ONDE ELETTROMAGNETICHE

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0 \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \qquad \vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$$

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c} \qquad \text{IDENTITÀ}$$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) = \cancel{(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})\vec{\nabla}} - (\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla})\vec{E} = -\nabla^2\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\times\vec{B}) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \nabla^2\vec{E} = \mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \\ \nabla^2\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} \end{cases}$$

EQUAZIONE DELLE ONDE

$\nabla^2 = \Delta$ LAPLACIANO

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \Rightarrow \nabla^2 = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2 E_x = \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}$$

EQUAZIONE DELLE ONDE

in una dimensione,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$, $f(x,t)$ è un'onda che si propaga **lungo** $\hat{x}$ con velocità v

$f(x,t) = f(x \pm vt)$ è soluzione

ESEMPI

$f(x,t) = x^3 + At^2$,

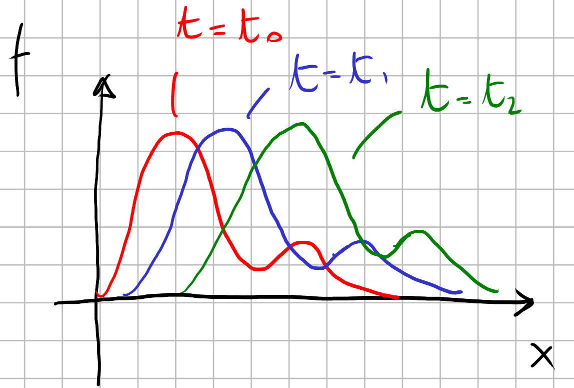
$f(x,t) = \log[(x-vt)^2] + (x-vt)$

prendiamo una f che è soluzione, scegliamo $x_0, t_0 \rightarrow f(x_0,t_0) = C$

si avrà che $f(x_1,t_1) = C$ se $x_0 - vt_0 = x_1 - vt_1 \implies$

$$x_1 = x_0 + v(t_1 - t_0) \quad \text{M.U.}$$

ONDE ARMONICHE

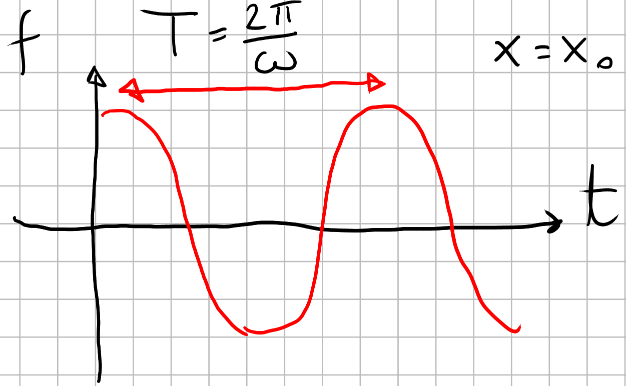


$$f(x,t) = f_0 \cos\left[k(x - vt) + \phi_0\right]$$ ONDE ARMONICHE

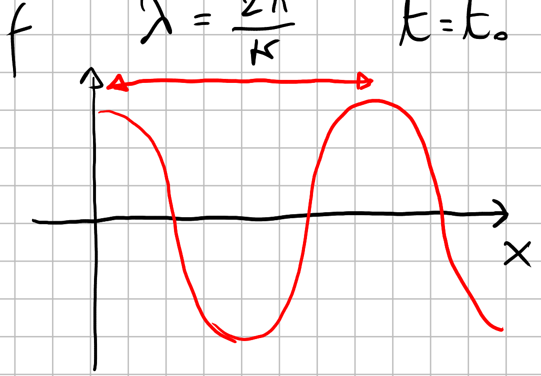
k vettore d'onda , $\omega \equiv kv$ pulsazione

$$f(x,t) = f_0 \cos\left[kx - \omega t + \phi_0\right]$$

$T = \frac{2\pi}{\omega}$ $x = x_0$



$\lambda = \frac{2\pi}{k}$ $t = t_0$



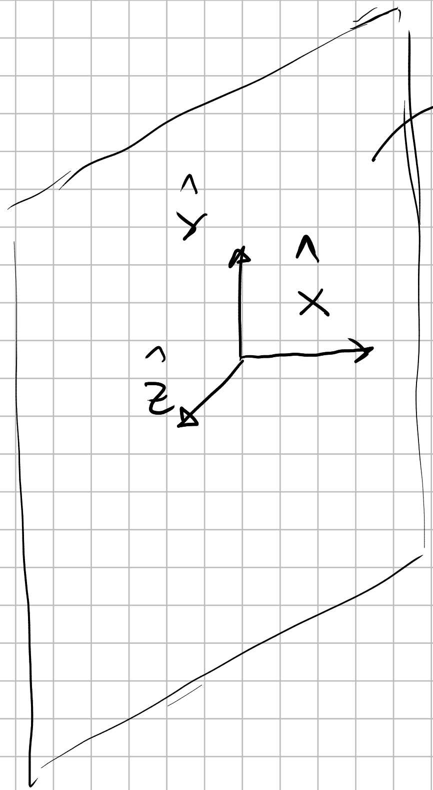
T PERIODO

λ LUNGHEZZA D'ONDA

ONDE PIANE

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$\hat{x}$ è la direzione di propagazione



fronte d'onda: su ogni punto l'onda ha lo stesso valore

$$\frac{\partial E_\alpha}{\partial y} = \frac{\partial E_\alpha}{\partial z} = 0 \qquad \alpha = x,y,z \text{, quindi } \frac{\partial E_y}{\partial y} = \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \cancel{\frac{\partial E_y}{\partial y}} + \cancel{\frac{\partial E_z}{\partial z}} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow (\vec{\nabla}\times\vec{B})_x = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial E_x}{\partial t}$$

ma stiamo considerando un'onda piana $\Rightarrow \frac{\partial B_\alpha}{\partial y} = \frac{\partial B_\alpha}{\partial z} = 0 \Rightarrow$

$$(\vec{\nabla}\times\vec{B})_x = \cancel{\frac{\partial B_y}{\partial z}} = 0 = \boxed{\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial E_x}{\partial t} = 0}$$

una possibile soluzione è:

$$\vec{E} = E_y \hat{y} + E_z \hat{z} \quad , \quad E_y = E_{y,0} \cos[kx - \omega t + \phi_y]$$
$$E_z = E_{z,0} \cos[kx - \omega t + \phi_z]$$

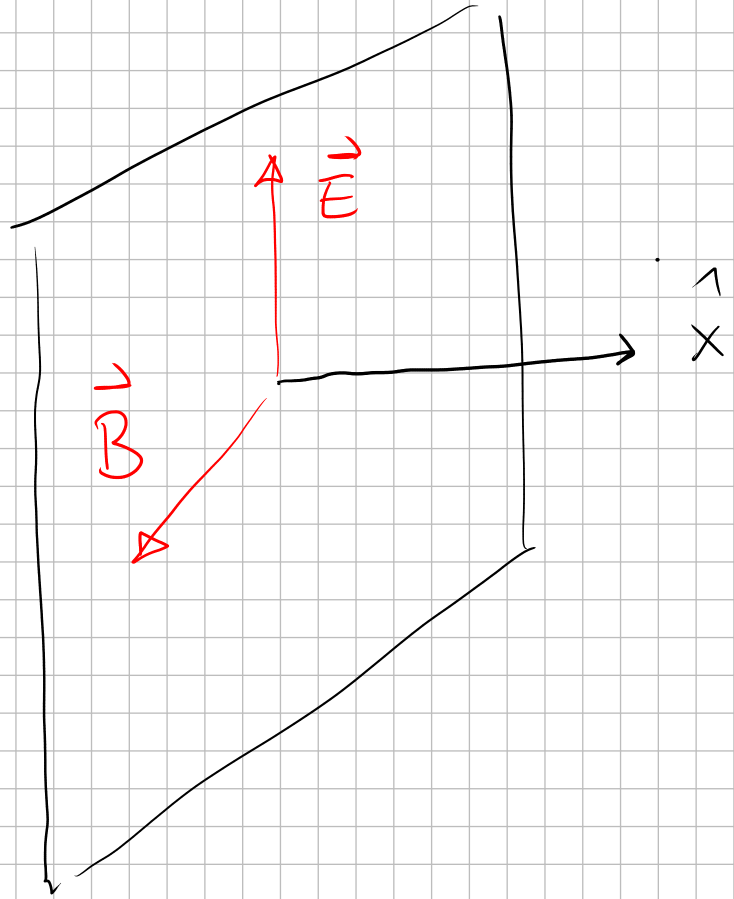
$$\vec{B} = B_y \hat{y} + B_z \hat{z} \quad , \quad B_y = B_{y,0} \cos[kx - \omega t + \phi_y]$$
$$B_z = B_{z,0} \cos[kx - \omega t + \phi_z]$$

→ DALLA EQ DI MAXWELL $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}$$

$$-k E_{z,0} \sin(kx - \omega t + \phi_z) = \omega B_{y,0} \sin(kx - \omega t + \phi_y) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} B_{y,0} = -\frac{k}{\omega} E_{z,0} = -\frac{E_{z,0}}{c} \\ B_{z,0} = \frac{E_{y,0}}{c} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\vec{E} \cdot \vec{B} = (E_y B_y + E_z B_z) = 0}$$



ONDA PIANA