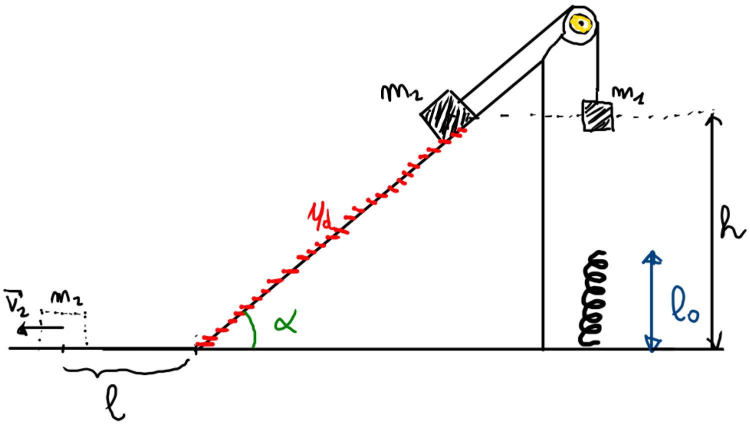
Esame del corso di Fisica per Scienze biologiche – 03 Maggio 2023
Proff. M. G. Betti, M. De Luca, F. Frasca, R. Maoli, L. Graziani, G. De Gasperis

Esercizio 1

Una massa puntiforme m_1 sospesa è collegata, tramite una carrucola avente fune inestensibile e di massa trascurabile, a una massa puntiforme m_2 = 500 g che si trova ferma su un piano inclinato di angolo α = 60.0° (vedere figura). All'equilibrio, le due masse si trovano alla stessa altezza h = 2.50 m. Sotto m_1 è presente una molla a riposo, di lunghezza a riposo l_0 = 1.00 m. Si calcoli:



a) il valore della massa m_1 e la tensione della fune all'equilibrio, supponendo che non agisca alcuna forza di attrito statico.

A un certo istante la corda si rompe: la massa m_2 inizia a scivolare sul piano inclinato scabro (avente coefficiente di attrito dinamico μ_d=0.250); la massa m_1 in caduta libera raggiunge la molla e la comprime.

Si calcoli

b) la velocità della massa m_1 nell'istante subito prima di toccare la molla;
c) la costante elastica della molla, supponendo che la lunghezza totale finale della molla compressa sia nulla;
d) l'accelerazione della massa m_2 lungo il piano inclinato e la velocità v_2 (vedere figura) di m_2 dopo aver percorso l = 1.00 m lungo il tratto rettilineo orizzontale privo di attrito.

Esercizio 2

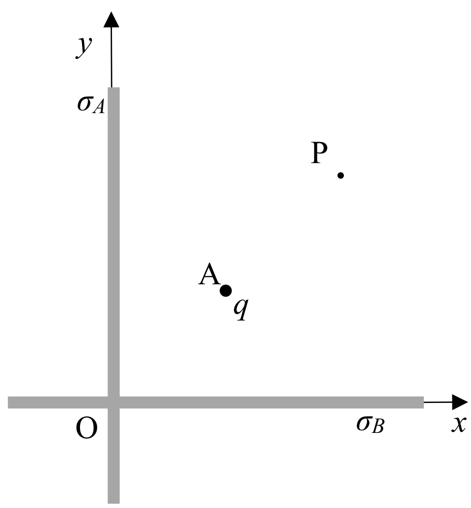
Quattro moli di un gas perfetto biatomico sono contenute in un recipiente e compiono il seguente ciclo termodinamico costituito da quattro trasformazioni:

1- una espansione isobara AB con pressione iniziale pari a p_A = 4.00 atm e volume iniziale V_A=20.0 l;
2- una trasformazione isocora BC verso una temperatura minore con pressione finale p_c = 2.00 atm e volume finale V_C = 60.0 l;
3- una compressione isobara CD;
4- una trasformazione isocora verso una temperatura maggiore.

a) Si rappresenti graficamente il ciclo ABCDA nel piano di Clapeyron pV.
b) Si determini la temperatura T_D.
c) Si calcoli il lavoro compiuto nel ciclo.
d) Si calcoli la variazione di energia interna, il lavoro e calore scambiati nella compressione isobara CD commentando i risultati.

Esercizio 3

Due lamine piane infinitamente estese e uniformemente cariche sono disposte perpendicolarmente tra loro. La due lamine verticale e orizzontale hanno rispettivamente densità di carica superficiale σ_A e σ_B e in un sistema di assi cartesiani hanno equazione x = 0 e y = 0 (si veda figura).



In un punto A, di coordinate (d, d), con d = 5.40 m, è posta una carica puntiforme di carica q = -3.60·10^{-6} C e massa m = 7.00·10^{-7} kg.

a) Sapendo che nel punto P = (2d, 2d) il campo elettrico totale è nullo, calcolare le densità σ_A e σ_B.
b) Calcolare la differenza di potenziale totale tra il punto P e l'origine, V(P) – V(O).

A un certo istante la carica q si mette in moto partendo da ferma.

c) Trovare il punto in cui la carica arriva sul sistema di due lamine e la sua velocità in questo punto.

Soluzioni Esercizio 1

a) Per m_1 all'equilibrio vale: $-m_1 g + T = m_1 a = 0$
Per m_2 all'equilibrio vale: $m_2 g\ sen\ \alpha - T = m_2 a = 0$, da cui
$$T = m_2 g\ sen\ \alpha = 4.25\ N$$
E quindi $m_1 = \frac{T}{g} = 0.43\ kg$

b) Sul sistema m_1e molla agiscono solo forze conservative, quindi l'energia meccanica totale si conserva in ogni istante. Prima che m_1 tocchi la molla, la molla è a riposo quindi non va considerata nel computo dell'energia meccanica totale. Riguardo m_1 invece la sua energia potenziale iniziale si trasforma in energia potenziale piu' cinetica:
$$m_1 g h = m_1 g l_0 + \frac{1}{2} m_1 v^2$$

$$v = \sqrt{2g(h - l_0)} = 5.42\ \text{m/s}$$

c) Successivamente la molla si comprime, e al punto di massima compressione la massa avrà energia cinetica nulla. Se la lunghezza finale della molla compressa è circa nulla, la molla si comprime di un tratto pari a l_0 e la massa toccherà praticamente il suolo (energia potenziale nulla). Applicando la conservazione dell'energia meccanica al sistema massa + molla si ha:
$$m_1 g h = \frac{1}{2} k {l_0}^2,$$

Da cui $k = 21.1 \frac{N}{m}$

d) Scegliendo l'asse x orientato lungo la direzione discendente del piano inclinato e con origine nel punto di partenza di m_2, la risultante delle forze lungo x è
$$R_x = m_2 g\ sen\ \alpha - \mu_d m_2 g cos\ \alpha = m_2 a.$$

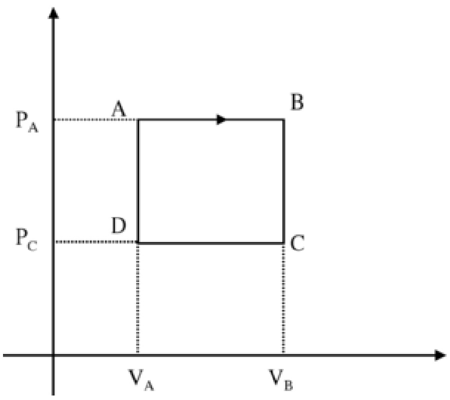
Quindi il modulo dell'accelerazione vale 7.27 m/s^2.

E direzione e verso sono come l'asse x. Il modulo è costante perché ci sono solo forze costanti, ed è quindi un moto uniformemente accelerato lungo x, che parte con velocità nulla.
Le equazioni del moto ci consentono di trovare tempo impiegato t_f per arrivare a terra (non richiesto ma comunque utile) e la velocità v_f di m_2 immediatamente alla base del piano inclinato:
$$x(t_f) = \frac{h}{sen\ \alpha} = \frac{1}{2} a t_f^2$$
Da cui $t_f = \sqrt{\frac{2h}{a sen\ \alpha}} = 0.90\ s$
E $v_f = a t_f = 6.48\ m/s$
Questa è anche la v_2 velocità di m_2 sul tratto rettilineo, in quanto quel tratto e' privo di attrito e di altre forze orizzontali, quindi il moto procede con velocita' costante per la prima legge della dinamica. Non viene quindi utilizzato il dato sul tratto l percorso.

In alternativa si poteva trovare la velocità v_f con un approccio energetico:
$$E_f = E_i + L_{Fd}$$
$$\frac{1}{2} m_2 {v_f}^2 = m_2 g h_i - \mu_d m_2 g cos\ \alpha \frac{h}{sen\ \alpha}$$

Soluzione Esercizio 2

a) Si rappresenti graficamente il ciclo nel piano di Clapeyron PV



$p_D = p_c = 2$ atm $p_A = p_B = 4$atm $V_D = V_A = 20$ l $V_B = V_C = 20$ l

b) Si determini la temperatura T_D

Dall'equazione di stato dei gas perfetti PV=nRT ricaviamo T_D

$p_D = 2$ atm $V_D = 20$ l n=4moli

$T_D = 121.9$ K

c) Il lavoro compiuto nel ciclo

$L_{AB} = (V_B - V_A)\ p_{A=}$ 16228 J

$L_{BC} = L_{DA} = 0$

$L_{\ DC} = (V_D - V_C)\ p_c = -\ 8114$ J

$L_{tot} = L_{AB} + L_{BC} + L_{CD} + L_{DA} = 8114$J

Oppure calcolando l'area del rettangolo

$L_{tot} = (V_D - V_C)\ (p_C - p_B) = 8114$J

d) La variazione di energia interna, il lavoro e la quantità di calore scambiata nella compressione isobara CD considerando che il gas è biatomico e che $c_V = 5/2R$ e $c_P = 7/2R$

$\Delta U = nc_V(T_D - T_C) = -\ 20287$J

$L = (V_D - V_C)\ p_c = -\ 8114$ J

$Q = nc_p(T_D - T_C) = -28402$

Soluzione Esercizio 3

a) Nel punto P il campo prodotto dalla lamina verticale controbilancia la componente orizzontale del campo prodotto dalla carica q, mentre il campo della lamina orizzontale controbilancia la componente verticale del campo prodotto dalla carica q. Considerando che in P il campo di q ha un'inclinazione di 45°, le due densità di carica sono uguali e si ottengono dalla condizione

$$\frac{\sigma_A}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma_B}{2\varepsilon_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q|}{2d^2}\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sigma_A = \sigma_B = \frac{\sqrt{2}}{8\pi}\frac{|q|}{d^2} = 6.95 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{C/m^2}$$

b) In P e in O il potenziale della carica puntiforme è uguale e quindi non contribuisce alla differenza di potenziale. Usando il principio di sovrapposizione la differenza di potenziale è data dal contributo della lamina verticale e dal contributo della lamina orizzontale. I due contributi sono uguali e si ottiene:

$$V(P) - V(O) = 2\left[-\frac{\sigma_A}{2\varepsilon_0}2d\right] = -8480\ \mathrm{V}$$

c) La carica q parte da ferma e si muove nella direzione della forza data da qE_{lamine}, cioè lungo la bisettrice del primo quadrante arrivando così a toccare le lamine nell'origine. La velocità in questo punto si può calcolare in due modi:

-considerando che il moto è uniformemente accelerato con $a = \frac{|q|}{m}E_{lamine} = \frac{|q|\sigma\sqrt{2}}{2\varepsilon_0 m} = 2.86 \cdot 10^3\ \mathrm{m/s^2}$

e quindi $v_O = \sqrt{2ad\sqrt{2}} = 209\ \mathrm{m/s}$;

- Utilizzando la conservazione dell'energia meccanica tra P e O:

$$v = \sqrt{\frac{2q}{m}[V(A) - V(O)]} = 209\ \mathrm{m/s}$$

avendo utilizzato la relazione $V(A) - V(O) = \frac{1}{2}[V(P) - V(O)] = -4240\ \mathrm{V}$