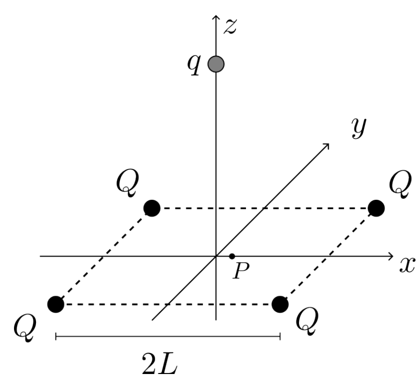
Prova scritta di Fisica II - Secondo e Terzo Canale - 12 Settembre 2023

Nome ______________________ Cognome ______________________

Matricola ______________________ Orale in questo appello ☐ Ritirato/a ☐

<u>Nota Bene:</u> Il formulario vuole essere un supporto qualora non ricordiate alcune formule e non abbiate tempo per ricavarle. Tenete presente che il solo scrivere la formula giusta trovata nel formulario per rispondere ad una domanda **non** porta ad avere alcun punteggio in quella domanda. Si ricorda anche che tutte le risposte vanno correttamente motivate, la sola risposta numerica non è sufficiente per avere punti relativi alla domanda in questione.

Primo Esercizio



Quattro particelle con carica $Q = e$ sono fissate ai vertici di un quadrato di lato $2L$, $L = 1\,\mathrm{mm}$. Una particella di prova, con carica $q = e$, è libera di muoversi lungo l'asse z passante per il centro del quadrato.

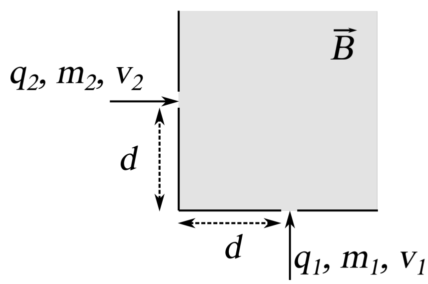
1. Determinare la forza di Coulomb agente sulla particella di prova in funzione della coordinata z lungo l'asse. In quale punto è minima? **(6 punti)** In quale punto è massima? **(Bonus 1 punto)**

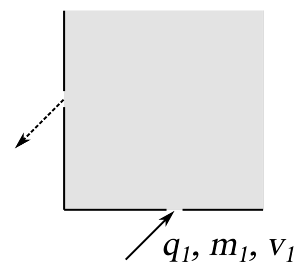
2. Determinare il lavoro necessario per trasportare la carica di prova da un punto all'infinito fino al centro del quadrato. **(6 punti)**

3. Supponiamo di posizionare la carica di prova in un punto P lungo l'asse x, molto vicino al centro del quadrato. Al tempo $t = 0$ la carica di prova viene lasciata libera di muoversi. Che succede? Descrivere qualitativamente la traiettoria della particella. **(4 punti)**

Secondo Esercizio

Una zona in cui è presente un campo magnetico uniforme e costante $\vec{B}$ è delimitata da due pareti poste ortogonalmente l'una rispetto all'altra. Su ogni parete è stato praticato un foro; i fori si trovano a distanza $d = 10$ cm dall'angolo che congiunge le pareti (vedi figura di sinistra). Da ogni foro entra, perpendicolarmente alla parete, un fascio di particelle che riesce dalla zona di campo tramite il foro posto sull'altra parete. Tutte le particelle hanno massa $m = 0.5 \times 10^{-13}$ Kg, mentre si ha che $q_1 = 10^{-9}$ C, $v_1 = 2 \times 10^3$ m/s e $v_2 = 2v_1$.





1. Determinare il valore di q_2 e verso e intensità di $\vec{B}$ **(6 punti)**.

2. Determinare il tempo trascorso nella regione di campo dai due fasci di particelle **(5 punti)**.

3. La direzione di entrata del fascio 1 viene deviata in modo da formare un angolo con la parete (vedi figura di destra). Che modulo B' deve avere il campo magnetico per far sì che il fascio esca dal foro presente sull'altra parete con la direzione opposta rispetto a quella di entrata (vedi vettore tratteggiato) **(5 punti)**?

Soluzione del primo esercizio

1. Per simmetria, la forza totale agente sulla particella è diretta lungo l'asse z, ed è la somma di quattro contributi identici dovuti a ciascuna delle quattro cariche. Verifichiamo queste asserzioni.

Nel sistema di coordinate in figura le cariche sono situate ai quattro vertici del quadrato in $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \vec{r}_4 \equiv (L, L, 0), (L, -L, 0), (-L, L, 0), (-L, -L, 0)$. La carica di prova è situata in $\vec{r} = (0, 0, z)$. Il campo elettrico totale è:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{4} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}$$

La distanza al denominatore è uguale per tutte e quattro le cariche, $|\vec{r} - \vec{r}_i| = \sqrt{2L^2 + z^2}$, e può essere portata fuori dalla sommatoria. La somma vettoriale al numeratore restituisce $4\vec{r} = 4z\hat{z}$. Dunque:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{e}{\pi\epsilon_0} \frac{z}{(2L^2 + z^2)^{3/2}} \hat{z}$$

La forza di Coulomb $\vec{F} = q\vec{E}$ è diretta lungo $\hat{z}$ e ha intensità:

$$F(z) = \frac{e^2}{\pi\epsilon_0} \frac{z}{(2L^2 + z^2)^{3/2}}$$

Il suo valore minimo è $F = 0$ in $z = 0$, il suo valore massimo invece avviene se

$$\frac{dF}{dz} = 0\,.$$

Abbiamo:

$$\frac{d}{dz} \frac{z}{(2L^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{1}{(2L^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{3z^2}{(2L^2 + z^2)^{5/2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad 3z^2 = 2L^2 + z^2 \quad \Rightarrow \quad z = L\,.$$

2. Abbiamo due modi per calcolare il lavoro W: possiamo integrare la forza per lo spostamento, o calcolare la differenza del potenziale generato dalle quattro cariche: $W = q[V(\vec{0}) - V(\infty)]$. Scegliamo il secondo metodo. Il potenziale all'infinito è zero per convenzione, dunque dobbiamo solo calcolare il potenziale all'origine. Questo è dato da:

$$V(\vec{0}) = \frac{Q}{\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{2}L}$$

Dunque il lavoro necessario è:

$$W = qV(\vec{0}) = \frac{qQ}{\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{2}L} = \frac{e^2}{\sqrt{2}\pi\epsilon_0 L} \approx 6.52 \cdot 10^{-25}\,\mathrm{J} \approx 4.07 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{eV}.$$

3. Se la carica prova viene impercettibilmente vicino al centro, spostata lungo l'asse x, subirà una forza leggermente maggiore dalle cariche con x positivo, a cui si è avvicinata, rispetto a quelle con x negativo, da cui si è allontanata. La forza totale respinge q verso il centro. Superato il centro per inerzia, la stessa cosa avviene dal lato opposto. Dunque la carica percorrerà un moto oscillatorio attorno al centro.

Soluzione del secondo esercizio

1. Dato che $q_1 > 0$ e le particelle di tipo 1 vengono deviate verso sinistra, il campo magnetico deve essere diretto verso il foglio. Inoltre, poiché le particelle entrano ortogonalmente alle pareti e i fori sono equidistanziati, i raggi di curvatura delle due traiettorie sono proprio uguali a d. Si ha quindi

$$d = \frac{mv_1}{q_1 B} = \frac{mv_2}{q_2 B}.$$

Possiamo prima di tutto ricavarci B, che vale

$$B = \frac{mv_1}{q_1 d} = 1\,\mathrm{T}.$$

Inoltre, poiché $v_2 = 2v_1$ si trova

$$q_2 = \frac{mv_2}{dB} = 2\frac{mv_1}{dB} = 2q_1 = 2 \times 10^{-9}\,\mathrm{C}.$$

2. Entrambi i fasci di particelle compiono una traiettoria che sottende un angolo di $\theta = \pi/2$. Nel moto circolare uniforme la velocità angolare vale $\omega = qB/m$ e quindi si trova

$$t_1 = \frac{\theta}{\omega_1} = \frac{\pi m}{2q_1 B} = 7.85 \times 10^{-5}\,\mathrm{s}$$

$$t_2 = \frac{\theta}{\omega_2} = \frac{\pi m}{2q_2 B} = \frac{t_1}{2} = 3.93 \times 10^{-5}\,\mathrm{s}$$

3. Poiché in questo caso la velocità di entrata e quella di uscita hanno la stessa direzione ma verso opposto, la particella deve percorrere una traiettoria circolare che sottende un angolo $\alpha = \pi$, cioè una semi-circonferenza di diametro pari alla distanza tra i due fori, che vale

$$2R' = \sqrt{2d^2} = \sqrt{2}d\,.$$

Utilizzando la legge che lega il raggio al modulo del campo si trova

$$B' = \frac{mv_1}{q_1 R'} = \frac{2mv_1}{\sqrt{2}q_1 d} = \sqrt{2}B = 1.41\,\mathrm{T}$$