# Il prodotto vettoriale

Il prodotto vettoriale tra i due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ gode delle seguenti proprietà:

- $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$;
- $|\vec{a}\times\vec{b}|=ab\sin(\theta)$, dove $\theta$ è l'angolo tra i due vettori;
  - $\vec{a}\times\vec{b}=0$ se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ sono paralleli, cioè se vale $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$;
  - Il modulo del prodotto vettoriale è massimo quando $\theta=\pi/2$, cioè quando i vettori sono ortogonali;
- Se $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$, allora $\vec{c}\cdot\vec{b}=0$ e $\vec{c}\cdot\vec{a}=0$, cioè il prodotto vettoriale tra due vettori è un vettore che è ortogonale ad entrambi

Un sistema di riferimento cartesiano può essere

- *destrogiro*, per il quale vale $\hat{x}\times\hat{y}=\hat{z}$;
- *levogiro*, per il quale vale $\hat{x}\times\hat{y}=-\hat{z}$;

Noi avremo sempre a che fare con sistemi di riferimento destrogiri. In questo caso valgono le seguenti relazioni

$$\begin{gathered}\hat{x}\times\hat{y}=\hat{z}\\ \hat{y}\times\hat{z}=\hat{x}\\ \hat{z}\times\hat{x}=\hat{y}\end{gathered}$$

da cui è possibile ricavare le altre utilizzando le proprietà del prodotto vettoriale. Un'utile regola mnemonica per ricordare il segno dei risultati del prodotto vettoriale di questi versori è la seguente:

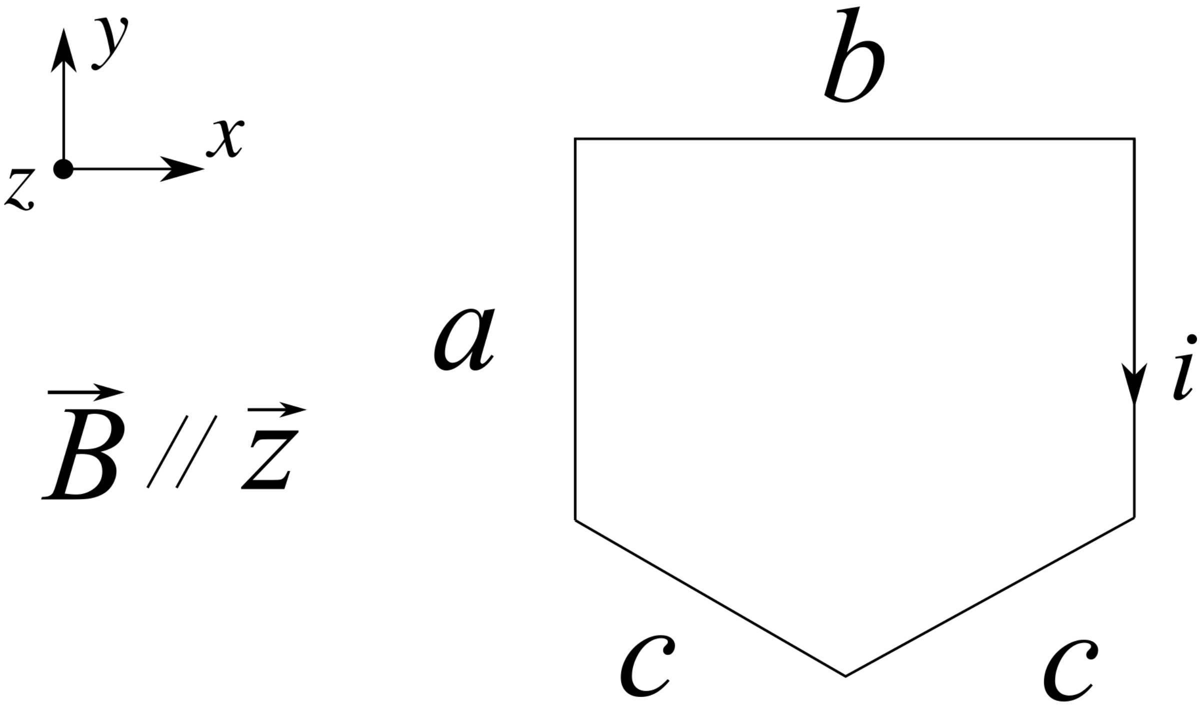
*Leggendo da sinistra verso destra (e guardando il primo versore se $\hat{x}$ è l'ultimo versore scritto), se il versore che segue $\hat{x}$ è $\hat{y}$, allora il versore a destra dell'uguale ha il segno $+$, altrimenti il segno $-$.*

## Qualche esercizio

1. Calcolare il prodotto vettoriale tra $\vec{a}=3\hat{x}-\hat{y}+2\hat{z}$ e $\vec{b}=5\hat{x}+\hat{z}$ e verificare che il risultato sia ortogonale sia a $\vec{a}$ che a $\vec{b}$.
   - $-\hat{x}+7\hat{y}+5\hat{z}$.
2. Calcolare il prodotto vettoriale tra $\vec{a}=(-3,0,-1)$ e $\vec{b}=(-1,1,2)$
   - $(1,7,-3)$.
3. Determinare, se esiste, il valore di $c$ per cui i due vettori $\vec{a}=(1,-1,c)$ e $\vec{b}=(-2,c,1)$ sono paralleli.
   - $(-c^2-1)\hat{x}+(-2c-1)\hat{y}+(c-2)\hat{z}$. Per nessun valore di $c$ questo vettore è nullo, quindi non esiste un valore di $c$ per cui i due vettori sono paralleli.

# Esercizio 35

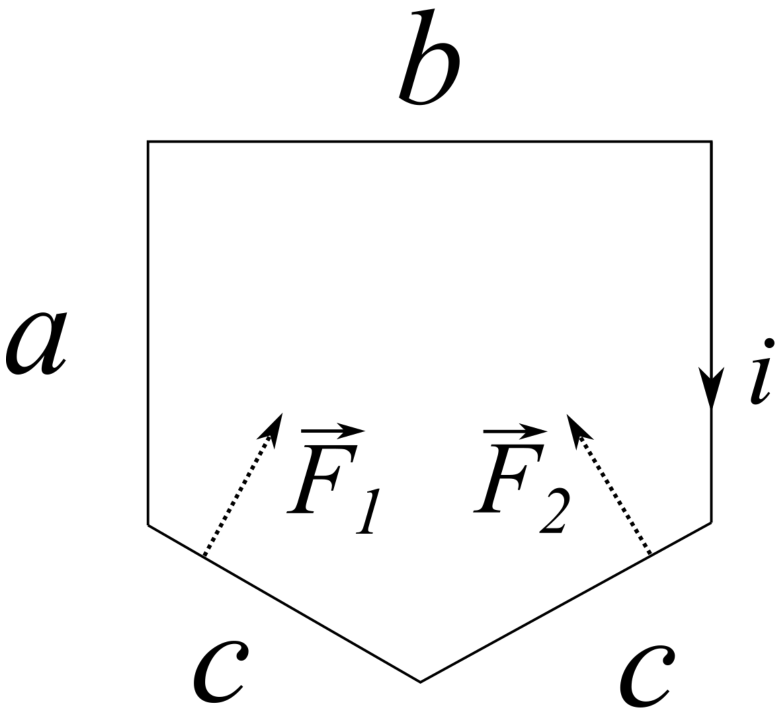
## Testo




In una spira formata da cinque fili rettilinei scorre una corrente $i$ (vedi figura). La spira è immersa in un campo magnetico di modulo $B$ diretto lungo $\hat{z}$.

1. Determinare le forze (in modulo, direzione e verso) agenti su tutti i segmenti.
2. Determinare la forza totale agente sulla parte inferiore della spira (cioè sulla parte "diagonale" totale).
3. Calcolare la forza totale agente sulla spira.

## Soluzione



1. Utilizzando la regola della mano destra possiamo trovare subito direzione e verso (vedi figura per il verso sui segmenti diagonali). Il filo ed il campo sono ortogonali per tutti i casi, quindi i moduli delle forze valgono $F = icB$ per i segmenti diagonali, $F = iaB$ per quelli verticali e $F = ibB$ per quello orizzontale.
2. Il problema si può risolvere esplicitamente calcolando le due forze e sommandole vettorialmente (fatelo!), oppure si può ricordare che se il campo è omogeneo la forza totale è data da $i\vec{L} \times \vec{B}$ dove $\vec{L}$ è la distanza tra i capi del segmento di filo di cui vogliamo conoscere la forza, quindi

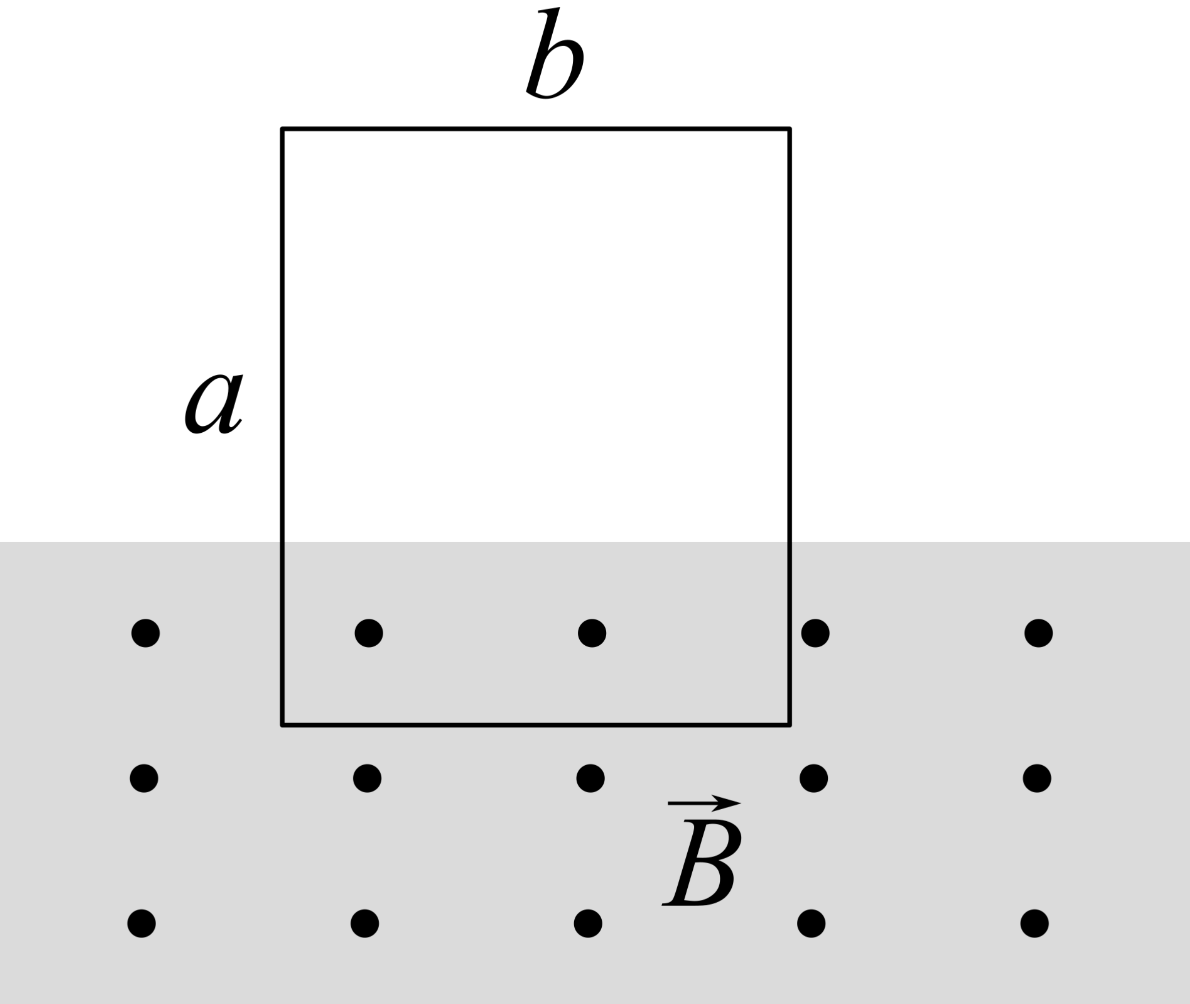
$$\vec{F}_\mathrm{d} = ibB\hat{y}$$

3. Poiché la spira è chiusa e il campo omogeneo, la forza totale non può che essere nulla.

---

# Esercizio 36

## Testo




In una spira rettangolare di massa $m = 4 \times 10^{-2}$ g e lati $a = 3$ cm e $b = 2$ cm scorre una corrente $|i| = 1$ A. La parte inferiore della spira, che è sottoposta alla forza peso diretta verso il basso, è immersa in un campo magnetico diretto lungo $\hat{z}$ che fa sì che la spira resti sospesa in aria con i lati più corti paralleli al terreno. Calcolare

1. il verso della corrente;
2. il modulo di $\vec{B}$.

## Soluzione

1. Sulla spira sicuramente agisce la forza di gravità, $\vec{F}_g = -mg\hat{y}$. Poiché solo la parte inferiore della spira è immersa in un campo magnetico, vi sarà anche una forza magnetica dovuta al fatto che solo uno dei due lati paralleli al terreno avverte il campo. Se ipotizziamo che, in questo lato, la corrente scorra lungo $\hat{x}$, la forza varrà:

$$\vec{F} = i\vec{b} \times \vec{B} = ibB\hat{x} \times \hat{z} = -ibB\hat{y}.$$

Se la forza fosse effettivamente diretta lungo $-\hat{y}$, sarebbe concorde a quella di gravità e quindi la spira non potrebbe rimanere in equilibrio. È chiaro quindi che la corrente deve scorrere nella direzione contraria (cioè in senso orario dal punto di vista del disegno).

2. Il modulo del campo si trova eguagliando le due forze,

$$mg = ibB,$$

e quindi

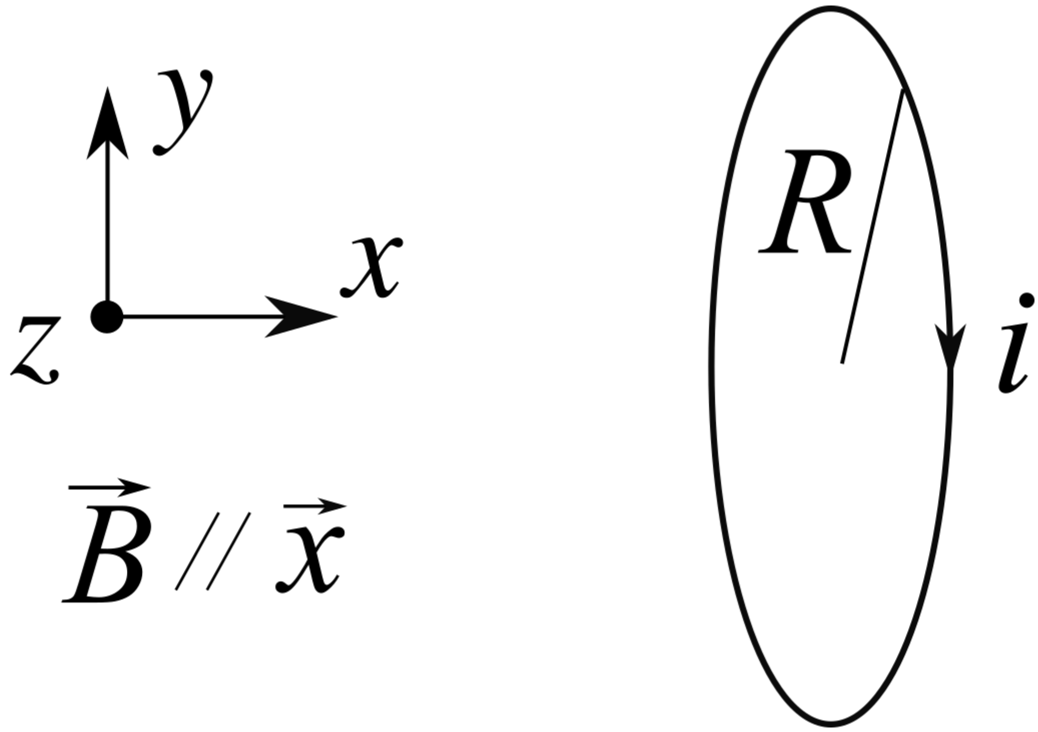
$$B = \frac{mg}{ib} = 0.0196\,\mathrm{T} = 196\,\mathrm{G}$$

---

# Esercizio 37

## Testo

**Questo esercizio non è stato svolto in aula**




In una spira circolare di raggio $R$ scorre una corrente $i$. La spira è immersa in un campo magnetico uniforme $\vec{B} = B_0\hat{x}$ e le condizioni del sistema sono tali per cui si trova ad oscillare attorno ad $\hat{y}$. Il momento di inerzia lungo quest'asse vale $I$.

1. Tenendo presente che la velocità angolare massima raggiunta è $\omega_0$, calcolare l'angolo tra la normale della spira e il campo magnetico quando $\omega = \omega_0/3$.

2. Una molla angolare di costante $k$ viene collegata alla spira in maniera tale da contrapporsi al momento magnetico mentre questa è nel punto per cui vale $\omega = 0$. Calcolare il valore che $k$ deve avere per far sì che la spira resti ferma.

## Soluzione

1. L'energia totale (che è conservata) ha due contributi: l'energia cinetica rotazionale e quella magnetica potenziale. La prima vale

$$U_k = \frac{1}{2} I\omega^2$$

mentre la seconda vale

$$U_e = -\vec{m} \cdot \vec{B} = -mB\cos\theta$$

dove $\vec{m} = i\Sigma\hat{n}$ è il momento di dipolo magnetico della spira, dove $\Sigma = \pi R^2$. L'energia totale vale

$$U = \frac{1}{2} I\omega^2 - i\Sigma B\cos\theta.$$

Quando $\theta = 0$ l'energia potenziale è minima e quindi quella cinetica è massima. In questo caso l'energia totale vale

$$U_0 = \frac{1}{2} I\omega_0^2 - i\Sigma B$$

e il suo valore può essere calcolato dai dati del problema. Quando $\omega = \omega_0/3$, si ha:

$$U_0 = \frac{1}{18} I\omega_0^2 - i\Sigma B\cos\theta$$

da cui si può ricavare il valore di $\cos\theta$:

$$\cos\theta = \frac{1}{i\Sigma B}\left(\frac{1}{18} I\omega_0^2 - U_0\right).$$

2. L'angolo per cui $\omega = 0$ si trova imponendo

$$U_0 = -i\Sigma B\cos\theta_{\max}$$

da cui si ottiene

$$\theta_{\max} = \arccos\left(-\frac{U_0}{i\Sigma B}\right)$$

Il momento meccanico di una molla angolare vale, in generale $M = k\theta$. La condizione di equilibrio si impone eguagliando i due momenti meccanici,

$$k\theta_{\max} = i\Sigma B\sin\theta_{\max},$$

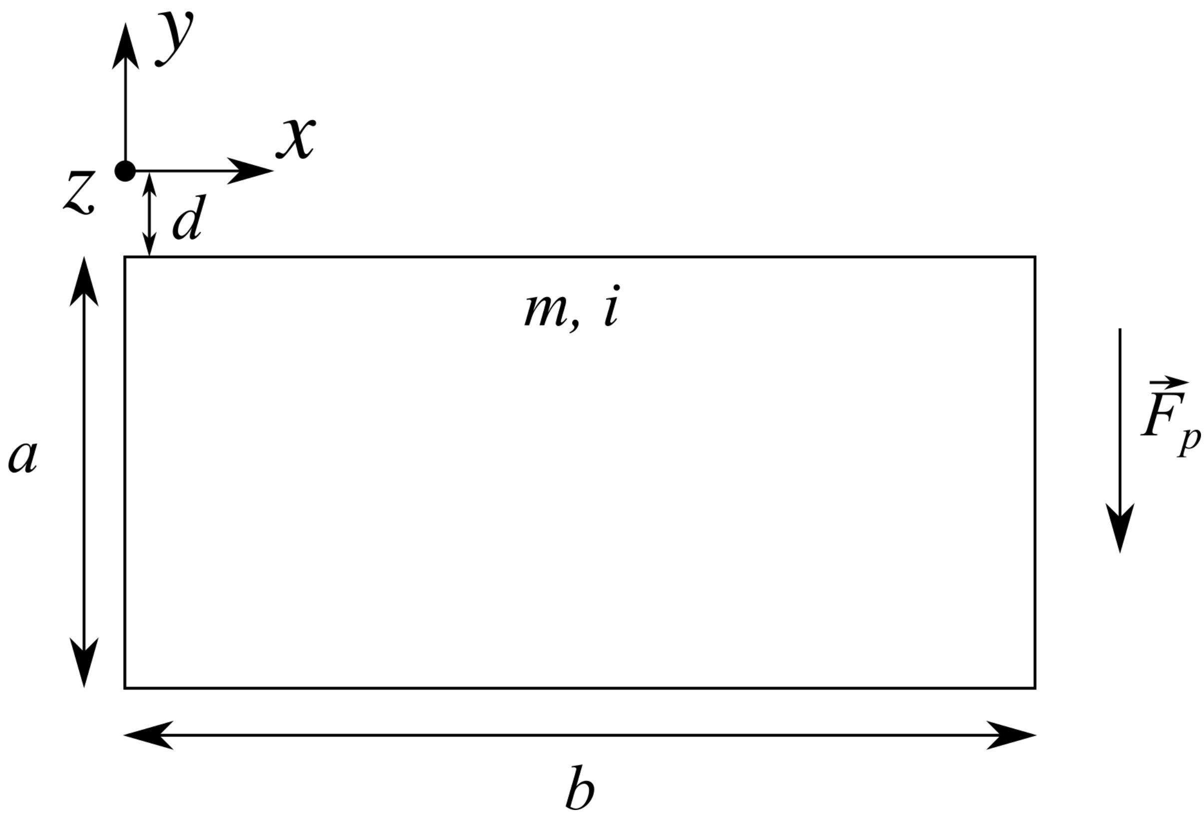
per cui il valore della costante elastica che assicura che la spira resti ferma è

$$k = \frac{i\Sigma B\sin\theta_{\max}}{\theta_{\max}}$$

---

# Esercizio 38

## Testo




Una spira rettangolare indeformabile di dimensioni $a = 40$ cm e $b = 1$ m e massa $m = 1$ g ha i lati lunghi paralleli all'asse $x$ ed è posta ad una distanza $d = 1$ cm da esso (vedi figura). Nella regione è presente un campo magnetico diretto lungo $-\hat{z}$ di modulo $B(y) = |A/y|$, con $A = 6 \times 10^{-6}$ Tm. La forza peso $\vec{F}_p$ agisce in direzione $-\hat{y}$. Quando nella spira scorre una corrente $i$ il sistema è in equilibrio e la spira rimane sospesa.

1. Determinare verso e intensità di $i$.
2. Si aggiunge nella regione di spazio in figura un campo magnetico uniforme uscente dal foglio e di intensità $B_{\text{add}} = 1$ T. Quale deve essere il nuovo valore di $i$ per far sì che il sistema rimanga in equilibrio?

## Soluzione

1. Il verso di $i$ deve essere tale per cui la forza magnetica $F_m$ che il circuito sente sia contrapposta alla forza peso. In questo caso $F_m$ ha due contributi dati dalle due porzioni di spira parallele al filo. Il contributo dato dal filo più in alto è più forte, poiché lì il campo è maggiore, quindi deve essere quello che determina il verso della corrente. Per far sì che si generi una forza verso l'alto, $i$ deve scorrere lungo $\hat{x}$ in questa parte di spira. Ne consegue che $i_s$ scorre in senso orario.
   Affinché la spira sia in equilibrio, le intensità della forza peso e di quella magnetica devono essere uguali. La forza peso vale semplicemente $mg$. Quella magnetica è dovuta alla presenza del campo magnetico e ha due contributi dovuti alle due parti di spira parallele all'asse $x$, che si sommano direttamente poiché hanno la stessa direzione:

$$F_m = ibB(d) + ibB(d+a) = ibA\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{d+a}\right).$$

Uguagliando le due forze si ottiene

$$Aib\left(\frac{1}{d}-\frac{1}{d+a}\right)=mg$$

e risolvendo per i:

$$i=\frac{mg}{A}\frac{d(d+a)}{ab}=16.8\,\mathrm{A}$$

2. La risposta non cambia, perché la forza totale agente sulla spira non risente di un campo omogeneo (perché?).