Esercizio 63 -- Esercizio 64 -- Esercizio 65 -- Esercizio 66

Esercizio 63

Testo

Si consideri un esperimento di Young effettuato con luce arancione di lunghezza d'onda $\lambda_1 = 610$ nm. Il sistema di frange di interferenza prodotte in esso è caratterizzato da una distanza tra massimi consecutivi pari a $p = 0.47$ mm. Si assuma che la distanza tra schermo e fenditure sia pari a $L = 77$ cm.

1. Calcolare la distanza d tra le due fenditure.
2. Determinare la lunghezza d'onda λ_2 per la quale lo stesso dispositivo produce un sistema di frange d'interferenza avente spaziatura $p_2 = 0.91$ mm.
3. Determinare la spaziatura delle frange p_a che la stessa luce arancione del primo punto genererebbe qualora il dispositivo venisse immerso in acqua (indice di rifrazione $n_a = 1.33$).
4. Qual è la densità di frange nell'ultimo caso?

Soluzione

1. Nell'esperimento di Young la distanza tra i centri di due massimi consecutivi (anche detta **passo**) è $p = \frac{\lambda L}{d}$ e quindi
$$d = \frac{\lambda L}{p} = 1\,\mathrm{mm}$$
2. Usando la stessa formula del punto precedente troviamo
$$\lambda_2 = \frac{pd}{L} = 1.18\,\mu\mathrm{m} = 1180\,\mathrm{nm}$$
3. Un'onda che passa in un mezzo avente indice di rifrazione diverso da uno subisce un cambiamento di lunghezza d'onda, che in questo caso diventa $\lambda_a = \frac{\lambda_1}{n_a}$. Utilizzando la relazione precedente troviamo quindi
$$p_a = \frac{\lambda_a L}{d} = \frac{\lambda_1 L}{n_a d} = \frac{p}{n} = 0.28\,\mathrm{mm}$$
4. La densità di frange non è altro che il numero di frange per unità di lunghezza, cioè l'inverso della spaziatura:
$$D = \frac{1}{p_a} = 3.5\,\mathrm{mm}^{-1} = 35\,\mathrm{cm}^{-1}$$

Esercizio 64

Testo

Su una lastra di materiale è praticata una fenditura di larghezza a, che viene illuminata con luce di lunghezza d'onda $\lambda_1 = 350$ nm e $\lambda_2 = 450$ nm che incide perpendicolarmente alla fenditura. Su uno schermo posto a distanza $L = 6$ m (molto maggiore delle dimensioni della fenditura stessa), si osserva che la distanza spaziale tra i minimi di diffrazione del secondo ordine delle due componenti della luce è pari a $\Delta x = 6$ cm.

1. Determinare la larghezza a della fenditura;
2. Calcolare l'intensità relativa delle due onde in direzione normale allo schermo sapendo che l'intensità relativa delle due onde nella direzione $\theta = \pi/5$ è pari a $I_1(\pi/5)/I_2(\pi/5) = 0.06$.

Soluzione

1. In generale la posizione dei minimi di diffrazione si ha per quegli angoli θ per cui vale

$$\sin\theta = m\frac{\lambda}{a}$$

dove m è un qualunque intero diverso da 0. Se $L \gg x$ possiamo considerare approssimare $\sin\theta \approx \tan\theta \approx x/L$, quindila distanza *angolare* tra due minimi vale

$$\Delta\sin\theta \approx 2\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{a} = \frac{\Delta x}{L}$$

poiché consideriamo i minimi del secondo ordine ($m = 2$). Dalla relazione precedente possiamo ricavare la larghezza della fenditura:

$$a = \frac{2(\lambda_2 - \lambda_1)L}{\Delta x} = 20\,\mu\mathrm{m}$$

2. In generale l'intensità della figura di diffrazione è data da

$$I(\theta) = I(0)\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi a \sin\theta}{\lambda}\right)}{\frac{\pi a \sin\theta}{\lambda}}\right)^2$$

e quindi il rapporto tra le intensità per $\theta = \theta_p = \pi/5$ è

$$\frac{I_1(\pi/5)}{I_2(\pi/5)} = \frac{I_1(0)}{I_2(0)}\frac{\sin^2\left(\frac{\pi a \sin\theta_p}{\lambda_1}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi a \sin\theta_p}{\lambda_2}\right)}\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}$$

e quindi l'intensità relativa delle due componenti quando $\theta = 0$ vale

$$\frac{I_1(0)}{I_2(0)} = \frac{I_1(\pi/5)}{I_2(\pi/5)}\frac{\sin^2\left(\frac{\pi a \sin\theta_p}{\lambda_2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi a \sin\theta_p}{\lambda_1}\right)}\frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2} = 0.015.$$

Esercizio 65

Testo

Un condensatore piano di dimensioni $a \times b \times h_i$ è riempito completamente con un liquido incomprimibile dielettrico di costante relativa κ e mantenuto da un generatore ad una d.d.p. ΔV costante. Se la distanza tra le due armature diventa $1.5h_i$,

1. come varia la capacità del condensatore?
2. se prima di fare questa operazione di allontanamento il generatore venisse spento, cosa succederebbe?
3. se l'operazione precedente venisse ripetuta per un dielettrico solido, quale sarebbe l'espressione della d.d.p.?

Soluzione

1. La capacità iniziale del condensatore è:

$$C_i = \frac{\epsilon_0 ab\kappa}{h_i}$$

Poiché il liquido è incomprimibile, il volume che occupa rimane costante. Il volume iniziale è $V_i = abh_i$, mentre quello finale vale $V_f = 1.5axh_i$, dove x è l'altezza che raggiunge dopo la variazione di distanza. Ponendo $V_i = V_f$ si ottiene $x = \frac{2}{3}b$. La capacità finale sarà quindi:

$$C_f = \frac{4}{9}\epsilon_0 ab\kappa + \frac{2}{9}\epsilon_0 ab = \frac{\epsilon_0 ab}{h_i}\left(\frac{4}{9}\kappa + \frac{2}{9}\right)$$

La differenza di capacità vale quindi:

$$\Delta C = C_f - C_i = \frac{\epsilon_0 ab}{h_i}\left(\frac{4}{9}\kappa + \frac{2}{9} - \kappa\right) = \frac{\epsilon_0 ab}{h_i}\left(\frac{2}{9} - \frac{5}{9}\kappa\right)$$

2. Se il generatore venisse spento *prima* di allontanare le armature, la carica sulle armature resterebbe la stessa. Inizialmente abbiamo

$$q_i = \Delta V C_i$$

D'altro canto alla fine avremmo

$$q_f = \Delta V_f C_f = q_i = \Delta V C_i$$

e quindi la nuova d.d.p. tra le armature sarebbe:

$$\Delta V_f = \Delta V \frac{C_i}{C_f} = \Delta V \frac{9\kappa}{4\kappa + 2}$$

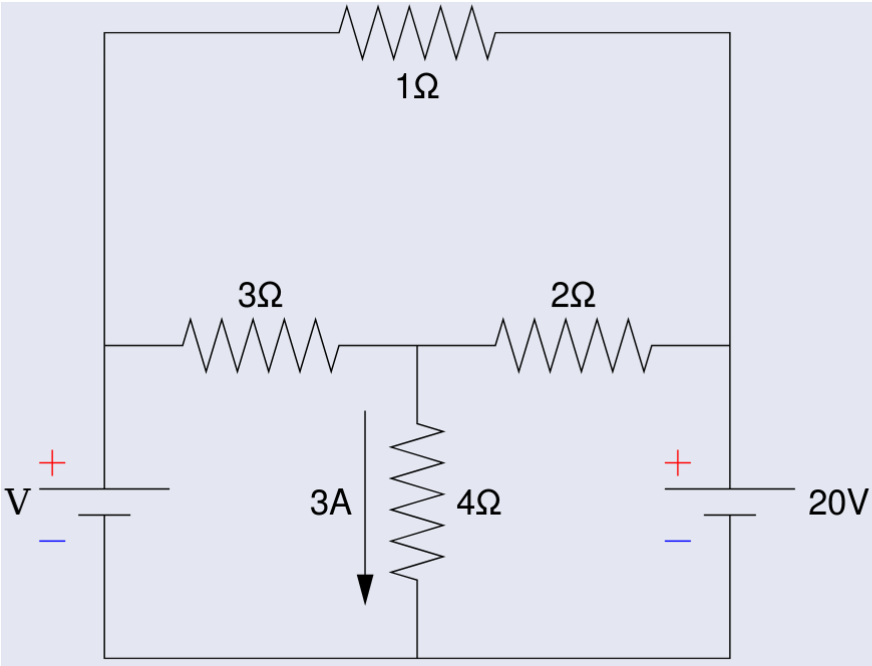
3. Definito $\sigma = q_i/ab$, il campo nel vuoto è $E = \sigma/\epsilon_0$, mentre nel dielettrico è $E = \sigma/\kappa\epsilon_0$. Il potenziale tra le armature vale quindi:

$$\Delta V = \frac{\sigma\left(\frac{3}{2}h_i - h_i\right)}{\epsilon_0} + \frac{\sigma h_i}{\kappa\epsilon_0} = \frac{q_i}{ab\epsilon_0}\left(\frac{h_i}{2} + \frac{h_i}{\kappa}\right)$$

Esercizio 66

Testo

Dato il circuito in figura ($R_1 = 1\,\Omega$, $R_2 = 2\,\Omega$, $R_3 = 3\,\Omega$, $R_4 = 4\,\Omega$, $i_4 = 3$ A, $\mathcal{E}_2 = 20$ V)



1. Calcolare la corrente che scorre nei resistori
2. Calcolare la forza elettromotrice $\mathcal{E}_1$ del generatore di sinistra
3. Cosa cambierebbe se al posto di R_1 ci fosse un condensatore di capacità C?

Soluzione

1. Applichiamo la legge di Kirchhoff alla maglia in basso a destra, scegliendo un verso antiorario:

$$\mathcal{E}_1 = R_2 i_2 + R_4 i_4$$

da cui possiamo ricavarci la corrente che passa attraverso R_2:

$$i_2 = \frac{R_4 i_4 - \mathcal{E}_1}{R_2} = 4\,\mathrm{A}.$$

Applichiamo la prima legge di Kirchhoff per trovare la corrente che scorre attraverso R_3, cioè imponiamo $i_4 - i_2 + i_3 = 0$, dove i_2 ha il segno meno perché *entra* nel nodo, mentre i_4 ha il segno $+$ perché ne esce. Risolvendo per i_3:

$$i_3 = i_2 - i_4 = 1\,\mathrm{A}.$$

Il fatto che i_3 sia positiva ci dice che è uscente. Per trovare la corrente che scorre nella maglia in alto applichiamo la legge di Kirchhoff in senso orario:

$$0 = i_1 R_1 + i_2 R_2 + i_3 R_3$$

da cui si trova

$$i_1 = -\frac{i_2 R_2 + i_3 R_3}{R_1} = -11\,\mathrm{A}$$

e quindi scorre in senso antiorario.

2. Applichiamo la legge di Kirchhoff alla maglia in basso a sinistra (in senso orario):

$$\mathcal{E}_1 = -R_3 i_3 + R_4 i_4 = 9\,\mathrm{V}$$

3. In un circuito in corrente continua un condensatore, una volta carico, si comporta come un interruttore aperto. Usando la seconda legge di Kirchhoff applicata a quella maglia possiamo

trovare qual è la d.d.p. ai suoi capi:

$$0 = R_2 i_2 + R_3 i_3 + \Delta V_C$$

e quindi

$$\Delta V_C = -(R_2 i_2 + R_3 i_3) = -11\,\mathrm{V}.$$