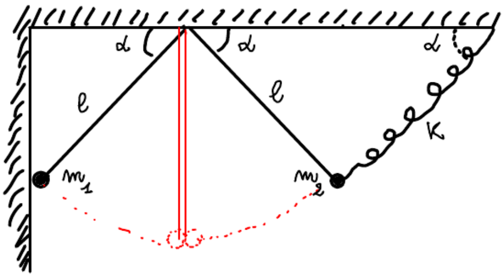
Esonero del corso di Fisica per Scienze biologiche

Proff. M.G. Betti, M. De Luca, G. De Gasperis, L. Graziani, R. Maoli – 16 giugno 2023

Esercizio 1

Due pendoli composti da masse identiche $m_1 = m_2 = 750$ g e funi ideali di lunghezza $l = 1.80$ m sono tenuti in equilibrio come in figura. In particolare, m_1 è tenuta da un vincolo alla parete verticale mentre m_2 è tenuta in equilibrio da una molla di costante elastica k incognita e lunghezza a riposo $l_0 = l/2$, inclinata di un angolo $\alpha = 30.0°$ come in figura. Calcolare:



a) il valore della costante elastica k necessario a tenere le masse in equilibrio nella configurazione in figura e il modulo della tensione della fune su m_2.

A un istante successivo la molla si rompe e il vincolo al muro viene rilasciato in contemporanea alla rottura. Calcolare:
b) modulo, direzione e verso delle velocità delle due palline subito prima dell'urto;
c) qual è il valore della tensione delle loro corde subito prima dell'urto.

Esercizio 2

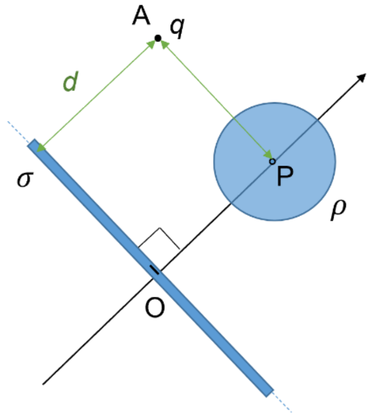
Dieci moli di gas perfetto monoatomico alla temperatura ambiente di 300 K e alla pressione atmosferica sono contenute in un recipiente cilindrico chiuso da un pistone che scorre senza attrito. Il recipiente viene appoggiato su di un blocco di metallo di massa m=0.35 Kg e di calore specifico c=400 J/Kg K alla temperatura di T_{met}=950K. Il pistone e le pareti laterali del cilindro sono isolati dall'esterno mentre la base conduce il calore. Se trascuriamo qualsiasi scambio di calore con l'esterno e la capacità termica del recipiente e se il pistone è libero di muoversi calcolare:

a) la temperatura finale di equilibrio
b) il lavoro compiuto dal gas e la variazione di energia interna
c) se il pistone non fosse stato mobile la temperatura di equilibrio in questo caso, discutendo le ragioni della differenza nella temperatura ottenuta rispetto al caso precedente.

Esercizio 3

Un sistema di cariche è costituito da una sfera uniformemente carica non conduttrice di raggio R= 4.0 cm con densità di carica volumica $\rho = 9.00 \cdot 10^{-3}$ C/m^3 centrata nel punto P in figura e da una lamina piana infinitamente estesa e uniformemente carica passante per il punto O e disposta perpendicolarmente all'asse che congiunge i punti O e P. Il punto P è posto a distanza *d*= 10.0 cm sia dal punto A in figura che da O.

a) Calcolare la differenza di potenziale elettrostatico totale generata dal sistema sfera e lamina tra i punti A e P, ovvero $V_P - V_A$.



Si ponga ora una particella di massa *m* e carica $q = 1.50 \cdot 10^{-7}$ C ferma nel punto A. Si noti che la forza gravitazionale non è trascurabile.

b) Calcolare segno e valore della densità di carica della lamina σ tale che la particella di massa *m* in A non si muova lungo l'asse orizzontale in figura.
c) Calcolare la massa *m* della particella tale che essa non si possa muovere neanche lungo l'asse verticale della figura.

Soluzione 1

a) Poiché il triangolo fra fune e molla è isoscele la lunghezza della molla sarà l e quindi essa è allungata di l/2 e esercita una forza diretta verso l'alto lungo la sua diagonale. Chiamiamo T la tensione della fune e P = m_2g la forza peso a cui è soggetta m_2. Consideriamo un sistema di assi cartesiani ortogonale xoy in cui $\hat{x}$ orientato da sx a dx e parallelo al suolo mentre $\hat{y}$ è perpendicolare al suolo orientato verso l'alto. Rispetto a tale sistema avremo lungo i due versori:

$$\hat{x}: K\, l/2\, cos(30) - Tcos(30) = 0\ ;\ \hat{y}: kl/2\, sin(30) + Tsin(30) - m_2 g = 0$$

da cui si ricava:

$$K = m_2\, g/(lsin(30)) = 8.17\, N/m\ ;\ T = K\, l/2 = 7.35\, N$$

b) La velocità di urto delle palline è derivata dalla conservazione dell'energia totale prima dell'urto. La quota iniziale l-l sin(30) corrisponde ad un potenziale di m_2 pari a $E_p = m_2 g(l - lsin(30))$ che si converte in energia cinetica e potenziale alla quota 0:

$$1/2\, m_2 v^2 + m_2 g(0) = m_2 g(l - lsin(30))$$

da cui:

$$v = \sqrt{(2gl(1 - sin(30)))} = 4.20\, m/s$$

con vettore $-v\hat{x}$.

Per ragioni di simmetria la velocità della pallina 1 è identica in modulo, con verso opposto e parallela al suolo.

c) La tensione della fune prima dell'urto è tale che, in un sistema in rotazione col pendolo, deve bilanciare istantaneamente la forza peso e la forza centrifuga:

$$T = m_2 g + m_2\, v^2/l = 14.7N$$

La tensione è la stessa per le due palline.

Soluzione 2

Il blocco metallico cede calore al gas finché raggiungono l'equilibrio termico alla temperatura finale Tf

$m\, c\, (T_f - T_i) + C_{gas}\, (T_f - T_i) = 0$

dove $C_{gas} = nc_p = n\, 5/2\, R = 208$ J/K

in quanto il pistone è libero di muoversi e la trasformazione è isobara

$T_f = 562$ K

Il lavoro compiuto dal gas in una trasformazione isobara sarà

$L = p\, (V_f - V_i) = nR\, (T_f - T_i) = 21.8 \times 10^3$ J, positivo come atteso.

La variazione di energia interna sarà $nc_v (T_f - T_i) = 32.8 \times 10^3$ J, che si poteva trovare anche come Q_{gas}-L.

Nel caso in cui il pistone fosse stato fisso, il calore ceduto dalla base metallica sarebbe andato ad aumentare solo l'energia interna del gas in quanto il lavoro sarebbe stato nullo, risultando quindi in una temperatura di equilibrio maggiore che si puo' calcolare ancora considerando il bilancio del calore totale

$m\, c\, (T_f - T_i) + C_{gas} (T_f - T_i)=0$

dove stavolta $C_{gas}=nc_v = n\, 3/2\, R= 125$ J/K

$T_f = 643$ K, come atteso.

Soluzione 3

a) La linea che congiunge i punti A e P passa per una superficie equipotenziale per la lamina, quindi $(V_P\text{-}V_A)_\sigma = 0$, ecco perché non è necessario conoscere il valore di σ.
$(V_P\text{-}V_A)_\rho = (V_P)_\rho - (V_A)_\rho = \frac{3\, k_0 Q}{2R} - \frac{k_0 Q}{d}$, dove Q è la carica della sfera uniformemente carica, ovvero
$Q = \rho\, V = \rho\, 4/3\, \pi\, R^3 = 9.00 \cdot 10^{-3}\, 4/3\, \pi\, (0.04)^3 = 2.41\; 10^{-6}$ C
$(V_P)_\rho - (V_A)_\rho = \frac{3\, k_0 Q}{2R} - \frac{k_0 Q}{d} = \frac{3 \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot 2.41 \cdot 10{-6}}{0.08} - \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 2.41 \cdot 10{-6}}{0.1} = 5.96 \cdot 10^5\; V$

b) In A la carica è spinta verso il basso dalla propria forza peso e verso l'alto dalla forza elettrostatica, generata dalla risultante dei campi elettrici generati dalla lamina e dalla sfera in A. All'equilibrio le due forze si devono bilanciare in tutte le direzioni. La forza elettrostatica totale deve quindi essere nulla nella direzione orizzontale del disegno e avrà solo la componente verso l'alto che bilancia la forza peso (punto c)) di sotto. Per calcolare il modulo del campo totale in A si considera che il campo della sfera è diretto in modo radiale da essa e uscente, pertanto la densità di carica della lamina deve essere necessariamente positiva e avere modulo che si può trovare bilanciando le forze, ovvero i campi elettrici, nella direzione orizzontale del disegno:
$$\frac{|\sigma|}{2\varepsilon_0}\cos(45°) = \frac{k_0|Q|}{d^2}\cos(45°)$$
$$\frac{|\sigma|}{2\varepsilon_0} = \frac{|Q|}{4\pi\varepsilon_0 d^2}$$
$|\sigma| = \frac{|Q|}{2\pi d^2} = \frac{2.41 \cdot 10^{-6}}{2\pi(0.1)^2} = 38.4 \cdot 10^{-6}$ C/m²

c) Affinché la risultante delle forze sia nulla lungo la direzione verticale, si deve avere:
$$F_{peso} = mg = F_{Coulomb} = |q||E_A,y|$$
$$\frac{|\sigma|}{2\varepsilon_0}\cos(45°) + \frac{k_0|Q|}{d^2}\cos(45°) = |E_{A,y}| = mg/|q|$$
$$2\frac{|\sigma|}{2\varepsilon_0}\cos(45°) = mg/|q|$$
$$\frac{|\sigma|}{\varepsilon_0}0.707 = mg/|q|$$
$$m = \frac{|\sigma||q|}{g\varepsilon_0}0.707 = 47.0\; g$$