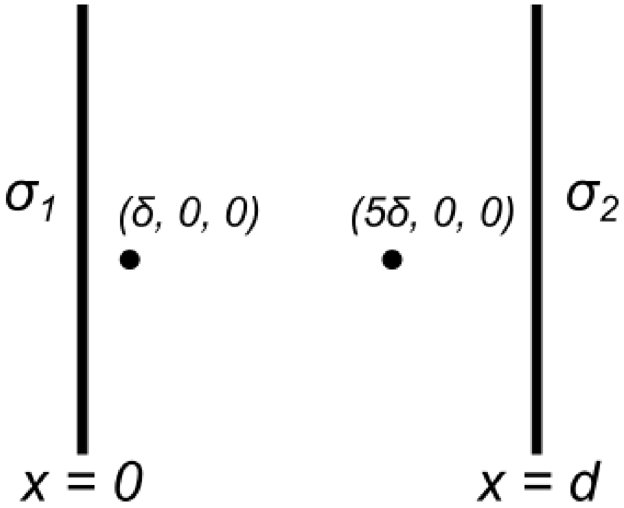
Esercizio 8

Testo



Due piani indefiniti paralleli caricati con densità superficiale σ_1 e σ_2 sono posti in $x_1 = 0$ e $x_2 = d$.

1. Calcolare il lavoro che la forza elettrostatica compie per spostare una carica q_0 tra i punti $(\delta, 0, 0)$ e $(5\delta, 0, 0)$, entrambi compresi tra i due piani. Il problema si può risolvere sia utilizzando la definizione di lavoro che il legame che sussiste tra il lavoro e il potenziale.
2. Poniamo $\sigma_1 = -\sigma_2 > 0$. Al tempo $t = 0$ una carica $q_0 > 0$ si trova in $\vec{r} = (\delta, 0, 0)$ con velocità iniziale $\vec{v} = (v_{0,x}, v_{0,y}, v_{0,z})$. Calcolare il tempo t^* dopo il quale la carica tocca il secondo piano.

Soluzione

1. Il campo generato da un piano indefinito (e quindi anche da più piani indefiniti) è uniforme e diretto (in questo caso) lungo $\hat{x}$, quindi il lavoro si può scrivere semplicemente come $W = F\Delta x = q_0 E \Delta x$. Lo spostamento è dato dalla differenza tra la posizione finale e quella iniziale, quindi:

$$\Delta x = 5\delta - \delta = 4\delta$$

Il campo totale che agisce per $0 < x < d$ è:

$$\vec{E} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\epsilon_0}\hat{x}.$$

Il lavoro fatto è quindi:

$$W = \frac{q_0(\sigma_1 - \sigma_2)}{2\epsilon_0} 4\delta = \frac{2\delta q_0(\sigma_1 - \sigma_2)}{\epsilon_0}$$

Lo stesso risultato si può ottenere ricordando che $W = -q_0 \Delta V$, dove $\Delta V = V(4\delta) - V(\delta)$.

2. Il campo è uniforme e, tra i due piani, vale $\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\epsilon_0}$. L'accelerazione quindi è costante lungo $\hat{x}$ e vale

$$a_x = \frac{q_0}{m} E = \frac{q_0(\sigma_1 - \sigma_2)}{2m\epsilon_0}$$

La posizione in funzione del tempo è:

$$x(t) = \delta + v_{0,x} t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

Ponendo questa ultima quantità uguale alla posizione del secondo piano, cioè $x(t) = d$, otteniamo un'equazione di secondo grado:

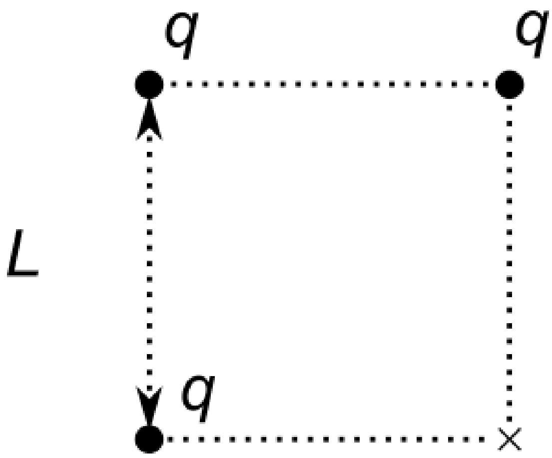
$$(\delta - d) + v_{0,x}t + \frac{1}{2}a_x t^2 = 0.$$

Risolviamo per t per trovare il risultato:

$$t^* = \frac{-v_{0,x} \pm \sqrt{v_{0,x}^2 - 2a(\delta - d)}}{a_x}$$

Esercizio 10

Testo



Tre cariche q sono poste su tre vertici di un quadrato di lato L.

1. Qual è l'energia elettrostatica del sistema?
2. Calcolare l'espressione del lavoro W compiuto dalla forza elettrostatica qualora una carica q_0 venisse posta sul quarto vertice del quadrato. Discuterne il segno e metterlo in relazione con il lavoro compiuto dalla forza esterna per compiere questa operazione.
3. Calcolare W per $q = 2 \cdot 10^{-7}$ C, $q_0 = -10^{-8}$ C e $L = 5$ cm.

Soluzione

1. L'energia totale ha tre contributi, $U_e = U_e^{1,2} + U_e^{1,3} + U_e^{2,3}$. Ognuno di questi tre contributi ha la forma:

$$U_e^{i,j} = \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r_{ij}}$$

Delle tre distanze tra le cariche, due valgono L e una vale $\sqrt{2}L$, quindi si ha:

$$U_e = \frac{q^2}{2\pi\epsilon_0}\frac{1}{L} + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{2}L}$$

2. Per calcolare il lavoro usiamo $W = -\Delta U_e$. L'energia iniziale è $U_e^i = 0$, perché la carica q_0 è inizialmente "all'infinito". L'energia finale invece vale:

$$U_e^f = \frac{q_0 q}{2\pi\epsilon_0}\frac{1}{L} + \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{2}L}$$

E quindi il lavoro vale:

$$W = -\left(\frac{q_0 q}{2\pi\epsilon_0}\frac{1}{L} + \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{2}L}\right)$$

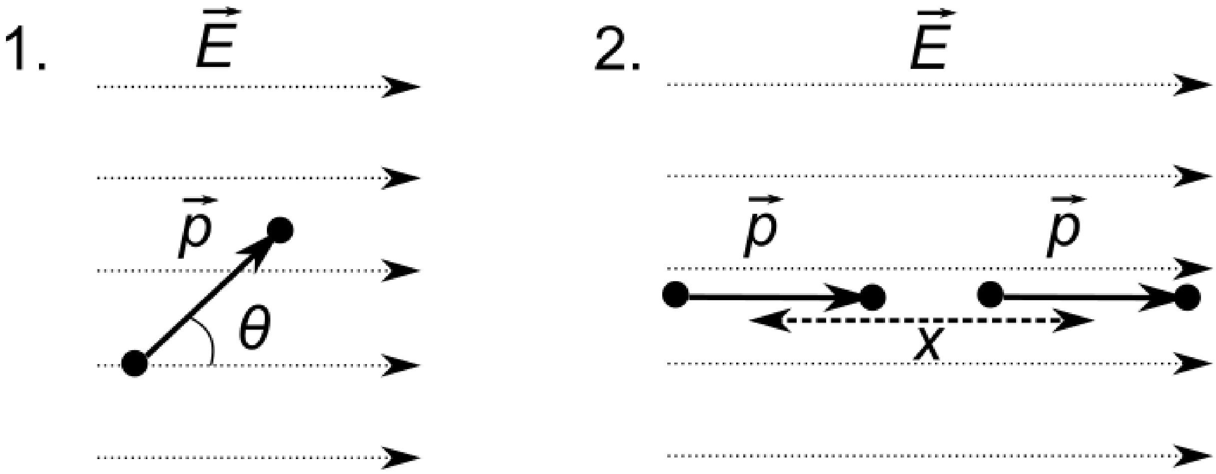
Notiamo che W è negativo se q e q_0 hanno lo stesso segno e positivo altrimenti: se le cariche hanno lo stesso segno l'energia potenziale del sistema *aumenta* e quindi la forza elettrostatica ha direzione opposta allo spostamento (e viceversa). Il lavoro fatto dalla forza esterna per "costruire" il sistema ha invece segno opposto, $W_{\text{ext}} = -W$: se l'energia potenziale aumenta, la forza esterna (che è opposta a quella elettrostatica) e lo spostamento hanno lo stesso segno e viceversa.

3. Sostituiamo i numeri nell'equazione precedente e troviamo

$$W = 9.732 \times 10^{-4}\,\mathrm{J}$$

Nota Bene: il lavoro ha le stesse unità di misura dell'energia (perché?) e quindi si misura in Joule (J).

Esercizio 11



Testo

Un dipolo elettrico di momento di dipolo $\vec{p}$ e momento di inerzia I è immerso in un campo elettrico uniforme $\vec{E}$. Il dipolo è inizialmente fermo in una posizione in cui $\vec{p}$ forma un angolo θ con $\vec{E}$. Al tempo $t = 0$ il dipolo viene lasciato libero di ruotare.

1. Calcolare la velocità angolare ω del dipolo quando l'angolo formato col campo vale 0. Suggerimento: utilizzare la conservazione dell'energia.
2. Il dipolo viene bloccato nell'istante in cui è allineato col campo ($\theta = 0$). Qual è la sua energia elettrostatica se si pone un altro dipolo di momento $\vec{p}$ (avente cioè la stessa orientamento e lo stesso valore del momento di dipolo) ad una distanza x lungo la direzione data dai momenti di dipolo.

Soluzione

1. L'energia potenziale di un dipolo in un campo vale $U_e = -\vec{p} \cdot \vec{E}$, mentre l'energia cinetica di un corpo che ruota è data da $U_k = \frac{1}{2} I \omega^2$. Scriviamo l'espressione dell'energia totale iniziale e finale ed imponiamo che il suo valore si conservi:

$$-pE\cos(\theta) = -pE + \frac{1}{2} I \omega^2$$

da cui si ottiene:

$$\omega = \sqrt{\frac{2pE(1 - \cos(\theta))}{I}}$$

2. L'energia elettrostatica del dipolo è $U_e = -\vec{p} \cdot (\vec{E} + \vec{E}_d)$, dove $\vec{E}$ è il campo uniforme e $\vec{E}_d$ è il campo generato dal secondo dipolo. Poiché i due dipoli sono paralleli e disposti uno dietro l'altro, il campo generato dal secondo dipolo nel punto in cui si trova il primo vale:

$$\vec{E}_d = \frac{\vec{p}}{2\pi\epsilon_0}\frac{1}{x^3}$$

E quindi l'energia potenziale totale è data da

$$U_e = -Ep - \frac{p^2}{2\pi\epsilon_0}\frac{1}{x^3}$$

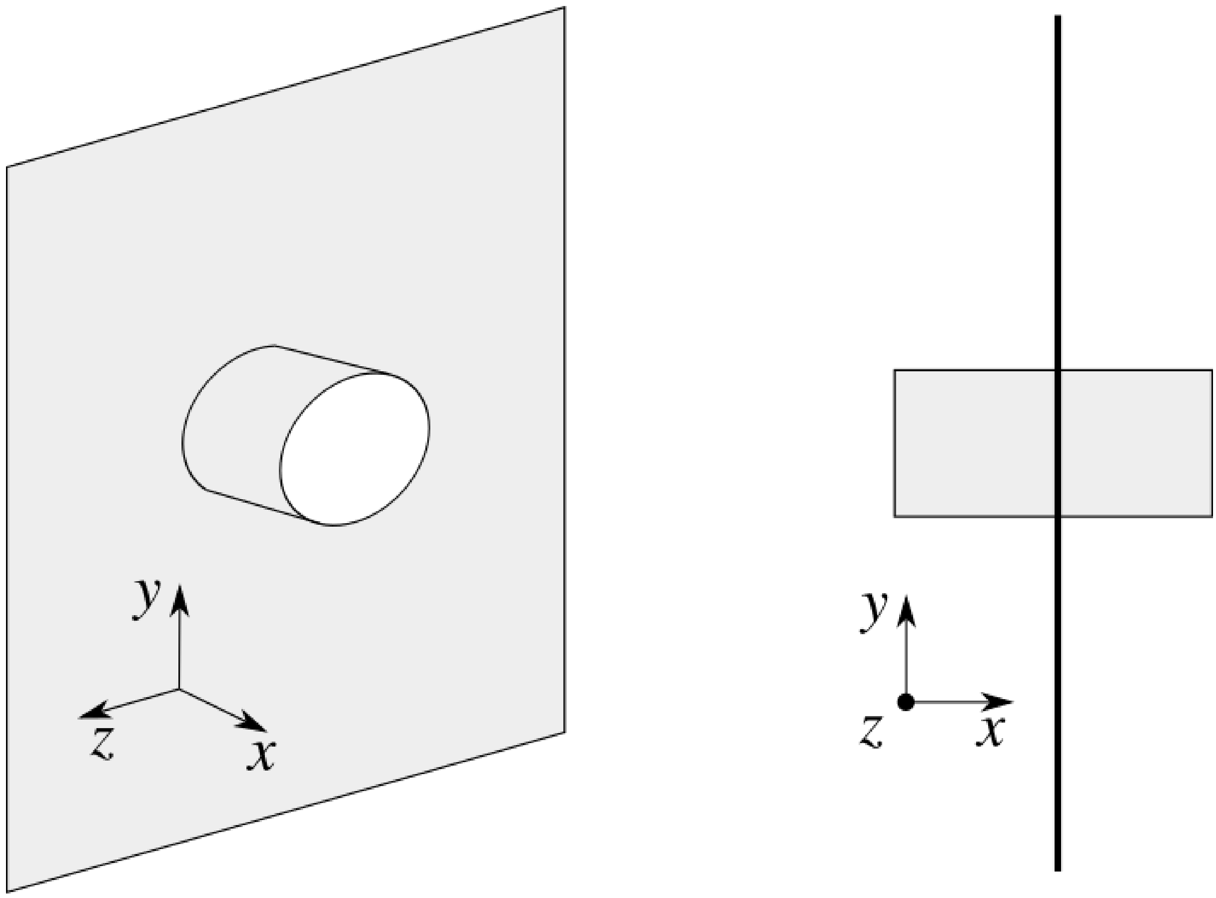
Esercizio 12

Esempio 3.4 del MNV

Testo

Utilizzare il teorema di Gauss per calcolare il campo elettrostatico generato da un piano indefinito caricato uniformemente con densità superficiale di carica σ.

Soluzione



La superficie che scegliamo è un cilindro di raggio R e lunghezza $2x$ centrato sul piano e avente l'asse di simmetria ortogonale al piano (cioè orientato lungo $\hat{x}$ nella figura sopra). Per simmetria il campo deve essere diretto lungo l'asse del cilindro, e quindi il flusso attraverso la superficie laterale del cilindro è nullo ($\vec{E} \cdot \hat{n} = 0$). Resta da calcolare il flusso lungo le due basi. Poiché i due contributi devono essere uguali per simmetria (provate a ruotare tutto il sistema di 180°, cosa cambia?), possiamo direttamente scrivere:

$$2\pi R^2 E(x) = \frac{1}{\epsilon_0}\int_{\tau(r)} dq$$

Poiché abbiamo a che fare con una densità superficiale costante, la carica totale non è altro che la densità per la superficie, e quindi $2\pi R^2 E(x) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\pi R^2$. Risolvendo per il campo (e notando che questo non dipende da x), si trova

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Esercizio 13

Esempi 3.1 e 3.2 del MNV

Testo

Calcolare (e disegnare) il campo elettrostatico generato in *tutto* lo spazio da una sfera di raggio R caricata con carica q distribuita

1. con densità superficiale di carica σ;
2. uniformemente con densità di carica ρ;
3. con densità di carica $\rho(r) = Ar^2$.

Soluzione

L'esercizio si risolve utilizzando il teorema di Gauss. Poiché in tutte e tre i casi abbiamo a che fare con distribuzioni di simmetria sferica, applichiamo il teorema su superfici sferiche di raggio r e concentriche alla sfera carica. Poiché la simmetria è radiale, il campo calcolato è sempre parallelo alla normale delle superfici ed ha sempre lo stesso modulo su ogni punto. Possiamo quindi riscrivere l'integrale del flusso come:

$$\oint_{\Sigma(r)} \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \oint_{\Sigma(r)} E(r) dS = 4\pi r^2 E(r)$$

Applichiamo il teorema di Gauss:

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\tau(r)} dq$$

Dove $\tau(r)$ indica il volume racchiuso dalla superficie sferica (e cioè una sfera di raggio r). Per risolvere l'esercizio dobbiamo calcolare l'integrale a destra per le diverse distribuzioni e per tutte le distanze

1. Nel caso di densità superficiale, abbiamo

$$4\pi r^2 E(r) = 0 \qquad \text{per} \quad r < R$$

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{q}{\epsilon_0} \qquad \text{per} \quad r \geq R$$

Perché se $r < R$ le superfici sferiche non contengono alcuna carica, mentre per $r \geq R$ le superfici sferiche contengono *tutta* la carica q. Invertendo le relazioni appena scritte si trova

$$E(r) = 0 \qquad \text{per} \quad r < R$$

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \qquad \text{per} \quad r \geq R$$

Nota Bene: La seconda relazione (cioè l'espressione del campo per $r \geq R$), è valida qualunque sia la distribuzione di carica, purché abbia simmetria sferica.

2. Dobbiamo calcolare come varia il campo all'interno della sfera (perché all'esterno l'espressione è la stessa di quella di un campo generato da una carica puntiforme). L'espressione per l'integrale del flusso attraverso una superficie sferica di raggio r non cambia. Cambia invece il membro di destra, per il quale si ha (per $r < R$)

$$\frac{1}{\epsilon_0} \int_{\tau(r)} dq = \frac{1}{\epsilon_0} 4\pi \int_0^r \rho r'^2 dr' = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{4}{3} \pi r^3 \rho$$

Sostituendo il membro di sinistra calcolato prima si trova (per $r < R$)

$$E(r) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}$$

3. Ripetiamo la stessa procedura, con la differenza che ora ρ non è costante ma dipende da r e quindi non si può tirare fuori dall'integrale:

$$\frac{1}{\epsilon_0}\int_{\tau(r)} dq = \frac{1}{\epsilon_0}4\pi\int_0^r Ar'^2 r'^2 dr' = \frac{1}{\epsilon_0}\frac{4}{5}\pi r^5 A$$

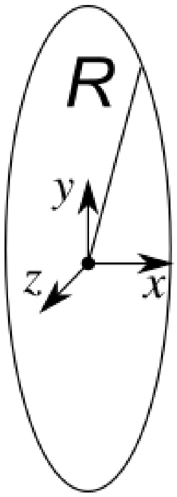
e quindi

$$E(r) = \frac{Ar^3}{5\epsilon_0}$$

Esercizio 14

Esempio 2.6 del MNV

Testo



1. Calcolare il potenziale elettrostatico generato da una carica q uniformemente distribuita su di un anello sottile di raggio R in un generico punto $\vec{P} = (x_0, 0, 0)$ del suo asse.
2. Verificare che l'espressione di E_x calcolata a partire dal potenziale coincide con quella calcolata esplicitamente.

Soluzione

1. La densità di carica lineare vale $\lambda = \frac{q}{2\pi R}$ e si ha $dq = \lambda dl$. Ogni elementino di carica genera un potenziale in $\vec{P}$ pari a

$$dV = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{R^2 + x_0^2}} = \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{R^2 + x_0^2}}$$

Per ottenere il potenziale totale integriamo su tutto l'anello:

$$V = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{R^2 + x_0^2}}\int_0^{2\pi R} dl = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{R^2 + x_0^2}}$$

Nota Bene: questa espressione è valida *unicamente* sull'asse dell'anello (perché?)

2. Possiamo scrivere E_x come derivata del potenziale elettrostatico:

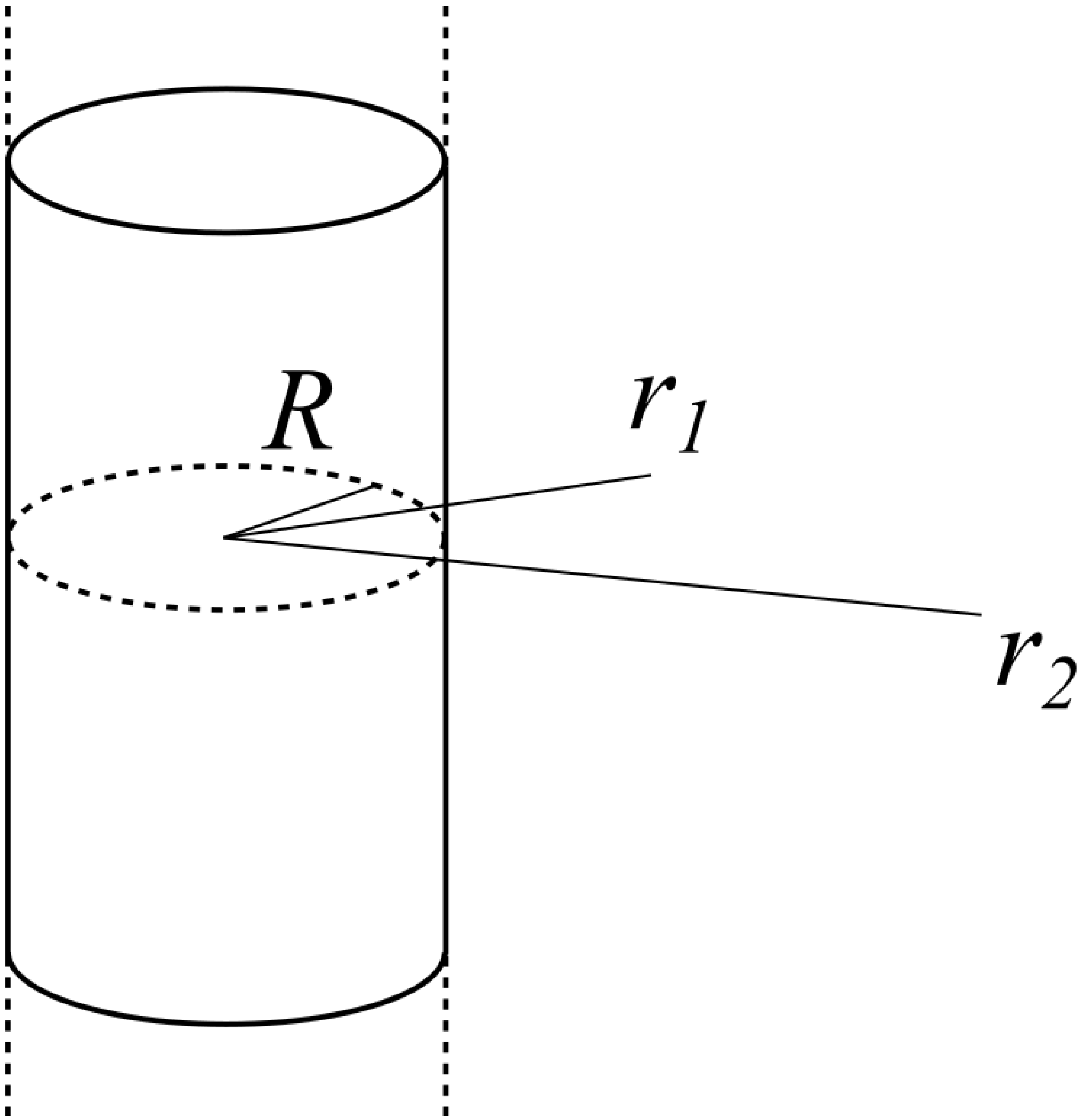
$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{x_0}{\left(R^2 + x_0^2\right)^{3/2}}$$

Questa espressione coincide con quella calcolata esplicitamente.

Esercizio 15

Esempio 3.3 del MNV

Testo



Utilizzare il teorema di Gauss per calcolare

1. il campo elettrostatico generato da un cilindro indefinito di raggio R caricato uniformemente con densità di carica ρ in ogni punto dello spazio.
2. La differenza di potenziale tra due punti distanti dal centro del cilindro, rispettivamente, $r_1 > R$ e $r_2 > R$.

Soluzione

1. Il campo ha sicuramente direzione radiale, cioè $\vec{E}(r) = E(r)\hat{r}$. Per calcolare il modulo $E(r)$ applichiamo il teorema di Gauss ad un cilindro di raggio r ed altezza h coassiale al cilindro carico. Poiché il campo è radiale, il suo flusso attraverso le basi del cilindro è nullo. Calcoliamo il flusso attraverso la superficie laterale:

$$\oint_\Sigma \vec{E}\cdot\hat{n}d\Sigma = E(r)\oint_\Sigma d\Sigma = E(r)2\pi r h$$

La carica totale contenuta all'interno della superficie è data da:

$$\int_\tau \rho d\tau = \rho\pi R^2 h$$

Applicando il teorema di Gauss si trova:

$$E(r) = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

avendo definito la densità di carica *lineare* $\lambda = \rho\pi R^2$. Questa espressione è valida anche per fili *sottili* caricati con la stessa densità di carica λ.

2. La differenza di potenziale si calcola utilizzando la definizione di potenziale:

$$\Delta V = V(r_2) - V(r_1) = -\int \_r_1{}^{r_2} E dr = -\frac{\rho R^2}{2\epsilon_0}\int \_r_1{}^{r_2}\frac{1}{r}dr = -\frac{\rho R^2}{2\epsilon_0}(\log(r_2)-\log(r_1)) = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0}\log\left(\frac{r_1}{r_2}\right)$$

Possiamo usare questa relazione per calcolare la capacità di un condensatore cilindrico di altezza h, per il quale si ha $q = \rho\pi R^2 h$, quindi la differenza di potenziale si può scrivere come

$$\Delta V = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 h}\log\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

e quindi

$$C = \frac{q}{\Delta V} = \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\log\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$$