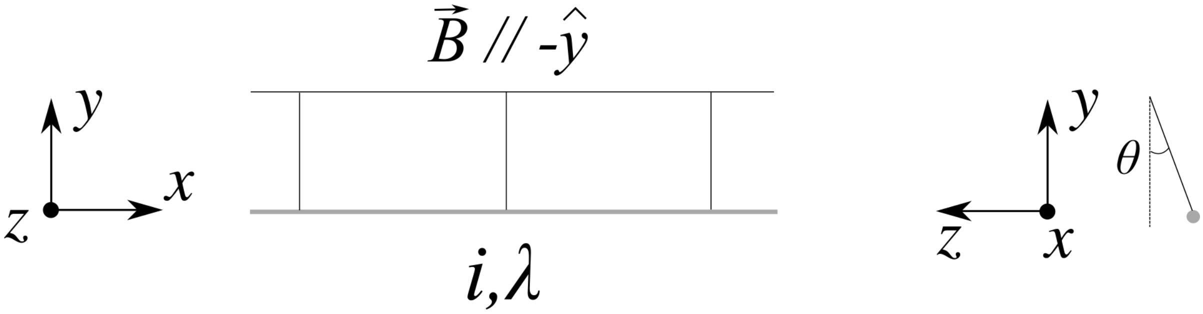
Esercizio 51 -- Esercizio 52 -- Esercizio 53 -- Esercizio 54

Esercizio 51

Testo



Un lungo filo rettilineo percorso da una corrente i è sospeso al soffitto tramite delle corde ad esso collegate ad invervalli regolari e forma un angolo $\theta = 30^\circ$ con la verticale, definito come uno spostamento in direzione antioraria rispetto a quest'ultima. Il filo ha una densità lineare di massa $\lambda = 0.12$ kg/m e si trova in una regione di spazio in cui è presente un campo magnetico diretto verso il basso di intensità $B = 0.36$ T. Determinare verso e intensità della corrente che scorre nel filo.

Nota Bene: la figura mostra lo stesso sistema da due punti di riferimento diversi (identificati dai sistemi di riferimento).

Soluzione

Sul filo agiscono due forze: quella peso e quella magnetica. Poiché la lunghezza del filo è indefinita, dobbiamo ragionare in termini di *forza per unità di lunghezza*. In questo caso è possibile farlo perché entrambe le forze sono proporzionali alla lunghezza del tratto considerato. L'intensità della forza peso vale infatti $\lambda l g$, mentre quella della forza magnetica è ilB. Per porre le condizioni di equilibrio, dobbiamo scomporre le forze per unità di lunghezza lungo le componenti tangenziali e normali alle corde che tengono sospeso il filo. Queste ultime vengono annullate dalla tensione delle corde, e quindi dobbiamo semplicemente porre uguali ed opposte le componenti tangenziali.
Disegnando il sistema, vediamo come la componente tangenziale della forza peso tenderà a far diminuire θ, quindi la corrente deve essere tale per cui la componente tangenziale della forza magnetica deve andare nel verso opposto. Considerando che $\vec{F} = i\vec{l} \times \vec{B}$ e che $\vec{B} = -B\hat{y}$ si trova subito che la corrente deve avere verso uscente dal foglio.
Per trovare l'intensità di corrente poniamo uguali le due componenti tangenziali:

$$\lambda g \sin(\theta) = iB\cos(\theta)$$

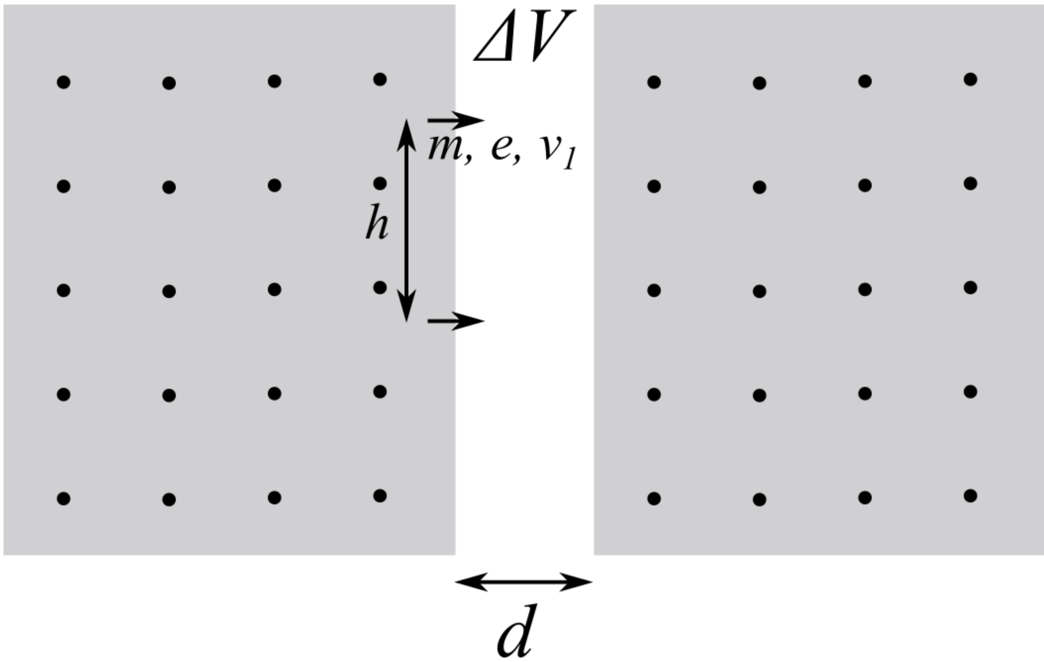
e quindi otteniamo

$$i = \frac{\lambda g}{B}\tan(\theta) = 1.89\,\mathrm{A}$$

Esercizio 52

Esercizio 6.11 del MNV

Testo



Due griglie metalliche G_1 e G_2 parallele molto estese distano $d = 4$ cm e separano due regioni di spazio in cui esiste un campo magnetico $B = 0.8$ T uniforme e uscente dal foglio. Tra le griglie è applicata un d.d.p. ΔV. Al tempo $t = 0$ un protone attraversa G_1 nel punto A_1 ed entra nella regione tra le griglie con velocità ortogonale a G_1. Dopo un tempo $t_{\text{tot}} = 1.22 \times 10^{-7}$ s il protone riattraversa nuovamente G_1 nello stesso verso ma in un punto A_2 distante $h = 5.2$ cm da A_1.

1. Calcolare ΔV.
2. Calcolare le velocità v_1 e v_2 del protone all'interno delle due regioni col campo magnetico.

Soluzione

1. Il tempo t_{tot} è la somma del tempo trascorso all'interno delle regioni e dello spazio tra le griglie, cioè:

$$t_{\text{tot}} = 2t_G + t_1 + t_2$$

perché t_G è lo stesso sia in un verso che nell'altro, poiché la particella è sottoposta alla stessa forza e in un caso passa da v_1 a v_2 e nell'altro da v_2 a v_1. I tempi t_1 e t_2 sono metà dei periodi necessari per compiere una traiettoria circolare. Poiché ci ricordiamo che il periodo è indipendente dalla velocità, si trova immediatamente

$$t_1 = t_2 = \frac{T}{2} = \frac{\pi m}{qB}$$

e quindi, sostituendo,

$$t_G = \frac{t_{\text{tot}} - T}{2} = 2 \times 10^{-8}\,\text{s}$$

Se disegniamo il sistema notiamo come h sia semplicemente la differenza tra i diametri delle semicirconferenze disegnate dalla traiettoria della particella all'interno delle due regioni col campo, cioè:

$$h = 2r_2 - 2r_1 = 2\frac{m}{qB}(v_2 - v_1)$$

da cui si ricava

$$v_2 - v_1 = \frac{hqB}{2m} = 2 \times 10^6\,\mathrm{m/s}.$$

D'altronde, l'accelerazione tra le due griglie è costante e quindi possiamo scrivere

$$v_2 = v_1 + at_G = v_1 + \frac{q\Delta V}{md} t_G,$$

dove abbiamo scritto l'accelerazione come la forza dovuta al campo elettrico, che vale $E = \Delta V/d$, diviso per la massa della particella, $a = q\Delta V/dm$. Risolvendo per ΔV si trova

$$\Delta V = (v_2 - v_1)\frac{md}{qt_G} = 4.18 \times 10^4\,\mathrm{V}$$

2. Ora conosciamo solo la differenza tra le due velocità. Possiamo trovarne il valore assoluto scrivendo l'equazione del moto iniziale per la particella, per cui si ha, considerando $x(0) = 0$,

$$x(t) = v_1 t + \frac{1}{2}at^2 = v_1 t + \frac{q\Delta V}{2md}t^2$$

che, per $t = t_G$, vale

$$d = v_1 t_G + \frac{q\Delta V}{2md}t_G^2 = v_1 t_G + \frac{1}{2}(v_2 - v_1)t_G$$

da cui possiamo ricavare v_1:

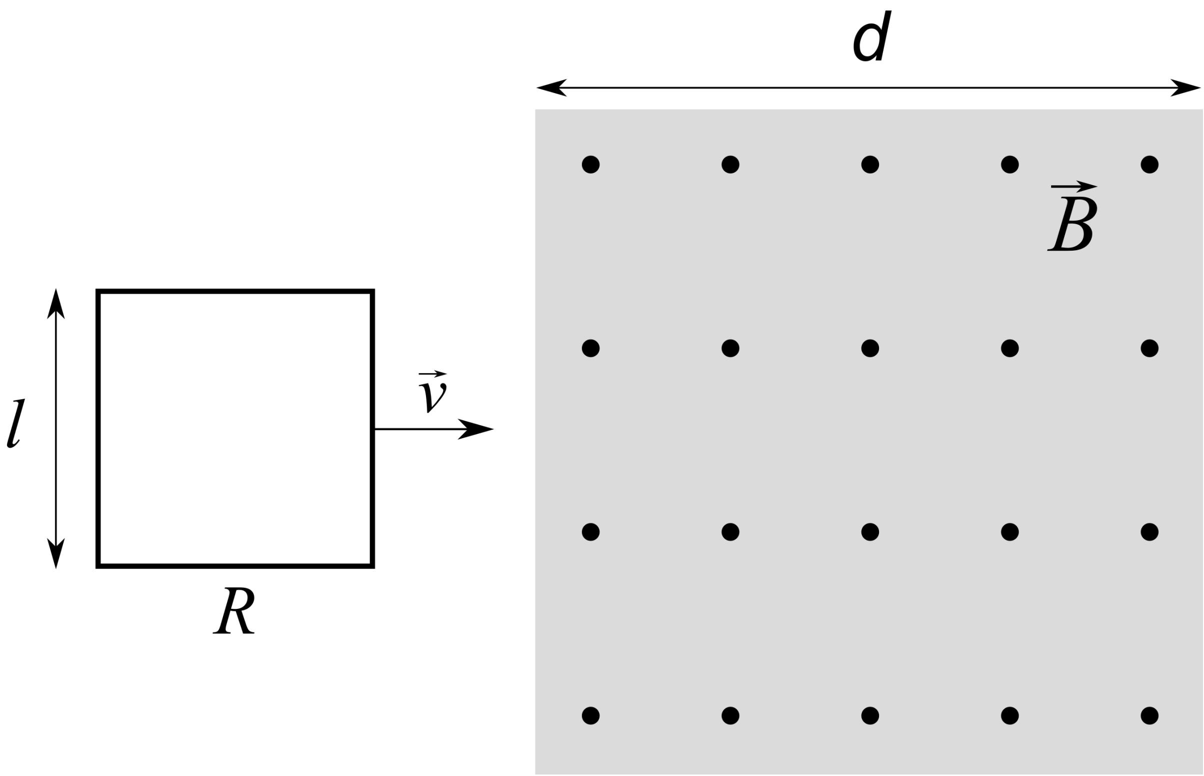
$$v_1 = \frac{d - \frac{1}{2}(v_2 - v_1)t_G}{t_G} = 10^6\,\mathrm{m/s}$$

e quindi v_2 vale:

$$v_2 = (v_2 - v_1) + v_1 = 3 \times 10^6\,\mathrm{m/s}$$

Esercizio 53

Testo



Una spira quadrata rigida, di lato $l = 12$ cm e resistenza $R = 25\,\Omega$, viene trascinata con velocità orizzontale *costante*, $v = 3$ m/s. La spira entra in una zona di larghezza $d = 2l$ in cui è presente un campo magnetico $B = 4.5$ T ortogonale alla spira ed uscente dal piano del disegno.
Determinare:

1. il verso della corrente indotta nella spira nelle varie fasi del moto;
2. in quali regioni agisce una forza sulla spira, il suo verso e la sua intensità;
3. l'energia totale dissipata nella resistenza dopo che la spira è completamente uscita dalla zona con campo magnetico;
4. la carica che globalmente ha fluito lungo la spira.

Soluzione

1. La corrente scorrerà solo in quelle regioni di spazio nelle quali il flusso del campo magnetico attraverso la spira sta variando. Questo avviene quando la spira entra ed esce dalla regione di campo. Per la legge di Lenz la corrente che scorre in un conduttore per effetto dell'induzione elettromagnetica si oppone sempre alla variazione di flusso. Quando la spira entra nella regione in cui è presente il campo, il flusso aumenta e quindi la corrente deve essere tale da generare un campo magnetico che si opponga al campo già presente. Considerando che il campo è uscente, la corrente dovrà quindi scorrere in senso orario per generare un campo entrante. Quando la spira esce, il flusso diminuisce e quindi la corrente dovrà scorrere in senso antiorario, così da generare un campo parallelo a quello presente, tendendo così a contrastare la variazione di flusso. L'intensità della corrente è in entrambi i casi
$$i = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = \frac{lBv}{R}$$
2. Ragionando come sopra, la forza agisce solo quando vi è una variazione di flusso, quindi quando la spira entra ed esce dalla regione in cui è presente il campo. Quando la spira entra, la forza sul lato di destra non è bilanciata dal lato opposto (che non sente ancora l'effetto del campo magnetico) e quindi la spira sentirà una forza magnetica
$$\vec{F} = i\vec{l} \times \vec{B}.$$

Poiché la corrente scorre in verso orario (vedi sopra), in quel lato $\vec{l}$ è diretto verso il basso, e quindi la forza risultante varrà

$$\vec{F} = -\frac{l^2 B^2 \vec{v}}{R}$$

che ha modulo $F = 35$ mN.
Quando la spira esce, solo il lato di sinistra risente del campo magnetico. Ragionando come sopra, ma considerando che ora la corrente scorre in verso antiorario, si trova di nuovo

$$\vec{F} = -\frac{l^2 B^2 \vec{v}}{R}$$

che quindi ha stessi modulo, direzione e verso di prima.

3. In generale il lavoro è dato da
$$W = \int_s \vec{F} \cdot d\vec{s},$$

dove s è lo spostamento fatto. in questo caso l'espressione della forza è quella trovata precedentemente, che è costante quando diversa da 0, mentre lo spostamento è nella direzione del moto, quindi antiparallelo alla forza stessa. F è diversa da 0 unicamente quando la spira entra ed esce dalla regione di campo, e questo avviene per una lunghezza l in entrambi i casi. Lo spostamento totale è quindi $s = 2l$, quindi il lavoro vale

$$W = -2Fl = -8.4\,\mathrm{mJ}$$

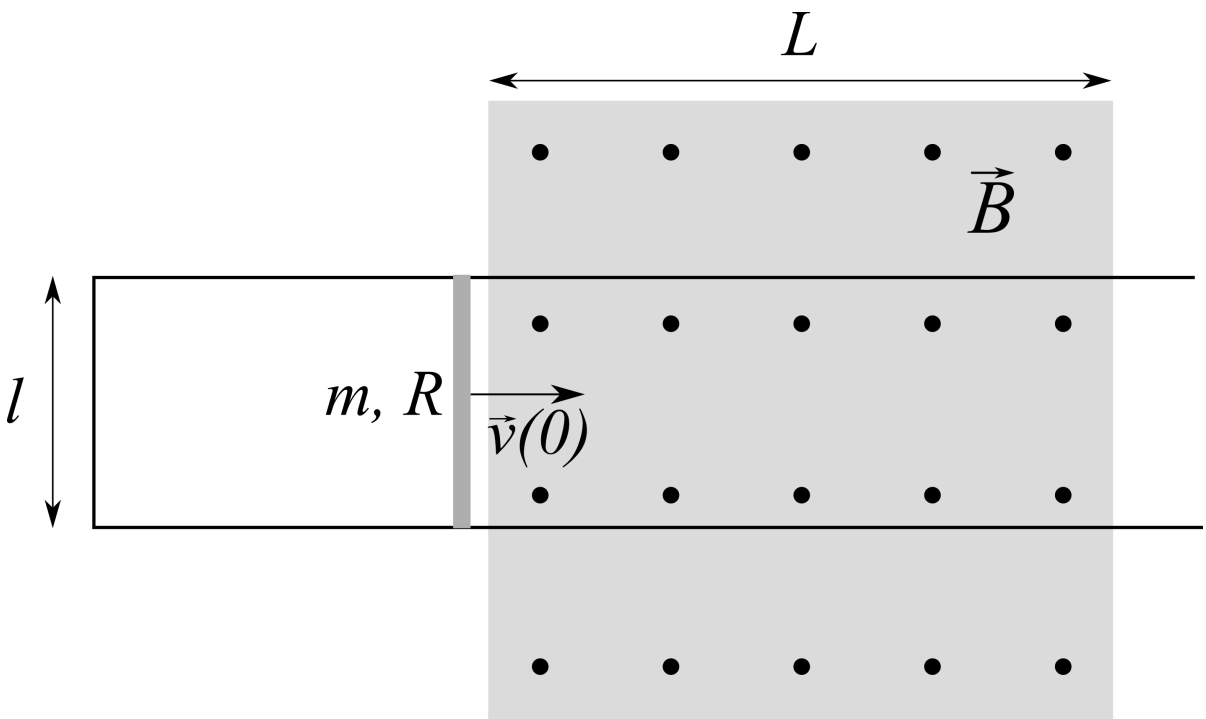
4. Abbiamo visto a lezione che la carica totale che passa in una spira per effetto dell'induzione elettromagnetica è legata alla differenza di flusso del campo:

$$q = \int_{t_1}^{t_2} dq = \int_{t_1}^{t_2} i(t)dt = -\frac{1}{R}\int_{t_1}^{t_2} d\Phi = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{R}.$$

Poiché in questo caso $\Phi_1 = \Phi_2 = 0$, dato che la spira è fuori dalla regione in cui è presente il campo magnetico sia all'inizio che alla fine del moto, $q = 0$. Questo avviene perché quando la spira entra nella regione di campo la corrente scorre in un verso, trasportando una certa quantità di carica Δq, mentre quando la spira esce la corrente scorre nel verso opporto, trasportando di nuovo Δq. La somma di questi due contributi, se teniamo conto del verso opposto, è nulla.

Esercizio 54

Testo



Una sbarretta conduttrice di massa $m = 5$ g e di lunghezza $l = 25$ cm scorre liberamente su due binari orizzontali ai quali è elettricamente connessa. I due binari sono connessi tra di loro da una resistenza $R = 15\,\Omega$. Per un tratto di lunghezza $L = 40$ cm i binari sono attraversati da un campo magnetico uniforme $B = 2.5$ T diretto verticalmente ed uscente dal foglio (vedi disegno). La sbarretta arriva al tempo $t = 0$ nella zona con campo magnetico con una velocità $v(0) = 2.5$ m/s. Determinare

1. il verso e l'intensità della corrente che fluisce nella barretta a $t = 0$;
2. la carica fluita nel circuito sbarretta-rotaie-resistenza dopo che la sbarretta è uscita dalla zona con campo magnetico;

3. la velocità di uscita della barretta;
4. la dimensione della regione di campo che si dovrebbe avere per far fermare completamente la sbarretta.

Soluzione

1. La corrente deve opporsi all'aumentare del flusso, e quindi, dovendo generare un campo opposto a B, scorrerà in verso orario. L'intensità della corrente si trova applicando la legge di Faraday, ricordando che il flusso è

$$\Phi(B) = lBx(t)$$

e quindi

$$\mathcal{E}_i(t) = -\frac{d\Phi(B)}{dt} = -lBv(t)$$

che calcolata in 0 vale $\mathcal{E}_i(0) = -lBv(0)$, da cui si ricava

$$i = \frac{lbv(0)}{R} = 0.104\,\mathrm{A}$$

2. La variazione di flusso a cui è sottoposta la spira è semplicemente

$$\Delta\Phi = \Phi_1 - \Phi_2 = -\Phi_2 = -lLB$$

e quindi la carica è data dalla legge di Felici:

$$q = \frac{\Delta\Phi}{R} = -0.017\,\mathrm{C}.$$

3. In questo caso la velocità con cui si muove la sbarretta non è costante poiché comincerà a rallentare non appena entrata nella regione di campo come conseguenza della presenza della forza di attrito elettromagnetico data da

$$F(t) = -\frac{l^2B^2}{R}v(t)$$

dove omettiamo i simboli di vettore perché forza e velocità sono sempre parallele. Ricordando che $v(t) = dx/dt$ e $a(t) = F(t)/m$ e definendo t_u come il tempo a cui la sbarrretta esce dalla regione di campo possiamo risolvere direttamente l'equazione che lega accelerazione a velocità:

$$v(t_u) = v(0) + \int_0^{t_u} a(t)dt = v(0) - \int_0^{t_u} \frac{l^2B^2}{mR}v(t)dt = v(0) - \int_0^{t_u} \frac{l^2B^2}{mR}\frac{dx}{dt}dt = v(0) - \int_0^{L} \frac{l^2B^2}{mR}dx$$

che si può risolvere immediatamente per ottenere

$$v(t) = v(0) - \frac{l^2B^2L}{mR} = 0.42\,\mathrm{m/s}$$

4. Far fermare la sbarretta significa imporre $v(t) = 0$. Sostituendo questo valore nell'equazione precedente si trova

$$L = \frac{v(0)mR}{l^2B^2} = 0.48\,m$$