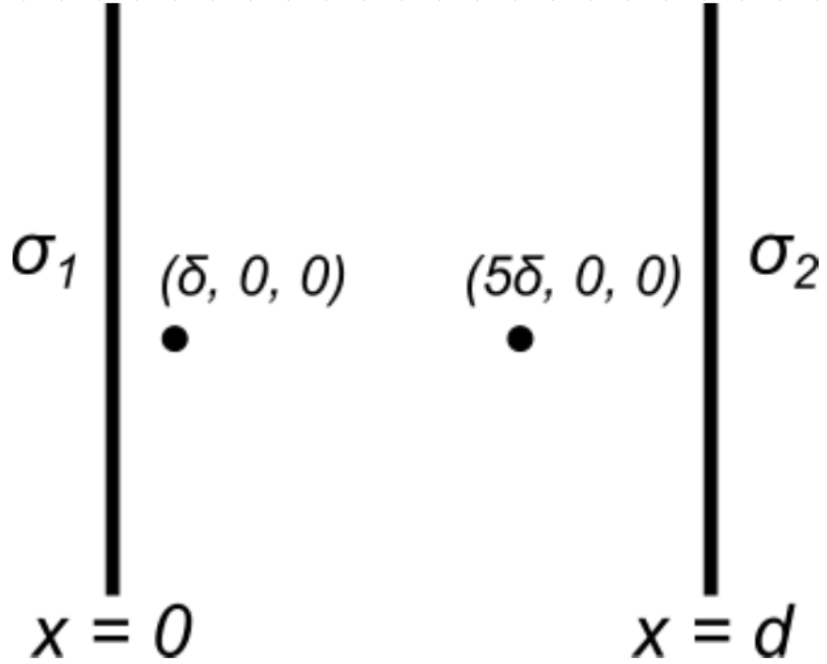
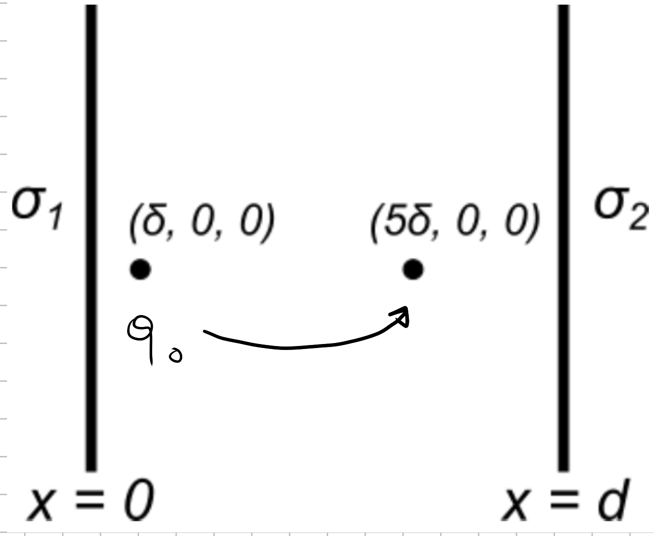
ESERCIZIO 8



Due piani indefiniti paralleli caricati con densità superficiale σ_1 e σ_2 sono posti in $x_1 = 0$ e $x_2 = d$.

1. Calcolare il lavoro che la forza elettrostatica compie per spostare una carica q_0 tra i punti $(\delta, 0, 0)$ e $(5\delta, 0, 0)$, entrambi compresi tra i due piani. Il problema si può risolvere sia utilizzando la definizione di lavoro che il legame che sussiste tra il lavoro e il potenziale.
2. Poniamo $\sigma_1 = -\sigma_2 > 0$. Al tempo $t = 0$ una carica $q_0 > 0$ si trova in $\vec{r} = (\delta, 0, 0)$ con velocità iniziale $\vec{v} = (v_{0,x}, v_{0,y}, v_{0,z})$. Calcolare il tempo t^* dopo il quale la carica tocca il secondo piano.

(1)



$$W = \int_c \vec{F} \cdot d\vec{s} = q_0 \int_c \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$\vec{E} = \frac{\boxed{\sigma_1 - \sigma_2}}{2\varepsilon_0} \hat{x} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \Rightarrow$$

$$W = q_0 \int_{\delta}^{5\delta} E \, dx = q_0 E \int_{\delta}^{5\delta} dx = q_0 E (5\delta - \delta) = q_0 4\delta E$$

$$W = 4 q_0 \delta \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\varepsilon_0} = 2 q_0 \delta \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{W = - q_0 \Delta V}$$

σ

$\hat{n}_x = -\hat{x}$ $\quad$ $\hat{n}_x = \hat{x}$

$x = 0$

$\hat{n}_x = -\hat{x}$ $\quad$ $\hat{n}_x = \hat{x}$

$x = d$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{x}} \quad , \quad \vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{n}_x$$

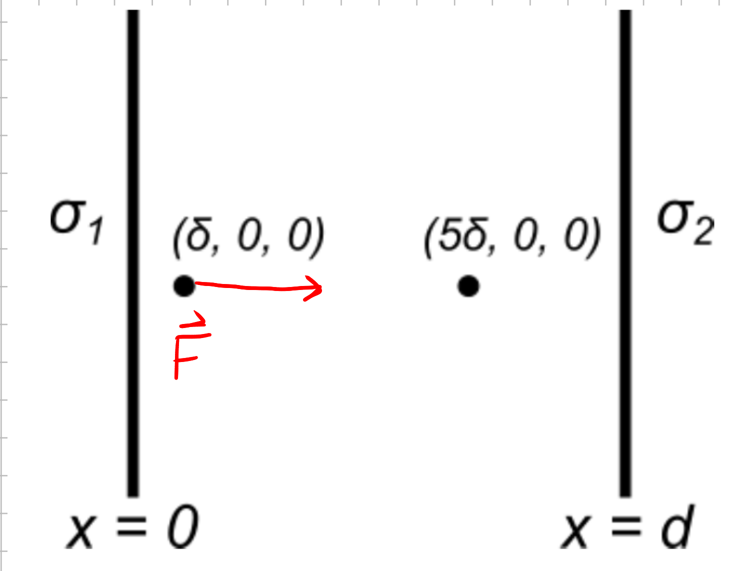
NEL NOSTRO CASO

σ_1 $\quad$ σ_2

$\hat{n}_x = \hat{x}$ $\quad$ $\hat{n}_x = -\hat{x}$

$$\vec{E}_1 = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0}\hat{x} \qquad \vec{E}_2 = -\frac{\sigma_2}{\varepsilon_0}\hat{x}$$

②



mettiamo q_0 in $(\delta, 0, 0)$ e abbiamo

$\sigma_1 = -\sigma_2 > 0$, $q_0 > 0$, $\sigma = \sigma_1 = -\sigma_2$

q_0 ha una v iniziale $\vec{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z})$

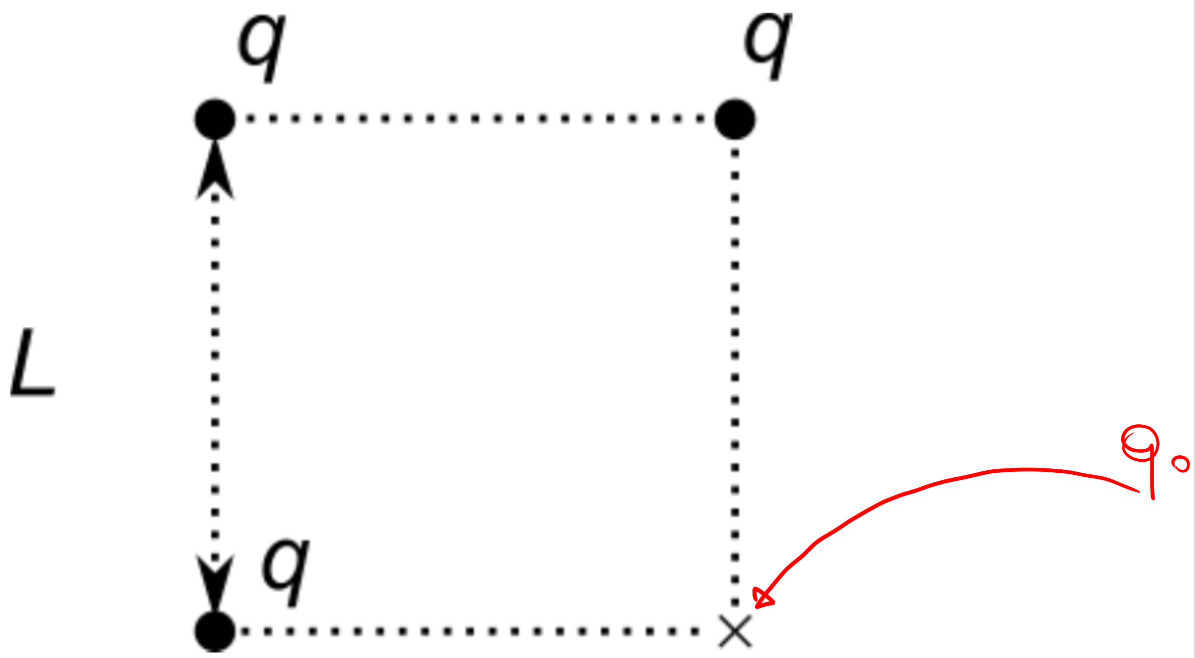
$$x(t) = \delta + v_{0x} t + \frac{1}{2} a t^2 , \quad a = \frac{F}{m} = \frac{q \boxed{E}}{m} = \frac{q}{m} \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

$$\delta + v_{0x} t + \frac{1}{2} a t^2 = d \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{2} a}_{A} t^2 + \underbrace{v_{0x}}_{B} t + \underbrace{(\delta - d)}_{C} = 0$$

$$\Rightarrow t^* = \frac{- v_{0x} \pm \sqrt{v_{0x}^2 - 2a(\delta - d)}}{a}$$

ESERCIZIO 10



Tre cariche q sono poste su tre vertici di un quadrato di lato L.

1. Qual è l'energia elettrostatica del sistema?
2. Calcolare l'espressione del lavoro W compiuto dalla forza elettrostatica qualora una carica q_0 venisse posta sul quarto vertice del quadrato. Discuterne il segno e metterlo in relazione con il lavoro compiuto dalla forza esterna per compiere questa operazione.
3. Calcolare W per $q = 2 \cdot 10^{-7}$ C, $q_0 = -10^{-8}$ C e $L = 5$ cm.

RICHIAMO SU U_e

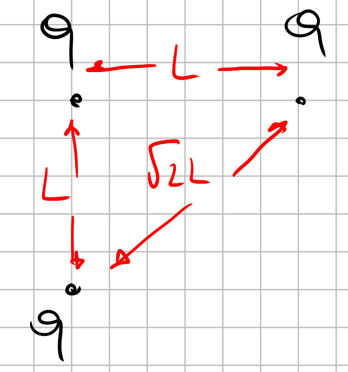
$$U_e = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j\neq i}\frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}} = \sum_{i>j}\frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}} \quad , \quad W = -\Delta U_e = -q\Delta V$$

una volta trovato W, discuterne il segno in rapporto ai segni di q e q_0

SOLUZIONE

$$U_e^i = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 L} + \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 L} + \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{2} L} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 L}\left(2+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) > 0$$

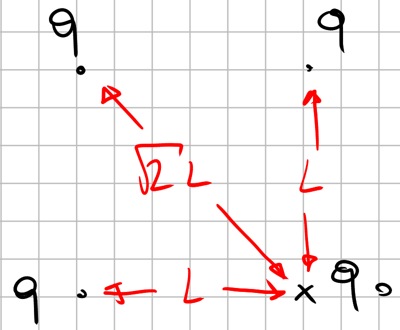
$$\boxed{W = -\Delta U_e}\ , \quad \Delta U_e = U_e^f - U_e^i\ , \quad U_e^f = U_e^i + \frac{q q_0}{4\pi\varepsilon_0 L}\left(2+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow$$



$$\Delta U_e = \frac{q q_0}{4\pi\varepsilon_0 L}\left(2+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

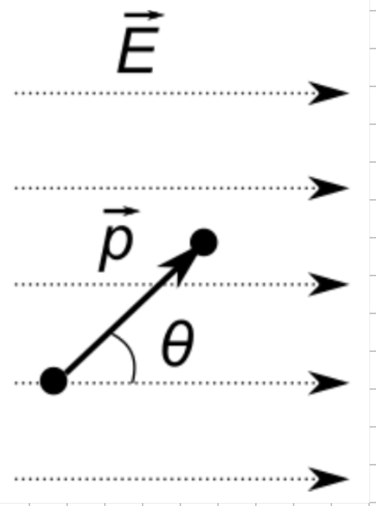
$$\Downarrow$$

$$\boxed{W = -\frac{q q_0}{4\pi\varepsilon_0 L}\left(2+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}\ , \quad W_{ext} = -W$$



ESERCIZIO 11

1.



ω quando $\theta = 0$?

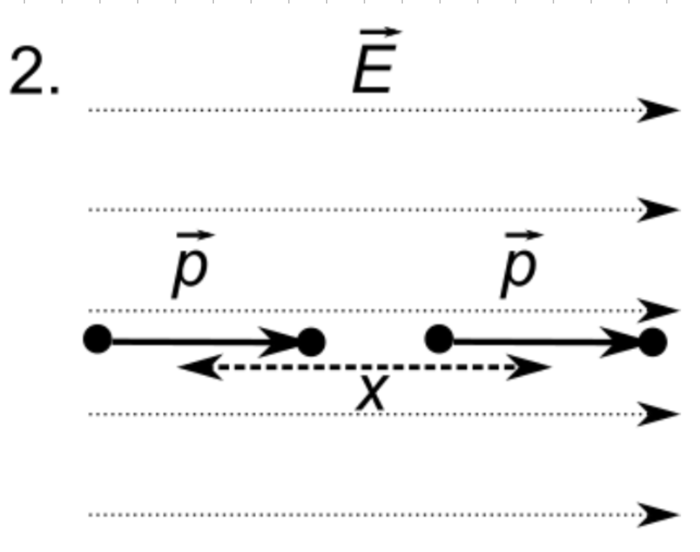
I noto, $\boxed{U_k = \frac{1}{2} I \omega^2 , \quad U_e = -\vec{p} \cdot \vec{E}}$

$U^i = -pE\cos\theta$, $U^f = -pE + \frac{1}{2} I \omega^2$

per conservazione dell'energia $U^f = U^i \Rightarrow$

$$-pE\cos\theta = -pE + \frac{1}{2} I \omega^2 \Rightarrow \frac{1}{2} I \omega^2 = pE(1-\cos\theta) \Rightarrow$$

$$\omega^2 = \frac{2pE(1-\cos\theta)}{I} \Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{2pE(1-\cos\theta)}{I}}}$$



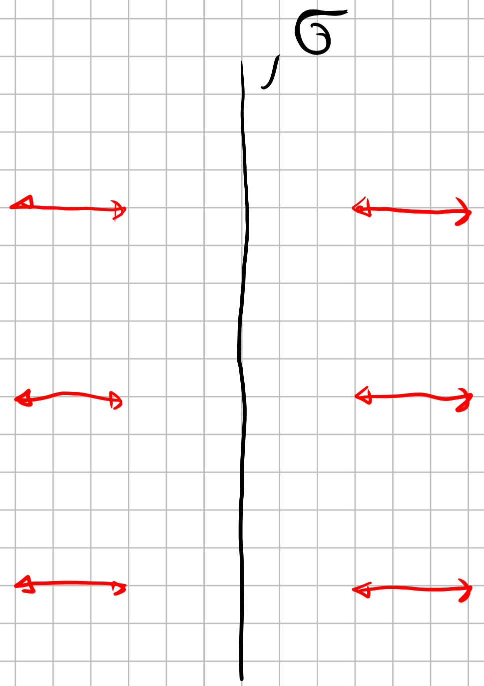
due dipoli fissi, stesso $\vec{p}$ posti a distanza x
e immersi in un campo $\vec{E}$
Qual è l'energia potenziale del dipolo di destra?

$$U_e = -\vec{p}\cdot\vec{E}_{TOT} \,, \quad \vec{E}_{TOT} = \vec{E} + \vec{E}_d \,, \quad \vec{E}_d = \frac{\vec{p}}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x^3} \Rightarrow$$

$$U_e = -\vec{p}\cdot\vec{E} - \vec{p}\cdot\frac{\vec{p}}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x^3} = -pE - \frac{p^2}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x^3}$$

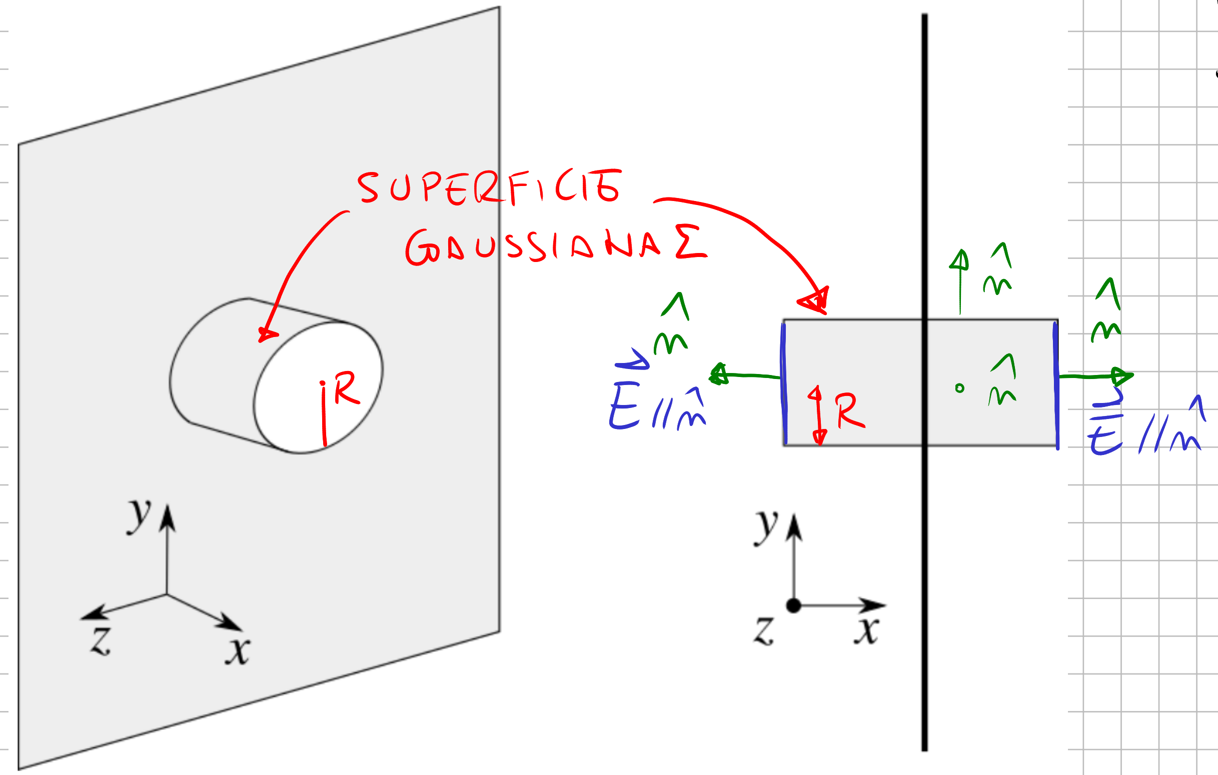
ESERCIZIO 12

Utilizzare il teorema di Gauss per calcolare il campo elettrostatico generato da un piano indefinito caricato uniformemente con densità superficiale di carica σ.



$E = ?$

Per questioni di simmetria $\vec{E}$ è ortogonale al piano



$$\int_\Sigma \vec{E}\cdot\hat{n}\, d\Sigma = \int_{BASE\,1} (\ ) + \int_{BASE\,2} (\ ) + \int_{\substack{SUP.\\ LATERALE}} \cancel{(\ )}^{\,0} = \quad \text{perché } \hat{n} \perp \vec{E}$$

$$= \int_{BASE\,1} \vec{E}\cdot\hat{n}\, d\Sigma + \int_{BASE\,2} \vec{E}\cdot\hat{n}\, d\Sigma =$$

$$= \int_{BASE\,1} E\, d\Sigma + \int_{BASE\,2} E\, d\Sigma =$$

$$= E\int_{BASE\,1} d\Sigma + E\int_{BASE\,2} d\Sigma =$$

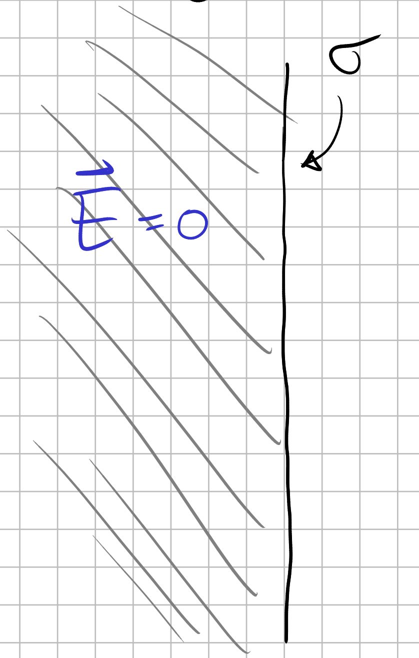
$$= E\pi R^2 + E\pi R^2 = 2\pi R^2 E$$

$$Q_{INT} = \sigma\pi R^2 \Rightarrow 2\pi R^2 E \overset{GAUSS}{=} \frac{Q_{INT}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma\pi R^2}{\varepsilon_0} \Rightarrow$$

$$E = \frac{\sigma\cancel{\pi R^2}}{\varepsilon_0}\,\frac{1}{2\cancel{\pi R^2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

SUGGERIMENTO PER CASA:

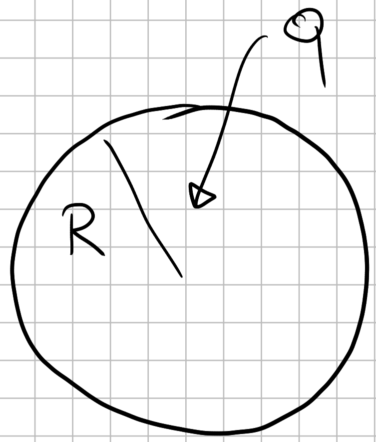
calcolare il campo generato da un piano <u>conduttore</u> carico con σ



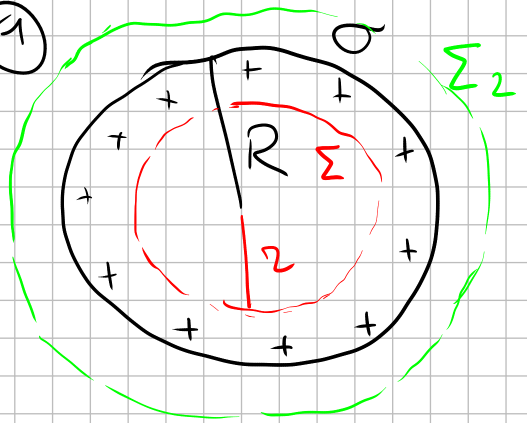
ESERCIZIO 13

Calcolare (e disegnare) il campo elettrostatico generato in *tutto* lo spazio da una sfera di raggio R caricata con carica q distribuita

1. con densità superficiale di carica σ;
2. uniformemente con densità di carica ρ;
3. con densità di carica $\rho(r) = Ar^2$.



(1)



$$\int_\Sigma \vec{E}\cdot\hat{n}\,d\Sigma = E\int_\Sigma d\Sigma = E\,4\pi r^2 \,, \quad Q_{INT} = 0 \Rightarrow$$

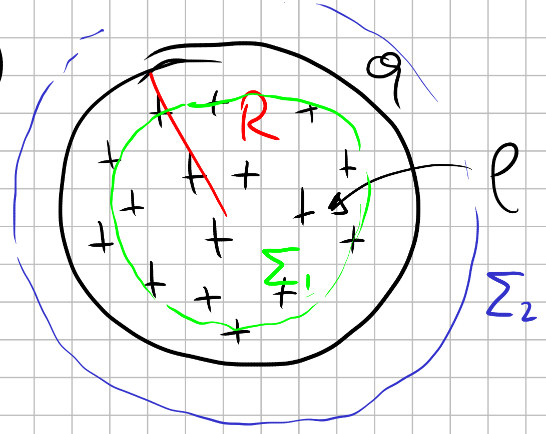
GAUSS

$$E\,4\pi r^2 = 0 \Rightarrow E = 0 \quad \text{per } r < R$$

$$\Phi_{\Sigma_2}(\vec{E}) = E\,4\pi r^2 \,, \quad Q_{INT} = q = \sigma\,4\pi R^2 \Rightarrow$$

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2} \qquad r \geq R$$

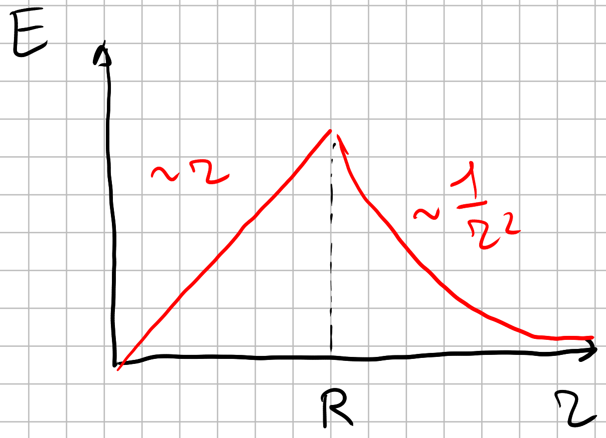
(2)



$$\Phi_{\Sigma_1}(\vec{E}) = E\,4\pi r^2 \,, \quad Q_{INT} = \int_{\tau(\Sigma)} \rho\, d\tau = \rho \int_{\tau(\Sigma)} d\tau = \rho\,\frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow$$

$$E\,4\pi r^2 \overset{\text{GAUSS}}{=} \frac{Q_{INT}}{\varepsilon_0} = \frac{4}{3}\frac{\pi r^3 \rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\cancel{4}}{3}\frac{\cancel{\pi} r^{\cancel{3}}\rho}{\varepsilon_0}\,\frac{1}{\cancel{4\pi r^2}} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}}$$

per $r < R$



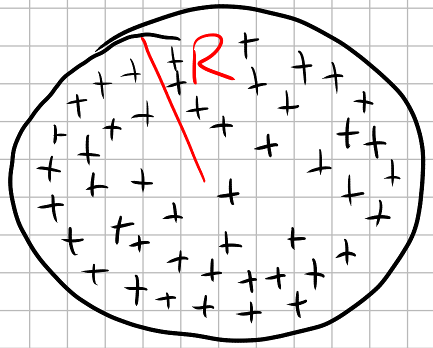
per $r \geq R$, $Q_{INT} = q = \rho\,\frac{4}{3}\pi \boxed{R}^3 \rightarrow R \neq r$

$$\Rightarrow E\,4\pi r^2 \overset{\text{GAUSS}}{=} \frac{Q_{INT}}{\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow$$

$$\boxed{E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}}$$

per $r \geq R$

ESERCIZIO PER CASA: SVOLGERE IL III PUNTO

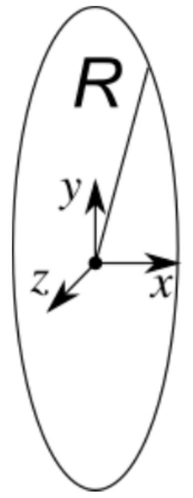


$\rho(r) = A r^2$ (A costante, da calcolare)

$$Q_{INT} = \int_{\tau(\Sigma)} \rho \, d\tau = \int_{\tau} \rho(r) 4\pi r^2 \, dr$$

come si calcola A? $Q_{INT} = q$ quando $r = R$

ESERCIZIO 14 DA FARE A CASA



1. Calcolare il potenziale elettrostatico generato da una carica q uniformemente distribuita su di un anello sottile di raggio R in un generico punto $\vec{P} = (x_0, 0, 0)$ del suo asse.
2. Verificare che l'espressione di E_x calcolata a partire dal potenziale coincide con quella calcolata esplicitamente.