Esercizio 58

Testo

Una barra conduttrice, di massa $m = 100$ g e resistenza $R = 500\,\Omega$, appoggia senza attrito su due binari orizzontali di resistenza trascurabile. La distanza tra i binari è $l = 40$ cm e il sistema è immerso in un campo magnetico uniforme $B = 0.8$T, perpendicolare ai binari ed alla barra (entrante nel foglio, vedi figura). All'istante $t = 0$ la barra è ferma e tra i binari viene posto un generatore con la polarità indicata in figura.

- Se il generatore fornisce una corrente *costante* $i_0 = 0.2$ A calcolare:
    1. in che direzione si muove la sbarra;
    2. la velocità della sbarra al tempo $t_1 = 15$ s;
    3. il lavoro fatto dal generatore fino al tempo t_1.
- Se invece il generatore fornisce una f.e.m. costante pari a $\mathcal{E}_0 = 8$ V calcolare
    1. la potenza fornita dal generatore quando la sbarra ha raggiunto la velocità limite;
    2. il valore della velocità limite.

Soluzione

- Poiché nella sbarretta scorre una corrente costante i_0, essa sarà soggetta ad una forza (anch'essa costante) data da

$$\vec{F} = i_0 \vec{l} \times \vec{B}$$

che, dati i versi indicati in figura, ha direzione verso destra.

1. Poiché la sbarretta parte da ferma, la sua velocità sarà parallela alla forza, e quindi si muoverà verso destra.

2. Ricordando che $\vec{F} = m\vec{a}$ troviamo subito che
$v(t) = at = \frac{i_0 l B t}{m}$
che per $t_1 = 15$ s vale $v(t_1) = 9.6$ m/s.

3. All'inizio del moto la sbarretta è ferma e la f.e.m. totale ai capi del circuito è $\mathcal{E}_0 = Ri_0$.

Quando la sbarretta si mette in moto, a questa f.e.m. va sommata a quella indotta che si oppone alla sorgente di moto. Considerando che il flusso è $\Phi(B) = x(t)lB$ (vedi esercizi precedenti) la f.e.m. indotta vale

$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{dx}{dt}lB = -v(t)lB = -\frac{i_0 l^2 B^2 t}{m}$

Poiché la corrente deve rimanere costante, la f.e.m. nel circuito deve anche rimanere costante (perché la resistenza non varia), e quindi la f.e.m. che il generatore eroga, dovendo contrastare $\mathcal{E}_i$, sarà

$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_i = Ri_0 + v(t)lB = Ri + \frac{i_0 l^2 B^2 t}{m}$

Ricordando il legame tra potenza, differenza di potenziale e corrente si trova

$\mathcal{P} = \mathcal{E}(t) i_0 = Ri_0^2 + \frac{i_0^2 l^2 B^2 t}{m}$

che integrata da 0 a t_1 dà proprio l'energia dissipata:

$W = Ri_0^2 t_1 + \int_0^{t_1} \frac{i_0^2 l^2 B^2 t}{m} dt = Ri_0^2 t_1 + \frac{1}{2}\frac{i_0^2 l^2 B^2 t_1^2}{m}$.

Questo risultato si poteva trovare anche considerando che l'energia fornita dal generatore viene parzialmente trasformata in energia cinetica, e quindi l'energia totale erogata si può scrivere come

$W = Ri_0^2 + \frac{1}{2}mv(t)^2$

che dà lo stesso risultato (provate!).

- Se la tensione (invece della corrente) è costante il comportamento del sistema cambia qualitativamente, poiché la f.e.m. indotta genererà una corrente che non verrà più contrastata dall'aumento della f.e.m. erogata dal generatore. Definiamo i la corrente erogata dal generatore e i_i quella dovuta alla presenza della f.e.m. indotta.

  1. Se un oggetto raggiunge una velocità limite significa che la risultante delle forze agenti su di esso è nulla. L'unica forza che può agire sulla sbarra è quella magnetica $i\vec{l} \times \vec{B}$. L'unico modo affinché sia zero è che sia nulla la corrente che scorre attraverso la sbarra, cioè si deve avere $i = i_i$ (perché le due correnti scorrono in verso opposto). Se è nulla la corrente, sarà nulla anche la potenza erogata.
  2. Poiché $\mathcal{E}_0$ è costante, si avrà

  $$i = \frac{\mathcal{E}_0}{R},$$

  mentre la corrente indotta si trova tramite la legge di Faraday,

  $$i_i = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = \frac{lBv}{R}.$$

  Uguagliando le due correnti si ottiene

  $$v = \frac{\mathcal{E}_0}{lB} = 25\,\mathrm{m/s}$$

Esercizio 59

Testo

Un circuito è composto da una batteria di f.e.m. $\mathcal{E}$, da una resistenza $R = 0.1\,\Omega$, da un'induttanza ($L = 9.44$ H) e da un interruttore, inizialmente chiuso. Al tempo zero l'interruttore viene aperto. Sapendo che nei primi 15 s la corrente passa da 1.16 A a 10.2 mA. Determinare

1. il valore di $\mathcal{E}$;
2. il valore della resistenza R' presente tra i due poli dell'interruttore.

Soluzione

1. La legge oraria con cui varia l'intensità di corrente in un circuito RL che viene scollegato dal generatore è

$$i(t) = i_\infty e^{-\frac{t}{\tau}},$$

dove $i\_\infty = \frac{\mathcal{E}}{R}$ è il valore della corrente a circuito chiuso e $\tau = L/R'$. Dal testo si capisce che $i\_\infty = 1.16$ A e $i(15\,\mathrm{s}) = 10.2$ mA. Utilizzando la prima relazione si trova

$$\mathcal{E} = Ri_\infty = 0.116\,\mathrm{V}.$$

2. Sapendo che $i(15\,\mathrm{s}) = 10.2$ mA e risolvendo per R' si trova

$$R' = \frac{L}{15\,\mathrm{s}} \log\left(\frac{i_\infty}{i(15\,\mathrm{s})}\right) = 2.98\,\Omega$$

Esercizio 60

Testo

Un induttore ($L = 4 \times 10^{-4}$ H) ed una resistenza ($R = 5\,\Omega$) sono posti in serie ad un generatore di tensione ($\mathcal{E} = 200$ V) collegato tramite un interruttore, inizialmente aperto. Al tempo zero l'interruttore viene chiuso. Determinare

1. il tempo che occorre affinché la corrente che fluisce nella resistenza raggiunga il 60% della corrente finale;
2. l'energia accumulata nel campo magnetico dopo che la corrente ha raggiunto il suo valore massimo;
3. il valore della corrente dopo un tempo pari a 3 costanti di tempo $\tau = L/R$.

Soluzione

1. La corrente finale è data dalla legge di Ohm e vale

$$i_\infty = \frac{\mathcal{E}}{R} = 40\,\mathrm{A}.$$

Sapendo che la corrente varia con la legge temporale

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right),$$

il tempo si trova imponendo $i(t) = 0.6i\_\infty$ e risolvendo per t:

$$t = -\frac{L}{R}\log(1 - 0.6) = 7.2 \times 10^{-6}\,\mathrm{s}$$

2. L'energia è data dalla relazione

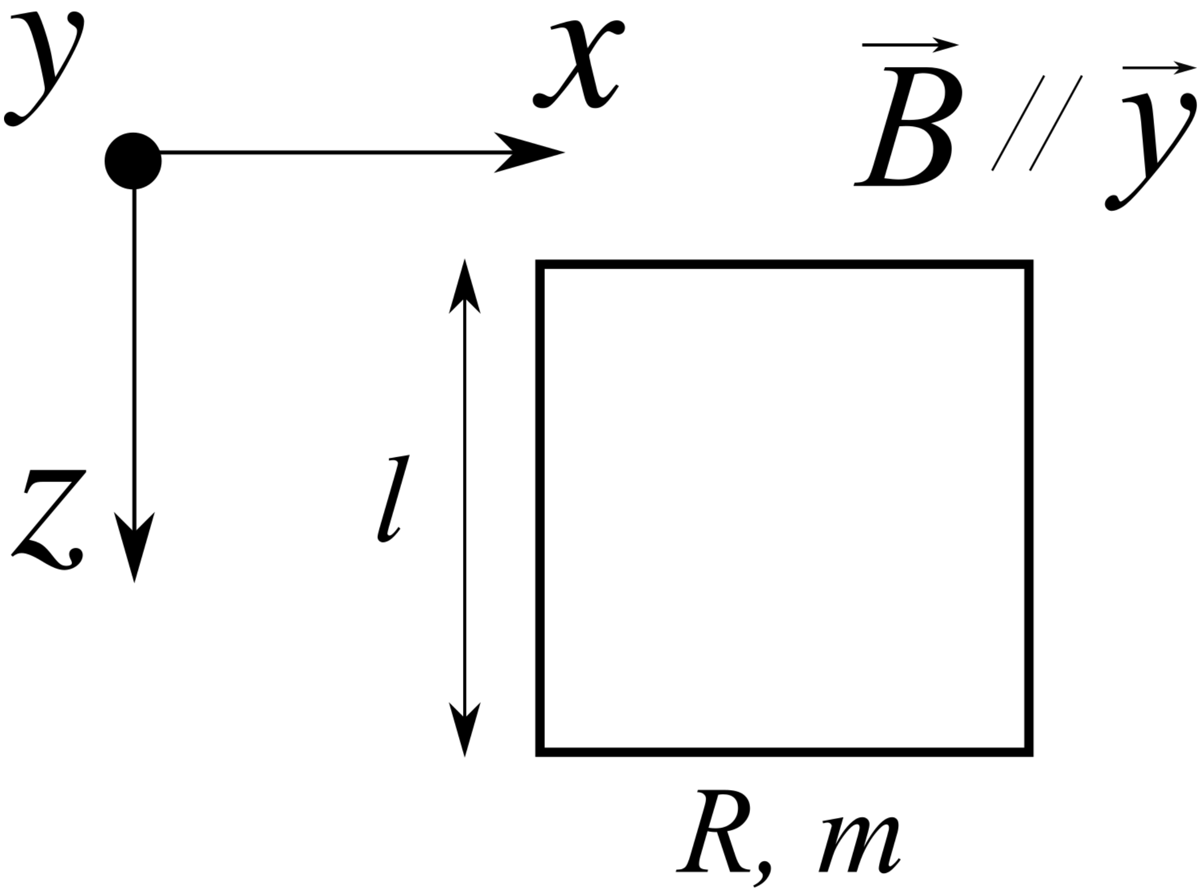
$$U = \frac{1}{2}Li_\infty^2 = 0.32\,\mathrm{J}$$

3. Il valore si ottiene sostituendo $t = 3L/R$ in $i(t)$, trovando

$$i(3L/R) = 38\,\mathrm{A}$$

Esercizio 61

Testo



Una spira quadrata di resistenza $R = 10^{-3}\ \Omega$, massa $m = 10$ g e lato $l = 20$ cm viene lasciata cadere in una regione in cui è presente un campo di magnetico diretto lungo $\hat{y}$ avente modulo dipende dalla coordinata z:

$$B_y(z) = bz$$

con $b = 2T/m$.
La spira è orientata in maniera tale da avere normale parallela a $\vec{B}$.

1. Determinare intensità e verso della corrente indotta nella spira dal moto.
2. Determinare il valore della velocità limite v_{lim}, trascurando l'autoinduzione della spira.
3. Calcolare la corrente che circola nella spira per $v = v_{\text{lim}}$.

Soluzione

1. La corrente si calcola a partire dalla legge di Faraday. Per calcolare il flusso del campo, definiamo $h(t)$ la coordinata z del lato più in alto della spira. Il flusso vale quindi

$$\Phi(B) = b\int_0^l dx \int_{h(t)}^{h(t)+l} zdz = lb\int_{h(t)}^{h(t)+l} zdz = l^2bh(t) + \frac{1}{2}bl^3.$$

Poiché solo il primo termine dipende dal tempo, la f.e.m. indotta vale

$$\mathcal{E}_i = -l^2bv(t)$$

dove $v(t)$ è la velocità della spira al tempo t. Il segno negativo indica che la f.e.m. genererà una corrente che, con la spira vista dalla prospettiva in cui $\hat{y}$ è uscente, scorre in senso orario. L'intensità varrà invece

$$i(t) = \frac{l^2 b v(t)}{R}$$

2. Ci sono tre forze agenti lungo $\hat{z}$: quella magnetica che agisce sul lato in alto, quella magnetica che agisce sul lato in basso e quella peso che agisce sul centro di massa della spira. Ricordando che la forza magnetica che agisce su di una porzione di filo in cui scorre corrente vale $\vec{F} = i\vec{l} \times \vec{B}$ si trova

$$F_{\text{tot}} = \frac{l^3 b^2 v(t)}{R} h(t) - \frac{l^3 b^2 v(t)}{R}(h(t) + l) + mg = -\frac{l^4 b^2 v(t)}{R} + mg.$$

Quando la spira raggiunge la velocità limite si deve avere $F\_\text{tot} = 0$, da cui si ottiene

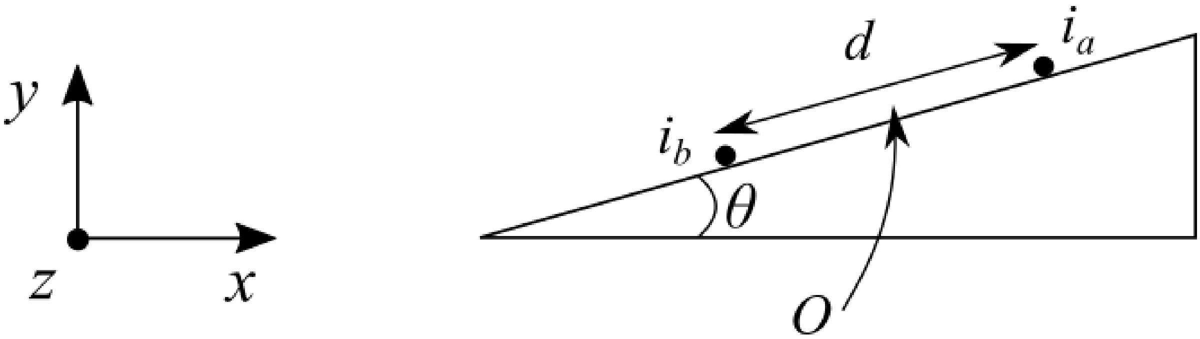
$$v_{\text{lim}} = \frac{Rmg}{l^4 b^2} = 0.015\,\text{m/s}$$

3. Sostituendo il valore della velocità limite ottenuto precedentemente si trova

$$i = \frac{l^2 b v_{\text{lim}}}{R} = 1.2\,\text{A}$$

Esercizio 62

Testo



Due fili indefiniti sono posti su di un piano inclinato di un angolo $\theta = 10°$. Il filo posto più in basso, in cui scorre una corrente $i_b = 20A$ in direzione $\hat{z}$ (considerando il sistema di riferimento indicato in figura), è fisso. Il filo più in alto, che ha densità di massa $\lambda = 0.01$ kg/m ed in cui scorre una corrente i_a, è libero di scivolare senza attrito sul piano. Se la distanza tra i due fili vale $d = 1$ cm, il filo più in alto rimane fermo. **Nota Bene:** la forza peso ha direzione $-\hat{y}$. In figura i cerchi utilizzati per disegnare i fili **non** indicano necessariamente la direzione della corrente che scorre.

1. Calcolare verso e intensità di i_a.
2. Determinare direzione, verso e intensità del campo magnetico presente nel punto O equidistante (distanza $d/2$) dai due fili (vedi figura).
3. Il sistema viene immerso in un campo magnetico uniforme di modulo $B = 0.1$ T e direzione $-\hat{z}$. Determinare il valore di i_a necessario affinché il sistema resti in equilibrio.

Soluzione

1. Poiché la forza peso agisce lungo $-\hat{y}$, la forza magnetica deve sicuramente avere una componente positiva lungo $\hat{y}$, quindi le correnti devono scorrere in verso opposto: il verso di i_a non può che essere lungo $-\hat{z}$. Se il sistema è in equilibrio la forza totale deve essere zero. Poiché il filo è indefinito, in questo caso si parla di forza per unità di lunghezza, la cui risultante vale:

$$i_a B_b(d) - \lambda g \sin\theta = \frac{\mu_0 i_a i_b}{2\pi d} - \lambda g \sin\theta = 0$$

e quindi

$$i_a = \frac{2\pi d \lambda g \sin\theta}{\mu_0 i_b} = 42.7\,\mathrm{A}$$

2. Poiché nei fili scorrono correnti opposte, i due contributi al campo in O hanno la stessa direzione e lo stesso verso, che risulta essere ortogonale al piano inclinato e avere componente $\hat{y}$ positiva. Per quanto riguarda il modulo, questo è la somma dei moduli dei campi generati dai due fili, che si trovano dalla legge di Biot-Savart:

$$\begin{aligned} B_b(O) = B_b(d/2) &= \frac{\mu_0 i_b 2}{2\pi d} = \frac{\mu_0 i_b}{\pi d} \\ B_a(O) = B_a(d/2) &= \frac{\mu_0 i_a 2}{2\pi d} = \frac{\mu_0 i_b}{\pi d} \end{aligned}$$

e quindi

$$B(O) = B_a(O) + B_b(O) = \frac{\mu_0}{\pi d}(i_a + i_b) = 2.5 \times 10^{-3}\,\mathrm{T}$$

3. Poiché è parallelo al filo, il campo magnetico aggiunto non può esercitare alcuna forza su di esso e quindi il valore di i_a non cambia.