DEF $E \subseteq \mathbb{R}$ limitato superiormente (inferiormente), si definisce

$$\sup E = \text{il più piccolo dei maggioranti di } E = \min\{M \in \mathbb{R} : M \text{ è maggiorante di } E\}$$

$$\inf E = \max\{\text{minoranti di } E\}$$

Esempio $E = [0,1) = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 1\}$

Cerchiamo i maggioranti di E. 1 è un maggiorante ($1 \geq x \ \forall x \in E$)
Tutti i numeri ≥ 1 sono anch'essi maggioranti
Sia $M < 1$. E' maggiorante? vediamo
se $M < 0$ non maggiora nessun elemento di E
se $0 \leq M < 1$, prendiamo la media $\bar{x} = \frac{M+1}{2}$

Allora $0 \leq M < \bar{x} < 1$. Quindi $\bar{x} \in E$, e $\bar{x} > M$.

$M < \frac{M+1}{2} \iff M < 1$ $\qquad$ $\frac{M+1}{2} < 1 \iff M < 1$

se $M < 1$, M non è maggiorante di E

$\{\text{maggioranti di } E\} = [1, +\infty)$

$$\Rightarrow \sup E = \min\{\text{maggioranti di } E\} = \min[1,+\infty) = 1.$$

$\inf E = \inf[0,1)$

$\{\text{minoranti di } E\} = (-\infty, 0] \Rightarrow \inf E = \max\{\text{minoranti}\} = \max(-\infty, 0] = 0.$

Anzi, in questo caso è più facile
$0 = \min[0,1) = \inf[0,1)$.

TEOREMA Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ limitato sup. $\Rightarrow \exists \sup E \in \mathbb{R}$
Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ " inf. $\Rightarrow \exists \inf E \in \mathbb{R}$

Se E non è limitato superiormente, porremo $\sup E = +\infty$
" E " " " inferiormente, porremo $\inf E = -\infty$.

$+\infty$ e $-\infty$ sono dei simboli t.c.

$$-\infty < a < +\infty \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

Retta reale estesa $\quad \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

$\pm\infty$ non sono numeri.

Esempio:

$$E = \left\{ x = \frac{2n-1}{n} \;, \; n = 1, 2, 3 \dots \right\} = \left\{ 1, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \dots \right\}$$

$$\frac{2n-1}{n} = 2 - \frac{1}{n}$$

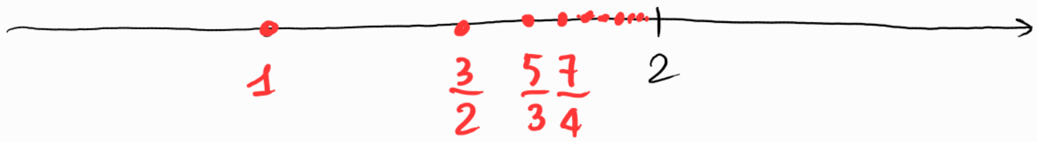
2 è un maggiorante di E ?

$$2 \overset{?}{\geq} x \quad \forall x \in E$$

$$\cancel{2} \overset{?}{\geq} \cancel{2} - \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}_+$$

vero!

2 non è un massimo.



Congettura $\quad \sup E = 2$.

Abbiamo visto che 2 è un maggiorante.

Per dim. che 2 è **il più piccolo** dei maggioranti, mostrerò che ogni numero più piccolo di 2 **non è maggiorante**.

Devo provare che ogni numero della forma $2-\varepsilon$, con $\varepsilon > 0$, non è maggiorante di E.

Devo provare che $\quad \forall \varepsilon > 0 \quad 2-\varepsilon$ non è maggiorante di E

cioè $\quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in E$ t.c. $x > 2-\varepsilon$

cioè $\quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N}_+$ t.c. $\cancel{2} - \frac{1}{n} > \cancel{2} - \varepsilon$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{1}{n} < \varepsilon$$
$$\Updownarrow$$
$$n > \frac{1}{\varepsilon}$$
si può fare.

$\Rightarrow$ 2 è il più piccolo dei maggioranti $\to$ $2 = \sup E$.

inf E? Dall'esame dei primi termini sembra che $1 = \min E$.

$$1 \leq 2 - \frac{1}{n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}_+$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{1}{n} \leq 1 \iff n \geq 1 \qquad \text{OK!}$$

$\inf E = \min E = 1$.

CARATTERIZZAZIONE DEL SUP

Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto e limitato superiormente.

Si ha $\sup E = \lambda$ se e solo se:

1) $\lambda \geq x \quad \forall x \in E$ (cioè: λ è un maggiorante di E)
2) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \underset{x_\varepsilon}{\overset{\parallel}{x}} \in E$ t.c. $x > \lambda - \varepsilon$

(cioè: $\forall \varepsilon > 0$ $\lambda - \varepsilon$ non è un maggiorante di E quindi non ci sono maggioranti più piccoli)

CARATTERIZZAZIONE DELL'INF

Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto e limitato inferiormente.

Si ha $\inf E = \lambda$ se e solo se:

1) $\lambda \leq x \quad \forall x \in E$ (cioè: λ è un minorante di E)
2) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \underset{x_\varepsilon}{\overset{\parallel}{x}} \in E$ t.c. $x < \lambda + \varepsilon$

(cioè ogni numero $\lambda + \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$ non è minorante)

Esercizio

$E = \left\{ x = \frac{5}{n^2} : n \in \mathbb{N}_+ \right\} = \left\{ 5, \frac{5}{4}, \frac{5}{9}, \frac{5}{16}, \frac{5}{25}, \dots \right\}$

Si intuisce che $\sup E = \max E = 5$. Verifichiamolo con la caratterizz.

1) $5 \geq x \quad \forall x \in E$

$$5 \geq \frac{5}{n^2} \quad \forall n \in \mathbb{N}_+$$
$$\Updownarrow$$
$$n^2 \geq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}_+$$

OK

2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in E \quad$ t.c. $\quad x > 5 - \varepsilon$.

Vero, basta prendere $x = 5 \in E \qquad 5 > 5 - \varepsilon$

$\inf E =$ (congettura) $= 0$

1) $0 \leq \frac{5}{n^2} \quad \forall n \in \mathbb{N}_+$? ok

2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in E \quad$ t.c. $\quad x < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N}_+ \quad$ t.c. $\quad \frac{5}{n^2} < \varepsilon$

$$\Updownarrow$$
$$n^2 > \frac{5}{\varepsilon}$$
$$\Updownarrow \; n \in \mathbb{N}$$

basta prendere $n > \sqrt{\frac{5}{\varepsilon}}$ ok!

$\left.\begin{matrix} 1) \\ 2) \end{matrix}\right| \Longrightarrow \inf E = 0$

se avessi provato con $\lambda = 0{,}02$ la 1) fallisce, ma non la 2)

se avessi provato con $\lambda = -0{,}02$ la 2) fallisce, ma non la 1).

Proprietà di inf e sup.

1) se $E \subseteq F \subseteq \mathbb{R}$, allora

1a) $\sup E \leq \sup F$

1b) $\inf E \geq \inf F$

monotonia di sup e inf.

Dim. la 1a) se $\sup F = +\infty$ la dis. è ovvia.

supponiamo $\sup F < +\infty \Rightarrow F$ limitato superiormente

$\sup F$ è un maggiorante di F. $\underset{\text{inclusione}}{\Longrightarrow}$ $\sup F$ è un maggiorante di E

Poiché $\sup E$ è il più piccolo dei maggioranti di E

$\Rightarrow \sup E \leq \sup F$.

---

2)

$E, F \subseteq \mathbb{R}$. $\qquad E \cup F = \{x : (x \in E) \vee (x \in F)\}$

$$\sup(E \cup F) = \max\{\sup E, \sup F\}$$

$$\inf(E \cup F) = \min\{\inf E, \inf F\}$$

ESERCIZIO

$$E = \left\{x = (-1)^n \frac{6n^3 - 3}{n^3}, \ n \in \mathbb{N}^+\right\} =$$

$$= \left\{x = (-1)^n \left(6 - \frac{3}{n^3}\right), \ n \in \mathbb{N}^+\right\}$$

$$= \left\{-3, \frac{45}{8}, -\frac{53}{9}, \dots \right\}$$

Scrivo $E = E_1 \cup E_2$

termini di indice pari.

Termini di indice n dispari

$$E_1 = \left\{x = -\left(6 - \frac{3}{n^3}\right), \ n \text{ dispari}\right\}$$

$$E_2 = \left\{x = 6 - \frac{3}{n^3} \quad n \text{ pari} > 0\right\}$$

$$\Rightarrow \sup E_2 = 6 \quad , \quad \inf E_2 = \frac{45}{8}$$

$$\sup E_1 = -3 \quad , \quad \inf E_1 = -6 .$$

$$\sup E = \sup(E_1 \cup E_2) = \max\{6, -3\} = 6$$

$$\inf E = \inf(E_1 \cup E_2) = \min\left\{\frac{45}{8}, -6\right\} = -6 .$$