angolo di $\theta = 30^\circ$ tra le velocità di entrata e di uscita.

Soluzione

1. Poiché la traiettoria presa dalla particella è una circonferenza di raggio $r = mv/qB$, la distanza è data dal suo diametro, cioè:

$$
d = 2 r = \frac{2 m v}{qB} = 26 \, {\rm m}
$$

2. Il tempo trascorso nella regione col campo sarà metà del periodo del moto circolare uniforme, che vale $T = 2\pi m/qB$, cioè:

$$
t = \frac{T}{2} = \frac{\pi m}{q B} = 5 \, {\rm s}
$$

3. La direzione del campo elettrostatico deve essere perpendicolare al campo magnetico, così da contrastare la forza di Lorentz. L'intensità si trova equagliando il modulo delle forze che ne risulterebbero, cioè:

$$
q E = q v B
$$

e quindi

$$
E = v B = 2 \, {\rm \frac{V}{m}}
$$

4. In un moto circolare uniforme la velocità angolare è costante ed è uguale all'angolo percorso nell'unità di tempo. Nel caso specifico di campo magnetico uniforme la velocità angolare vale

$$
\omega = qB / m
$$

e quindi si ha che, in funzione del tempo t, l'angolo vale

$$
\theta = \omega t
$$

da cui si ottiene

$$
t = \frac{\theta}{\omega} = \frac{\theta m}{q B}
$$

che, per $\theta = 30^\circ$, dà $t = 0.84$ s.