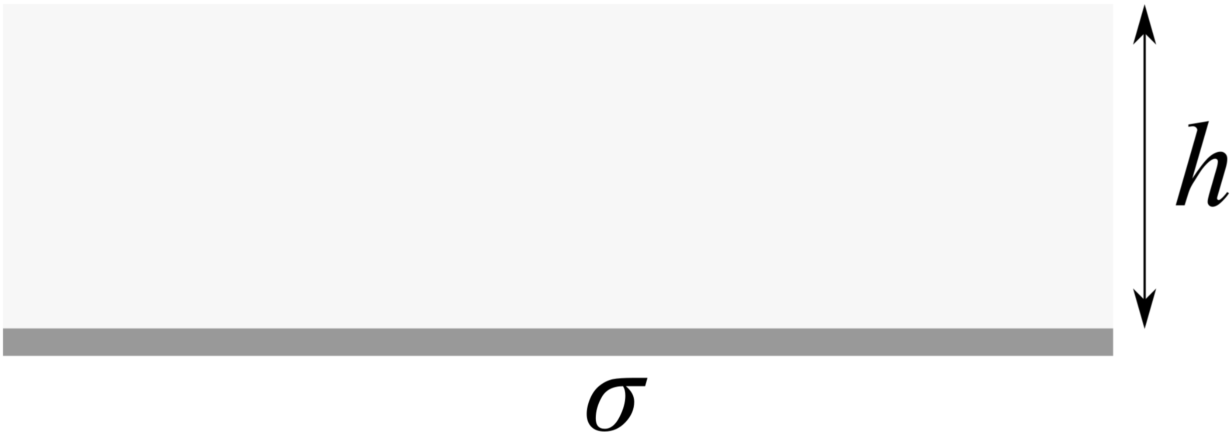
Esercizio 22 -- Esercizio 23 -- Esercizio 24 -- Esercizio 25 -- Esercizio 26 -- Esercizio 27 -- Esempio Kirchhoff -- Esercizio 28 -- Esercizio 29

Esercizio 22

Testo



Un piano conduttore indefinito è carico con densità superficiale di carica σ. Su una delle due superfici viene appoggiata una lastra di materiale dielettrico omogeneo e lineare di spessore h e costante dielettrica κ.

1. Calcolare le densità di carica di polarizzazione presenti sulle superfici del dielettrico.
2. Scrivere l'espressione della d.d.p. tra un punto all'interno del conduttore e uno all'esterno (dal lato del dielettrico).

Soluzione

1. Il campo generato da una piano conduttore carico nel vuoto è

$$\vec{E}_v = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{n}$$

dove $\hat{n}$ è la normale al piano. All'interno di un dielettrico $\epsilon_0 \to \epsilon = \kappa\epsilon_0$, quindi

$$\vec{E}_d = \frac{\sigma}{\kappa\epsilon_0}\hat{n}$$

cioè l'intensità del campo diminuisce di un fattore κ. Sulle superfici del dielettrico appariranno delle densità di carica σ_p in forza del fenomeno della polarizzazione. Queste densità di carica sono legate alla polarizzazione tramite la relazione $\sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{n}$, dove $\vec{P} = \epsilon_0(\kappa - 1)\vec{E}$ è il vettore polarizzazione (diverso da zero solo all'interno del dielettrico), che in questo caso vale quindi:

$$\vec{P} = \frac{\kappa - 1}{\kappa}\sigma\hat{n}.$$

Il dielettrico che stiamo considerando ha due superfici, una con normale diretta *verso* il conduttore, l'altra in verso opposto. Avremo quindi due densità di polarizzazione date da:

$$\sigma_p = \pm\vec{P} \cdot \hat{n} = \pm\frac{\kappa - 1}{\kappa}\sigma$$

2. Abbiamo visto come il campo elettrico assuma valori diversi all'interno e all'esterno del dielettrico. La d.d.p. tra la superficie del conduttore (su cui consideriamo $V(0) = 0$) ed un punto all'interno del dielettrico vale:

$$\Delta V(x < h) = \int_0^x \frac{\sigma}{\epsilon}dx' = \frac{\sigma}{\epsilon}x$$

Sulla seconda superficie del dielettrico si avrà quindi

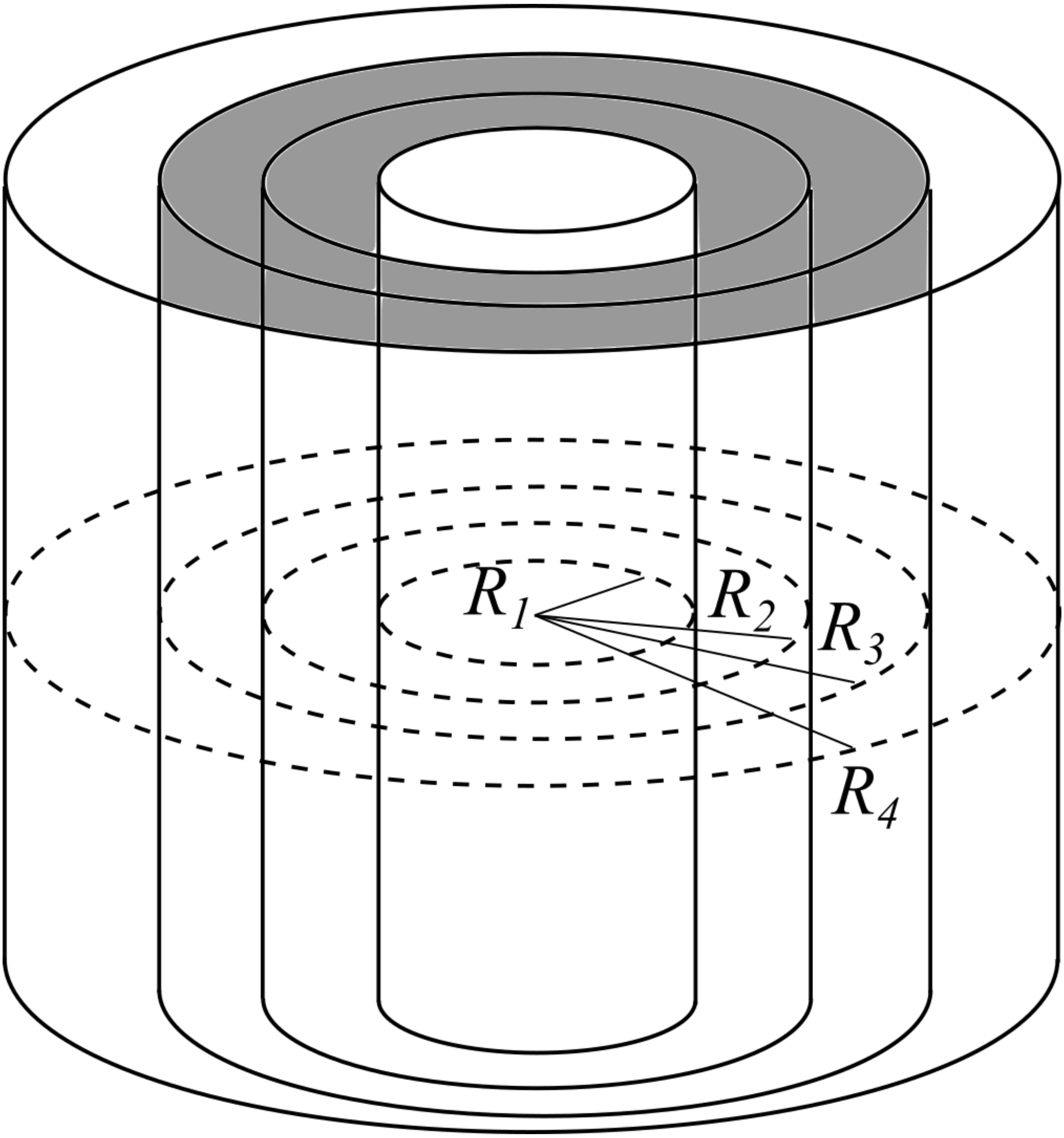
$$\Delta V(h) = \frac{\sigma}{\epsilon}h$$

Per distanze maggiori, il campo da integrare è quello nel vuoto, quindi:

$$\Delta V(x > h) = \int_0^h \frac{\sigma}{\epsilon} dx' + \int_h^x \frac{\sigma}{\epsilon_0} dx' = \frac{\sigma}{\epsilon} h + \frac{\sigma}{\epsilon_0}(x - h)$$

Per validare il risultato basta vedere cosa succede se $\kappa = 1$...

Esercizio 23



Testo

Un cilindro conduttore di raggio R_1 caricato con densità di carica superficiale σ, è posto al centro di un cilindro cavo, anch'esso conduttore, di raggio interno R_3 ed esterno R_4. Lo spazio interno tra le superfici è riempito con due dielettrici, anch'essi a forma di cilindro cavo. Il primo, di costante dielettrica κ_1, ha raggi R_1 ed R_2, il secondo, di costante dielettrica κ_2, ha raggi R_2 ed R_3.

1. Calcolare $\vec{E}$, $\vec{D}$ e $\vec{P}$.
2. Calcolare le densità di polarizzazione sulle superfici dei dielettrici.
3. Calcolare la d.d.p. tra il cilindro interno ed un punto qualsiasi all'esterno del guscio cilindrico nei casi in cui quest'ultimo sia messo a terra oppure no.

Soluzione

1. All'interno dei conduttori $\vec{E}$, e quindi anche $\vec{D}$ e $\vec{P}$, che sono proporzionali ad $\vec{E}$, sono nulli. All'esterno del cilindro cavo si ha, per il teorema di Gauss,

$$\vec{E}(r) = \frac{\sigma_4 R_4}{\epsilon_0 r}\hat{r} = \frac{\sigma R_1}{\epsilon_0 r}\hat{r}.$$

essendoci il vuoto, $\vec{P} = 0$ e quindi $\vec{D}(r) = \epsilon_0 \vec{E}(r) = \frac{\sigma R_1}{r}\hat{r}$. All'interno dei dielettrici, se utilizziamo il teorema di Gauss per $\vec{D}$ troviamo che vale sempre (indipendentemente dal fatto che ci troviamo in un dielettrico o nell'altro)

$$\vec{D}(r) = \frac{\sigma R_1}{r}\hat{r}$$

questo perché le uniche cariche libere (cioè non dovute alla polarizzazione) sono quelle che si trovano sulla superficie del cilindro interno. Poiché $\vec{D} = \epsilon\vec{E} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P}$ e quindi $\vec{P} = \epsilon_0(\kappa - 1)\vec{E}$, si ha

$$\vec{E} = \frac{\sigma R_1}{\kappa_i \epsilon_0 r}\hat{r}$$
$$\vec{P} = \frac{\kappa_i - 1}{\kappa_i}\frac{\sigma R_1}{r}\hat{r}$$

dove $i = 1, 2$ a seconda del dielettrico considerato.

2. La densità di polarizzazione vale sempre $\sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{n}$. Sulla superficie interna:

$$\sigma_p^{(1)}(R_1) = -\frac{\kappa_1 - 1}{\kappa_1}\sigma$$

Sulla superficie esterna del primo dielettrico:

$$\sigma_p^{(1)}(R_2) = \frac{\kappa_1 - 1}{\kappa_1}\frac{\sigma R_1}{R_2} = -\sigma_p^{(1)}(R_1)\frac{R_1}{R_2}$$

Sulla superficie interna del secondo dielettrico:

$$\sigma_p^{(2)}(R_2) = -\frac{\kappa_2 - 1}{\kappa_2}\frac{\sigma R_1}{R_2}$$

Mentre sulla superficie esterna del secondo dielettrico:

$$\sigma_p^{(2)}(R_2) = \frac{\kappa_2 - 1}{\kappa_2}\frac{\sigma R_1}{R_3} = -\sigma_p^{(2)}(R_2)\frac{R_2}{R_3}$$

Questi valori si possono validare a due a due considerando che la quantità di carica di polarizzazione in un dielettrico (comprese le sue superfici) deve essere zero!

3. Per il principio della gabbia di Faraday, il fatto che il conduttore più esterno sia messo o meno a terra non cambia la d.d.p. tra i due conduttori, che vale sempre:

$$\Delta V_{1,3} = V(R_1) - V(R_3) = \int_{R_1}^{R_3} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\sigma R_1}{\kappa_1 \epsilon_0 r} dr + \int_{R_2}^{R_3} \frac{\sigma R_1}{\kappa_2 \epsilon_0 r} dr = \frac{\sigma R_1}{\epsilon_0}\left(\frac{1}{\kappa_1}\log\left(\frac{R_2}{R_1}\right) + \frac{1}{\kappa_2}\log\left(\frac{R_3}{R_2}\right)\right)$$

D'altro canto, la d.d.p. tra il guscio esterno ed un punto qualsiasi al suo esterno vale 0 nel caso sia messo a terra (applicate il teorema di Gauss per dimostrarlo!), oppure

$$\Delta V_4(r) = \int_{R_4}^{r} \frac{\sigma R_1}{\epsilon_0 r} dr = \frac{\sigma R_1}{\epsilon_0}\log\left(\frac{r}{R_4}\right)$$

nel caso in cui non lo sia (vedi sopra per l'espressione del campo). La differenza di potenziale totale è quindi diversa nei due casi e vale:

$$\Delta V(r) = \Delta V_{1,3} + \Delta V_4(r)$$
$$\Delta V(r) = \Delta V_{1,3}$$

Esercizio 24

Testo

Una nuvola temporalesca ha una forma approssimativamente rettangolare, con lati $a = 2.0$ km e $b = 3.0$ km, e fluttua ad un'altezza $h = 500$ m al di sopra di una zona pianeggiante. La nuvola contiene una carica $q = -80$ C.

1. Sapendo che la rigidità dielettrica dell'aria è circa 3.0×10^6 V/m, le condizioni descritte sopra sono sufficienti per generare fulmini?
2. Qual è l'energia elettrostatica del sistema nuvola $+$ terreno?

Soluzione

Il sistema può essere visto come un condensatore piano di capacità:

$$C = \frac{\epsilon_0 \Sigma}{h} = \frac{\epsilon_0 ab}{h} = 10.6 \times 10^{-8}\,\mathrm{F}$$

Nota Bene: la costante dielettrica relativa dell'aria è praticamente uno, quindi possiamo utilizzare le espressioni valide nel vuoto.

La differenza di potenziale tra la terra (caricata positivamente) e la nuvola (caricata negativamente) vale:

$$\Delta V = \frac{q}{C} = 7.5 \times 10^8\,\mathrm{V}$$

1. La rigidità dielettrica è il massimo valore del campo elettrostatico che può essere applicato senza causare scariche (fulmini!). Calcoliamo il campo all'interno del "condensatore", utilizzando la solita espressione per i condensatori piani (molto approssimata in questo caso, perché?):

$$E \simeq \Delta V/h = 1.5 \times 10^6\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$$

che è più bassa della rigidità dielettrica: niente fulmini (in questa approssimazione)!

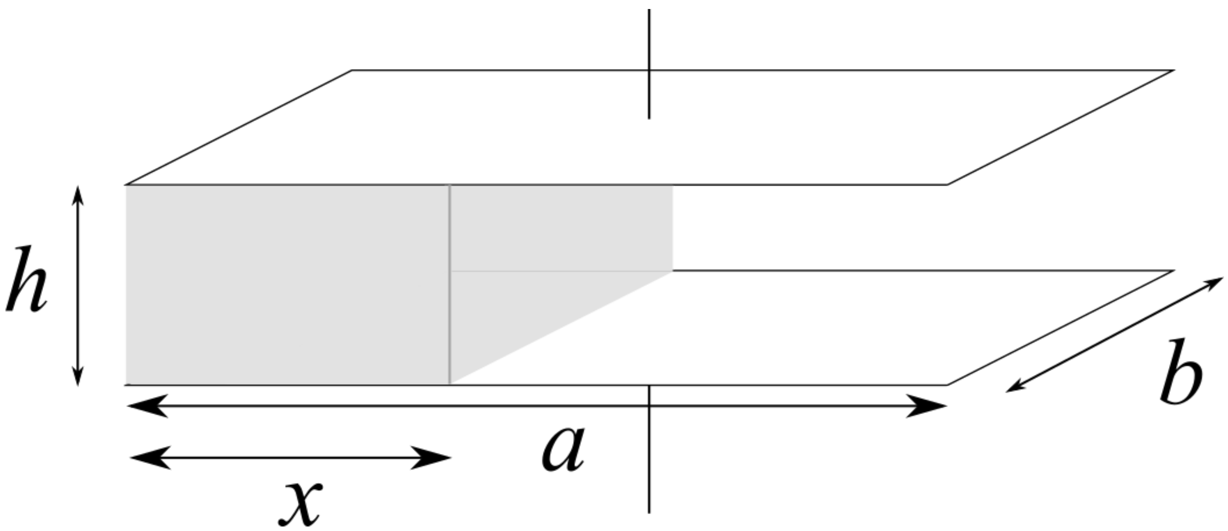
2. L'espressione dell'energia di un qualunque condensatore è $U_e = \frac{1}{2} q \Delta V$, quindi si ha:

$$U_e = \frac{1}{2} q \Delta V = 3 \times 10^{10}\,\mathrm{J}$$

Esercizio 25

Ispirato dall'esercizio III.13 del Mencuccini-Silvestrini

Testo



Un condensatore piano di dimensioni $a \times b \times h$ è parzialmente riempito (per un tratto $x = a/3$) di una lastra di dielettrico omogeneo e isotropo di costante dielettrica relativa κ e mantenuto ad una d.d.p. ΔV.

1. Quanto vale la carica q_d che si dispone sulla parte di armatura superiore che si affaccia sul dielettrico?
2. Calcolare q_d se $\Delta V = 113$ V, $a = b = 10$ cm, $h = 2$ mm e $\kappa = 4$.

Soluzione

1. Il condensatore può essere visto come due condensatori in parallelo di capacità $C_d = \epsilon_0 \kappa ab/3h$ e $C_v = 2\epsilon_0 ab/3h$. La carica di entrambi i "condensatori" si trova utilizzando la relazione che lega capacità, carica e differenza di potenziale, quindi:

$$q_d = C_d \Delta V = \frac{\epsilon_0 \kappa ab}{3h} \Delta V$$

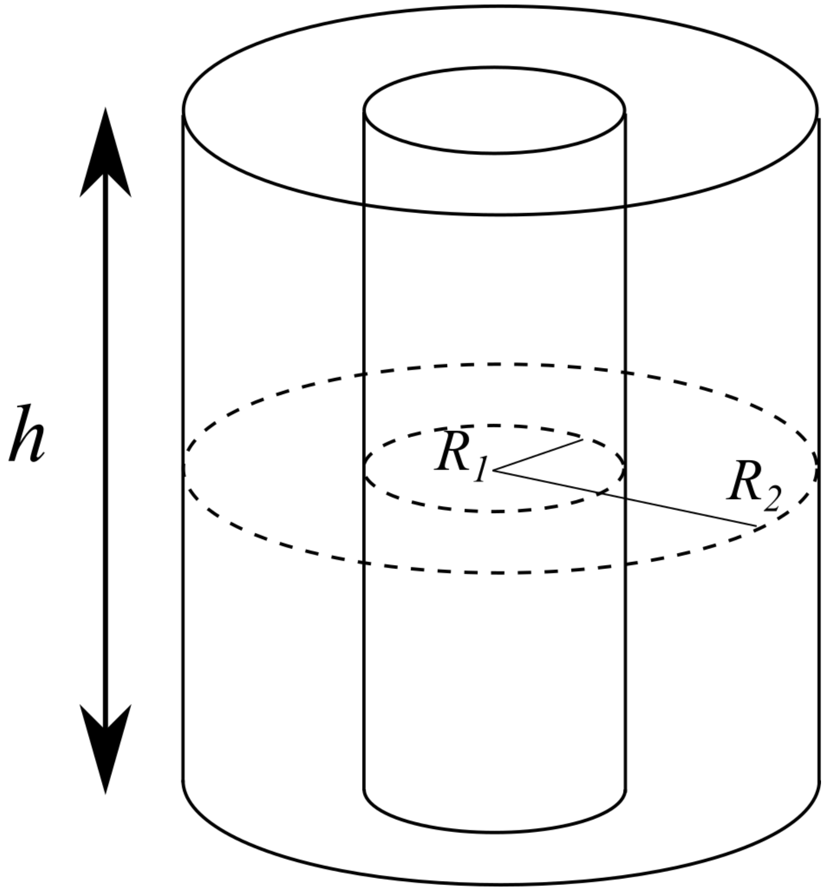
2. Sostituiamo i valori dati nelle relazione trovata al punto precedente:

$$q_d = \frac{4}{3} 113 \cdot 8.854 \times 10^{-12} \frac{0.1 \cdot 0.1}{0.002}\,\mathrm{C} = 0.667 \times 10^{-8}\,\mathrm{C}$$

Esercizio 26

(Non svolto a lezione)

Testo



Un conduttore cilindrico cavo di lunghezza h ha raggio interno R_1 ed esterno R_2 ed è costituito da un materiale di resistività ρ.

1. Calcolare la resistenza R che oppone ad una corrente che scorre in direzione parallela all'asse del cilindro.
2. Dati $R_1 = 1$ mm, $R_2 = 1.5$ mm e se nel conduttore scorre una corrente $i = 500$ mA e il campo all'interno del conduttore ha intensità $E = 10$ V/m, quanto vale la resistività ρ?

Soluzione

1. Applichiamo la definizione di resistenza:

$$R = \rho \int_0^h \frac{dh}{\Sigma(h)} = \rho \int_0^h \frac{dh}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} = \frac{\rho h}{\pi(R_2^2 - R_1^2)}$$

2. Dobbiamo prima applicare la legge di Ohm per trovare la resistenza. Per farlo, però, dobbiamo prima calcolare la d.d.p. ai capi del conduttore:

$$\Delta V = Eh = 10\,\mathrm{V}$$

Quindi:

$$R = \frac{\Delta V}{i} = 20\,\Omega = \rho \frac{h}{\pi(R_2^2 - R_1^2)}$$

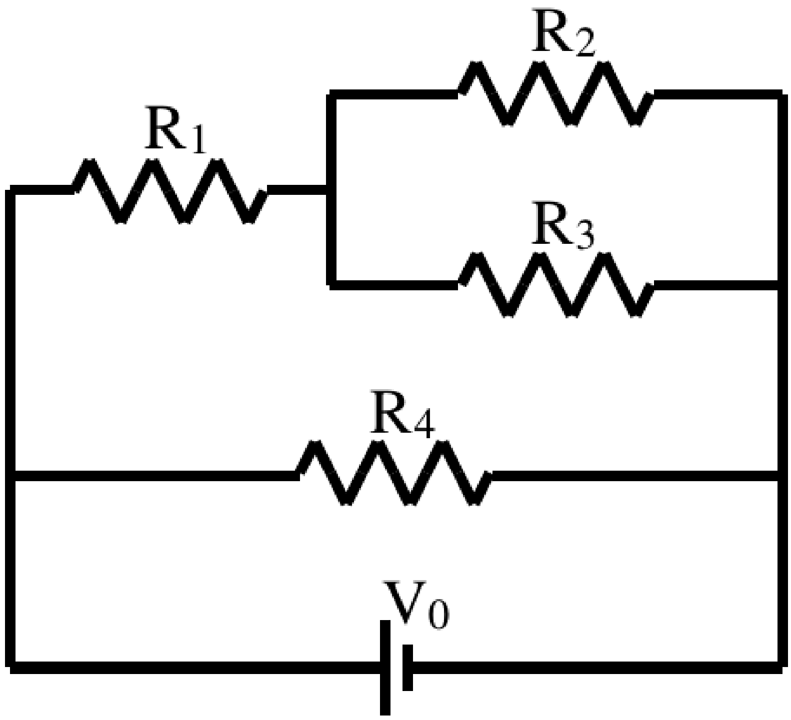
e quindi la resistività vale:

$$\rho = \frac{E\pi(R_2^2 - R_1^2)}{i} = 7.85 \times 10^{-5}\,\Omega\mathrm{m}$$

Esercizio 27

Testo

Dato il circuito in figura e i valori $R_1 = 1.0\,\Omega$, $R_2 = 3.0\,\Omega$, $R_3 = 2.0\,\Omega$ and $R_4 = 2.0\,\Omega$,



1. Calcolare la resistenza equivalente.
2. Calcolare la potenza dissipata da ognuno dei quattro resistori se $V_0 = 6$ V.

Soluzione

1. R_2 ed R_3 sono in parallelo, e quindi si ha

$$R_{\text{eq}}^{(1)} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = 1.2\,\Omega$$

R_1 e $R_{\text{eq}}^{(1)}$ sono in serie, quindi

$$R_{\text{eq}}^{(2)} = R_1 + R_{\text{eq}}^{(1)} = 2.2\Omega$$

Restano solamente due resistori (R_4 e $R_{\text{eq}}^{(2)}$), che sono collegati in parallelo:

$$R_{\text{eq}} = \frac{R_4 R_{\text{eq}}^{(2)}}{R_4 + R_{\text{eq}}^{(2)}} = 1.05\,\Omega$$

2. Sappiamo che $\mathcal{P} = \Delta V i = R i^2 = \frac{\Delta V^2}{R}$. Per poter applicare queste relazioni dobbiamo prima trovare o le d.d.p. ai capi dei resistori, o le correnti che passano al loro interno o entrambi. Sappiamo che la corrente totale è data da:

$$i = \frac{V_0}{R_{\text{eq}}} = 5.73\,\text{A}$$

Quella passante per R_4 vale

$$i_4 = \frac{V_0}{R_4} = 3\,\text{A}$$

e quindi, per la condizione di stazionarietà, quella che passa nel ramo superiore (che, sempre per lo stesso principio, passa anche per R_1) vale

$$i_1 = i - i_4 = 2.72\,\text{A}$$

Quindi la d.d.p. ai capi di R_1 è:

$$\Delta V_1 = R_1 i_1 = 2.71\,\text{V}$$

Quindi la d.d.p. ai capi di R_2 ed R_3 vale:

$$\Delta V_{\text{eq}}^{(1)} = V_0 - \Delta V_1 = 3.27\,\text{V}$$

per cui le correnti negli ultimi due resistori valgono:

$$i_2 = \frac{\Delta V_{\text{eq}}^{(1)}}{R_2} = 1.09\,\text{A}$$
$$i_3 = \frac{\Delta V_{\text{eq}}^{(1)}}{R_3} = 1.63\,\text{A}$$

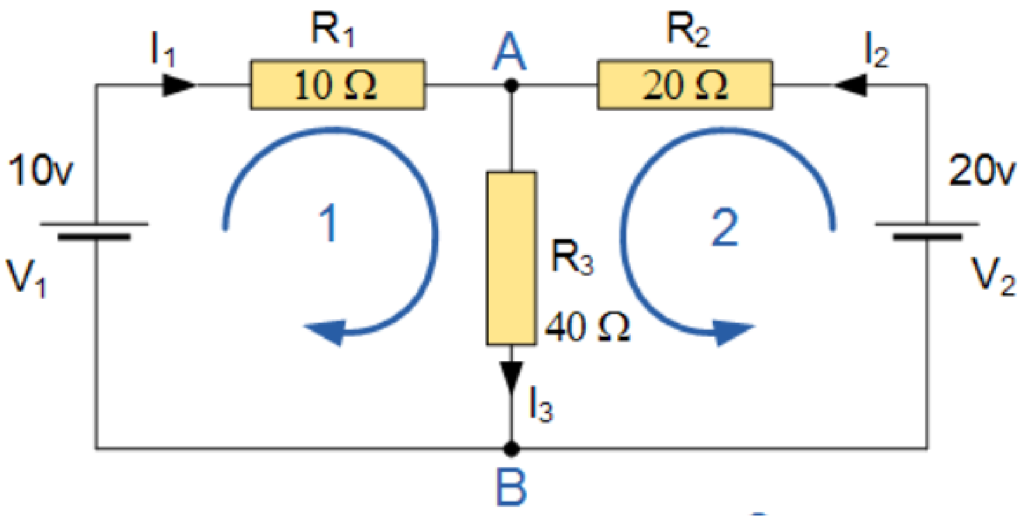
Nota Bene: perché $i_2 + i_3 \neq i_1$? Perché tagliando i decimali finali stiamo sempre approssimando i valori numerici... Se calcolassimo tutte le quantità senza approssimare ad ogni passaggio e stampassimo *tutte* le cifre decimali vedremmo che le correnti verrebbero identiche. Dai valori delle correnti otteniamo la potenza:

$$\mathcal{P}_1 = R_1 i_1^2 = 7.4\,\text{W}$$
$$\mathcal{P}_2 = R_2 i_2^2 = 3.6\,\text{W}$$
$$\mathcal{P}_3 = R_3 i_3^2 = 8.7\,\text{W}$$
$$\mathcal{P}_4 = R_4 i_4^2 = 18\,\text{W}$$

Esempio Kirchhoff

Questo esercizio è stato svolto a lezione.

Calcoliamo le correnti che scorrono nel circuito in figura



Scegliamo arbitrariamente i versi delle correnti in maniera tale che nelle due maglie (1 e 2) si vada dal polo positivo a quello negativo di ogni generatore. Applichiamo la prima legge di Kirchhoff nel nodo A:

$$i_1 + i_2 = i_3.$$

Per le due maglie, invece, vale

$$\begin{aligned} V_1 &= i_1 R_1 + i_3 R_3 \\ V_2 &= i_2 R_2 + i_3 R_3 \end{aligned}$$

Le equazioni si risolvono sostituendo la prima nelle ultime due e poi isolando le due correnti. Nello specifico caso in esame si trova $i_1 = -0.143$ A, $i_2 = 0.429$ A e $i_3 = 0.286$ A. Il fatto che i_1 sia negativa significa che il suo verso è contrario a quello che abbiamo scelto per applicare le leggi di Kirchoff.

Possiamo risolvere lo stesso problema scegliendo versi differenti: orario per entrambe le maglie. In questo caso la prima legge di Kirchhoff si può scrivere come

$$i_1 = i_2 + i_3$$

e quindi

$$\begin{aligned} V_1 &= i_1 R_1 + i_3 R_3 \\ -V_2 &= i_2 R_2 - i_3 R_3 \end{aligned}$$

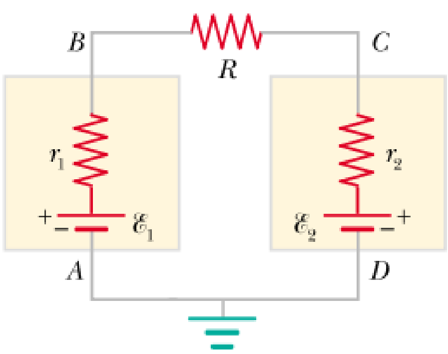
che, se risolto, dà $i_1 = -0.143 A$, $i_2 = -0.429$ e quindi $i_3 = i_1 - i_2 = 0.286$, cioè gli stessi risultati di prima (tenendo conto dei segni).

Esercizio 28

MNV: esempio 5.9

Testo

Calcolare la corrente che scorre nel seguente circuito, composto da un'unica maglia ($\mathcal{E}_1 = 50$ V, $\mathcal{E}_2 = 100$ V, $R = 50\,\Omega$, $r_1 = 20\,\Omega$, $r_2 = 30\,\Omega$):



Soluzione

Scegliamo (arbitrariamente) il verso orario. La seconda legge di Kirchhoff diventa:

$$\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 = (r_1 + r_2 + R)i$$

e quindi la corrente vale:

$$i = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{r_1 + r_2 + R} = -0.5\ \mathrm{A}.$$

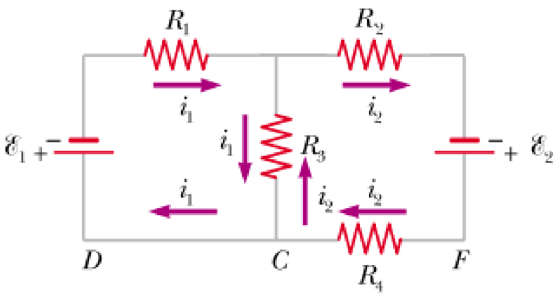
Il segno negativo della corrente implica che il verso in cui scorre è opposto a quello che abbiamo scelto (quindi antiorario).

Esercizio 29

MNV: esempio 5.10

Testo

Calcolare le correnti che scorrono nel seguente circuito, composto da due maglie($\mathcal{E}_1 = 18$ V, $\mathcal{E}_2 = 12$ V, $R_1 = 12\,\Omega$, $R_2 = 2\,\Omega$, $R_3 = 6\,\Omega$, $R_4 = 4\,\Omega$):



Soluzione

Scegliamo il verso orario per la maglia a sinistra e antiorario per quella a destra (quindi al contrario di quanto indicato in figura, che invece corrisponde alla risoluzione dell'esercizio che si trova in fondo alle soluzioni). Applicando la seconda legge di Kirchhoff otteniamo le seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} -\mathcal{E}_1 &= R_1 i_1 + R_3(i_1 + i_2) \\ -\mathcal{E}_2 &= (R_2 + R_4)i_2 + R_3(i_2 + i_1) \end{aligned}$$

Se sostituiamo i valori numerici troviamo:

$$\begin{aligned} -18 &= 18i_1 + 6i_2 \\ -12 &= 12i_2 + 6i_1 \end{aligned}$$

da cui ricaviamo:

$$\begin{aligned} i_1 &= -0.8\ \mathrm{A} \\ i_2 &= -0.6\ \mathrm{A} \end{aligned}$$

per cui i_1 scorre in senso antiorario e i_2 scorre in senso orario. In R_3 scorre la corrente $i_3 = i_1 + i_2 = -1.4$ A, quindi dal basso verso l'alto.

Se scegliamo i versi come quelli in figura allora la corrente che scorre nel ramo condiviso ha segno diverso quando è "vista" da ciascuna delle due maglie. In questo caso l'espressione della corrente che scorre in R_3 è differente per le due maglie. In particolare per la maglia di sinistra la corrente del ramo centrale sarà $i_1 - i_2$, mentre per la maglia di destra sarà $i_2 - i_1$. Applicando la seconda equazione di Kirchhoff si ottiene il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{aligned} -\mathcal{E}_1 &= R_1 i_1 + R_3(i_1 - i_2) \\ \mathcal{E}_2 &= (R_2 + R_4)i_2 + R_3(i_2 - i_1) \end{aligned}$$

le cui soluzioni corrispondono a quelle trovate precedentemente.

Si può ottenere lo stesso risultato se introduciamo una corrente i_3 che scorre nel ramo centrale e con cui, ipotizzando un verso, possiamo applicare la prima legge di Kirchhoff. Se per esempio ipotizziamo che i_3 scorra verso l'alto, otteniamo il sistema di equazioni

$$\begin{aligned} i_2 &= i_1 + i_3 \\ -\mathcal{E}_1 &= R_1 i_1 - R_3 i_3 \\ \mathcal{E}_2 &= (R_2 + R_4) i_2 + R_3 i_3 \end{aligned}$$

che, se risolto, dà gli stessi risultati ottenuti con gli altri metodi.