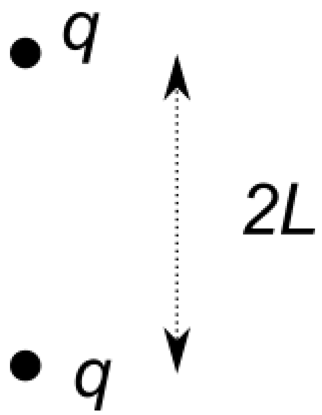
Esercizio 3 -- Esercizio 4 -- Esercizio 5 -- Esercizio 6 -- Esercizio 7 -- Esercizio 8 -- Esercizio 9

Esercizio 3

Nota Bene: questo esercizio è stato svolto a lezione.

Testo



Consideriamo due cariche fisse q disposte parallele all'asse y e distanti $2L$. Calcolare il campo elettrostatico in un punto generico x_0 equidistante dalle due cariche.

Soluzione

Utilizziamo il sistema di riferimento nel quale le due cariche hanno coordinate $\vec{r}_1 = (0, L)$ e $\vec{r}_2 = (0, -L)$ e il punto che ci interessa ha coordinate $\vec{r}_0 = (x_0, 0)$. Studiamo il campo generato dalla prima carica, rispetto alla quale $\vec{r}_{10} = \vec{r}_0 - \vec{r}_1 = (x_0, -L)$, $r\_10 = \sqrt{x_0^2 + L^2}$ e quindi $\hat{r}\_10 = \frac{1}{r_{10}}(x_0, -L)$:

$$E_x^{10} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r_{10}^2}\frac{x_0}{r_{10}}$$

$$E_y^{10} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r_{10}^2}\frac{L}{r_{10}}$$

D'altra parte, rispetto alla seconda carica abbiamo $\vec{r}_{20} = \vec{r}\_0 - \vec{r}\_2 = (x_0, L)$, $r\_20 = \sqrt{x_0^2 + L^2} = r_{10}$, $\hat{r}_{20} = \frac{1}{r_{20}}(x_0, L)$ e quindi

$$E_x^{20} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r_{10}^2}\frac{x_0}{r_{10}}$$

$$E_y^{20} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r_{10}^2}\frac{L}{r_{10}}$$

Il campo totale è la sovrapposizione (cioè, la somma) dei due, e quindi si ha $E_x = 2E_x^{10}$ e $E_y = 0$.

Possiamo ritrovare lo stesso risultato considerando che, in generale, se definiamo θ come l'angolo compreso tra il campo e l'asse x, $E_x^{10} = |\vec{E}_{10}| \cos\theta$ e $E_y^{10} = |\vec{E}_{10}| \sin\theta$. Nel caso specifico dell'esercizio vale l'uguaglianza trigonometrica $\cos\theta = \frac{x_0}{r_{10}}$, mentre il modulo di $\vec{E}$ si ricava dalla legge di Coulomb, $|\vec{E}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r_{10}^2}$. Si trova quindi:

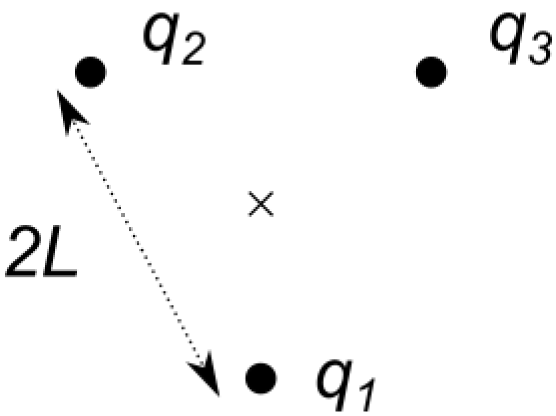
$$E_x^{10} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x_0}{r_{10}^3}$$

in accordo col risultato precedente.

Esercizio 4

Ispirato dall'esempio 1.5 del MNV

Testo



Tre cariche fisse q_1, q_2 e q_3 sono poste sui vertici di un triangolo equilatero di lato $2L$. Poniamo $q_2 = q_3 = q$.

1. Calcolare l'espressione del campo elettrostatico $\vec{E} = (E_x, E_y)$ nel centro $\vec{O}$ del triangolo.
2. Possiamo muovere la carica q_1 lungo l'asse che la congiunge al centro. Se $q_1 = 2q$, dove dobbiamo posizionare q_1 per far sì che il campo si annulli nel punto $\vec{O}$?

Soluzione

1. Orientiamo il sistema di riferimento in modo da avere l'asse x parallelo al segmento che congiunge q_2 e q_3. Poiché q_2 e q_3 si equivalgono, il campo totale da loro generato lungo x deve essere nullo (vedi esercizio 3). Inoltre, il vettore che congiunge q_1 con il centro del triangolo ha solamente la componente y , quindi si trova $E_x = 0$. Usiamo ora la trigonometria per scrivere E_y in funzione dell'angolo θ tra l'asse y e la direzione del campo generato da ognuna delle due cariche, per esempio da q_2:

$$E_y^{(2)} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \cos\theta$$

dove r è la distanza tra $\vec{O}$ e la carica q_2. Dobbiamo ora calcolare r e θ. Se disegniamo un triangolo equilatero e utilizziamo la trigonometria troviamo che:

$$r = \frac{L}{\cos(\pi/6)}, \qquad \theta = \frac{\pi}{3}$$

Se notiamo che $\cos\theta = \cos(\pi/3) = 0.5$, possiamo scrivere il campo totale dovuto a q_2 e q_3 (pari a due volte quello dovuto a q_2, *cfr.* esercizio 3):

$$E_y^{(2)+(3)} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2}$$

D'altro canto, con questo sistema di riferimento il campo dovuto a q_1 è semplice da scrivere, perché il vettore distanza (e quindi il campo elettrostatico generato) tra q_1 e $\vec{O}$ ha la sola componente y non nulla, che quindi vale:

$$E_y^{(1)} = -\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}$$

Fate il disegno e scrivete le componenti dei vettori distanza per capire da dove viene il segno meno! Il campo totale (che è diretto tutto lungo y) vale quindi:

$$E_y = \frac{q - q_1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}$$

2. Se spostiamo q_1, la sua distanza da $\vec{O}$ non sarà più r ma un valore incognito y_0. Possiamo quindi riscrivere la componente y del campo (che è ancora l'unica diversa da 0) come:

$$E_y = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2} - \frac{2q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{y_0^2}$$

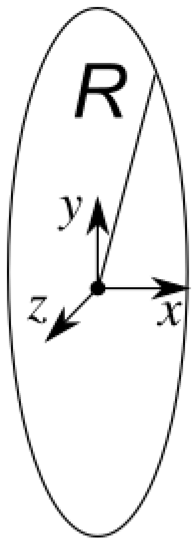
Se imponiamo $E_y = 0$ troviamo:

$$y_0 = \sqrt{2}r$$

Esercizio 5

Dall'esempio 1.6 del MNV

Testo



Una carica q è distribuita uniformemente su un *sottile* anello di raggio R.

1. Senza calcolarlo, discutere qualitativamente il comportamento del campo elettrostatico lungo l'asse dell'anello (che prendiamo coincidente con l'asse x) al variare di x.
2. Calcolare il campo elettrico in un generico punto $(x, 0, 0)$.

Soluzione

1. Lungo l'asse dell'anello il problema ha simmetria cilindrica: lì il campo (se diverso da 0) non può che essere parallelo ad $\hat{x}$. Inoltre, si deve annullare per $x = 0$ (cioè al centro dell'anello), ancora una volta per simmetria.
2. Prendiamo un elementino di carica dq. Questo genererà un campo infinitesimo in x di intensità:

$$d|\vec{E}| = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}$$

dove $r = \sqrt{R^2 + x^2}$. Sappiamo però che, lungo l'asse dell'anello, la componente y del campo (totale) si deve annullare. Dobbiamo quindi utilizzare la relazione precedente per trovare l'unica componente diversa da zero, E_x. Per fare ciò proiettiamo il campo lungo x utilizzando la relazione $E_x = |\vec{E}| \cos(\theta)$, con $\cos(\theta) = \frac{x}{r}$ (disegnare per credere). Si ottiene quindi

$$dE_x = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{r^3}$$

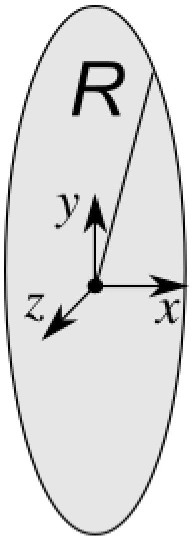
La somma di tutti i contributi è banale, perché tutti gli elementini dq generano lo stesso campo in x e quindi si ottiene

$$\vec{E} = E_x \hat{x} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{r^3} \hat{x} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \hat{x}$$

Esercizio 6

Dagli esempi 1.7 e 1.8 del MNV

Testo



Una carica q è distribuita uniformemente su un sottile disco di raggio R. Consideriamo il sistema di riferimento che ha l'origine nel centro del disco e $\hat{x}$ orientato in maniera concorde all'asse del disco.

1. Calcolare il modulo del campo elettrico in un generico punto $(x, 0, 0)$.
2. Cosa succede quando $R \to \infty$?
3. Discutere il verso del campo lungo l'asse x.

Soluzione

1. Il disco può essere considerato come un oggetto "bidimensionale" avente una densità di carica $\sigma = \frac{q}{\pi R^2}$. Poiché il problema ha simmetria cilindrica, l'elemento di superficie vale $d\Sigma = 2\pi a da$. Il disco può quindi essere considerato come un insieme di anelli di spessore da, aventi ognuno una carica $dq = \sigma d\Sigma = 2\pi\sigma a da$. Il contributo alla componente x del campo (l'unica diversa da zero) del generico anello infinitesimo di raggio r è (vedi esercizio 5):

$$dE_x = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{x a da}{(a^2 + x^2)^{3/2}}$$

L'espressione per il campo totale si ottiene integrando da 0 ad R l'equazione precedente:

$$E_x = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0}\int_0^R \frac{ada}{(a^2+x^2)^{3/2}} = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0}\left(-\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\right)\Bigg|_0^R = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(\frac{x}{|x|} - \frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}\right)$$

2. Nel limite per $R \to \infty$ (tenendo x costante) la radice al denominatore tende all'infinito e quindi la frazione tende a 0. Il risultato è

$$E_x = \mathrm{sgn}(x)\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

dove $\mathrm{sgn}(x)$ indica il segno di x. Questo fattore viene dal fatto che $\sqrt{x^2} = |x|$, quindi $x/|x| = \mathrm{sgn}(x)$. Nel limite di grandi R (in cui il disco carico diventa effettivamente un piano indefinito uniformemente carico) il campo è *uniforme*, cioè prende lo stesso valore in tutti i punti dello spazio. La stessa espressione è valida nel caso in cui ci avviciniamo molto ad una superficie carica (cioè nel limite in cui la superficie è così vicino da *sembrarci* un piano infinito).

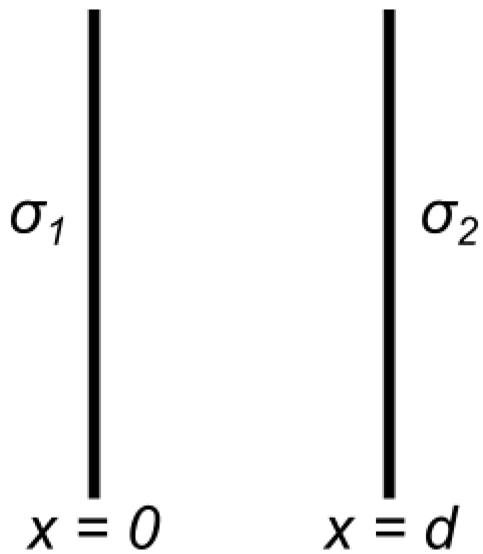
3. Sia che R sia finito sia che tenda all'infinito, il limite di $\vec{E}$ per $x \to 0$ è diverso venendo da sinistra o da destra: il modulo resta lo stesso, mentre il verso è opposto. Il campo ha quindi una *discontinuità* in $x = 0$: il campo ha un salto di valore pari a $\Delta E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$. Vettorialmente si può scrivere che nel limite $R \to \infty$

$$\vec{E} = \mathrm{sgn}(x)\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{x}$$

Esercizio 7

Esempio 2.8 del MNV

Testo

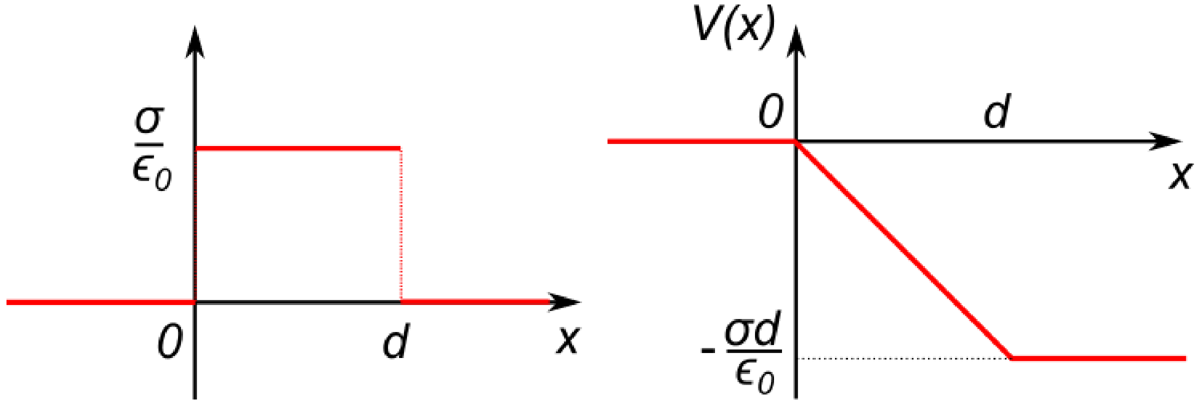


Calcolare e disegnare il potenziale e il modulo del campo elettrostatico generati in tutto lo spazio da due piani indefiniti paralleli uniformemente carichi con densità superficiale σ_1 e σ_2 e posti a $x_1 = 0$ e $x_2 = d$ lungo l'asse x,

1. Nel caso in cui $\sigma_1 = -\sigma_2$.
2. Nel caso in cui $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$.

Soluzione

Il modulo del campo generato da un singolo piano è $E = \frac{\sigma_i}{2\epsilon_0}$.



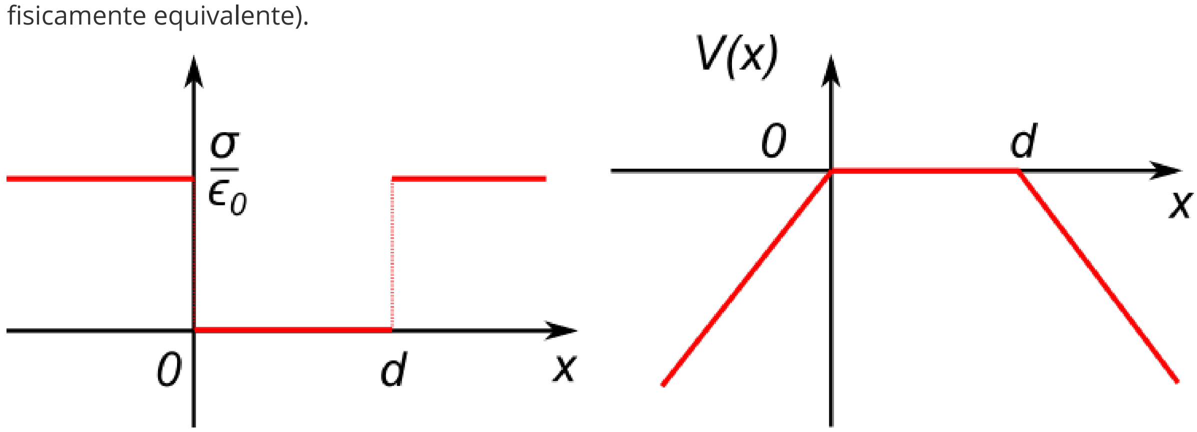
1. Se i piani hanno densità di carica opposta, il campo sarà diverso da 0 solamente nel mezzo, dove vale (definendo $\sigma \equiv \sigma_1$) $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$. Utilizziamo la definizione di potenziale per calcolare $\Delta V = V(x_0) - V(0)$, dove x_0 è un qualsiasi punto compreso **tra** i due piani:

$$\Delta V = -\int_0^{x_0} E dx = -Ed = -\frac{\sigma x_0}{\epsilon_0}$$

e quindi

$$V(x_0) = -\frac{\sigma x_0}{\epsilon_0} + V(0)$$

Lì dove il campo è zero (cioè a sinistra e a destra dei due piani), il potenziale deve essere costante. $V(0)$ è una costante il cui valore possiamo scegliere a piacimento. Mettendola a 0 otteniamo $V(x) = 0$ per $x < 0$ e $V(x) = -\frac{\sigma d}{\epsilon_0}$ per $x > d$ (ma qualsiasi altra scelta sarebbe stata fisicamente equivalente).



2. Se i piani hanno la stessa densità di carica, il campo sarà diverso da 0 solamente a sinistra e a destra dei due piani, dove vale $\vec{E} = \mathrm{sgn}(x)\frac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{x}$ (cioè il campo ha segno $+$ a destra dei piani, $x > d$, e il segno $-$ a sinistra dei piani, $x < 0$). Dove il campo vale 0 (cioè tra i due piani) il potenziale è costante. Come fatto per il punto precedente, poniamo $V(0) = 0$ (ma potremmo porlo uguale a qualsiasi altro valore). A sinistra dei piani (cioè per $x < 0$) si ha

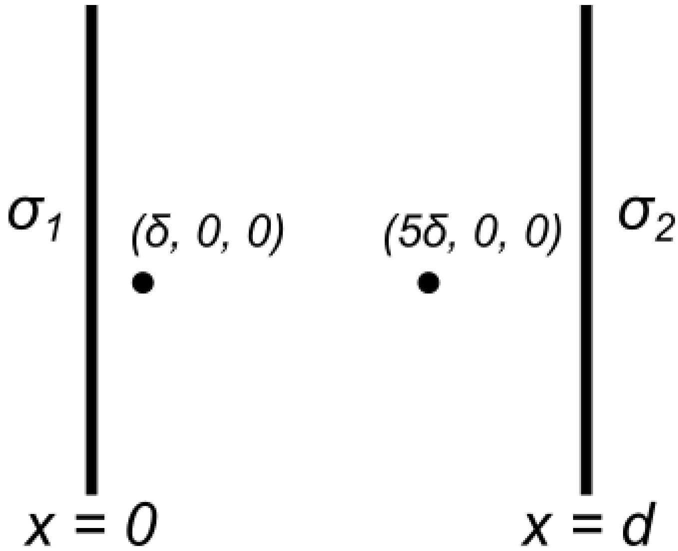
$$V(x_0) = -\int_0^{|x_0|} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\int_0^{|x_0|} E dx = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}|x_0| = \frac{\sigma}{\epsilon_0}x_0$$

perché sia il campo che $d\vec{s}$ sono diretti verso le x negative. A destra dei piani ($x > d$) si ha invece:

$$V(x_0) = -\int_d^{x_0} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\int_d^{x_0} E dx = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}(x_0 - d)$$

Esercizio 8

Testo



Due piani indefiniti paralleli caricati con densità superficiale σ_1 e σ_2 sono posti in $x_1 = 0$ e $x_2 = d$.

1. Calcolare il lavoro che la forza elettrostatica compie per spostare una carica q_0 tra i punti $(\delta, 0, 0)$ e $(5\delta, 0, 0)$, entrambi compresi tra i due piani. Il problema si può risolvere sia utilizzando la definizione di lavoro che il legame che sussiste tra il lavoro e il potenziale.
2. Poniamo $\sigma_1 = -\sigma_2 > 0$. Al tempo $t = 0$ una carica $q_0 > 0$ si trova in $\vec{r} = (\delta, 0, 0)$ con velocità iniziale $\vec{v} = (v_{0,x}, v_{0,y}, v_{0,z})$. Calcolare il tempo t^* dopo il quale la carica tocca il secondo piano.

Soluzione

1. Il campo generato da un piano indefinito (e quindi anche da più piani indefiniti) è uniforme e diretto (in questo caso) lungo $\hat{x}$, quindi il lavoro si può scrivere semplicemente come $W = F\Delta x = q_0 E \Delta x$. Lo spostamento è dato dalla differenza tra la posizione finale e quella iniziale, quindi:

$$\Delta x = 5\delta - \delta = 4\delta$$

Il campo totale che agisce per $0 < x < d$ è:

$$\vec{E} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\epsilon_0}\hat{x}.$$

Il lavoro fatto è quindi:

$$W = \frac{q_0(\sigma_1 - \sigma_2)}{2\epsilon_0} 4\delta = \frac{2\delta q_0(\sigma_1 - \sigma_2)}{\epsilon_0}$$

Lo stesso risultato si può ottenere ricordando che $W = -q_0 \Delta V$, dove $\Delta V = V(4\delta) - V(\delta)$.

2. Il campo è uniforme e, tra i due piani, il suo modulo vale $\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$. L'accelerazione quindi è costante lungo $\hat{x}$ e vale

$$a_x = \frac{q_0}{m} E = \frac{q_0(\sigma_1 - \sigma_2)}{2m\epsilon_0}$$

La posizione in funzione del tempo è:

$$x(t) = \delta + v_{0,x}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

Ponendo questa ultima quantità uguale alla posizione del secondo piano, cioè $x(t) = d$, otteniamo un'equazione di secondo grado:

$$(\delta - d) + v_{0,x}t + \frac{1}{2}a_x t^2 = 0.$$

Risolviamo per t per trovare il risultato:

$$t^* = \frac{-v_{0,x} \pm \sqrt{v_{0,x}^2 - 2a(\delta - d)}}{a_x}$$

Esercizio 9

Esercizio da svolgere a casa.

Testo

Calcolare l'espressione del campo elettrostatico date le seguenti espressioni del potenziale:

1. $V(x, y, z) = A(xz - 2z^2)$
2. $V(x, y, z) = A(\cos(kx) + Bz - \log(y))$

Soluzione

1. Deriviamo il potenziale:

$$E_x = -Az$$
$$E_y = 0$$
$$E_z = A(4z - x)$$

2. Deriviamo il potenziale:

$$E_x = -Ak\sin(kx)$$
$$E_y = \frac{A}{y}$$
$$E_z = -AB$$