Formulario di Fisica: Elettromagnetismo

Lorenzo Caprini - Chiara Ciano

31 maggio 2016

1 Elettrostatica

- Forza elettrostatica tra due cariche, q_1 e q_2, puntiformi a distanza r:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\,\hat{r}, \qquad \epsilon_0 = 8.85\cdot 10^{-12}\frac{C^2}{N\cdot m^2} \tag{1}$$

- Densitá di carica di volume ρ, di superficie σ e lineare λ:

$$\rho = \frac{dq}{dV}, \qquad \sigma = \frac{dq}{dS}, \qquad \lambda = \frac{dq}{dl} \tag{2}$$

- Campo elettrico generato da una sorgente di carica Q puntiforme, in un punto A a distanza r :

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}\,\hat{r}, \qquad [\vec{E}] = \frac{N}{C} = \frac{V}{m} \tag{3}$$

- Flusso del campo elettrico attraverso una superficie, A, orientata:

$$\Phi(\vec{E})_A = \int_A \vec{E}(\vec{r})\cdot\hat{n}\,dS \tag{4}$$

  - Se il campo é parallelo alla normale alla superficie:

$$\Phi(\vec{E})_A = \int_A |\vec{E}(\vec{r})| dS \tag{5}$$

  - Se il campo é costante

$$\Phi(\vec{E})_A = |E(\vec{r})|\, S \tag{6}$$

- Teorema di Gauss (flusso di E attraverso una superficie chiusa)

$$\Phi(E)_A = \oint_A \vec{E}(\vec{r})\cdot\hat{n}\,dS = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \tag{7}$$

  $\hat{n}$ é uscente

- Esempi di campi elettrici
  - Campo elettrico da una sfera carica in un punto P INTERNO a distanza $r<$ raggio, R (carica distribuita all'interno del volume):

$$\vec{E}(r) = \frac{\rho\vec{r}}{3\epsilon_0} \tag{8}$$

  - Campo elettrico da una sfera carica in un punto P INTERNO a distanza $r<$ raggio, R (carica distribuita SOLO sulla superficie):

$$\vec{E}(r) = 0 \tag{9}$$

  - Campo elettrico da una sfera carica in un punto P ESTERNO a distanza r (r é la distanza tra il centro della sfera e il punto):

$$\vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}\,\hat{r} \tag{10}$$

- Campo elettrico da un filo infinito in un punto P a distanza r:

$$\vec{E}(r) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{r}\,\hat{r} \tag{11}$$

- Campo elettrico da una lamina infinita:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{n} \tag{12}$$

- Lavoro della forza elettrostatica

$$L_{AB} = \int_A^B \vec{F}_e \cdot d\vec{s} = q\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\Delta U^e_{AB} \tag{13}$$

- Energia potenziale e potenziale elettrico

$$\Delta U^e_{AB} = q\Delta V_{AB} \tag{14}$$

$$V_{AB} = \; V_B - V_A \; = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{s} \tag{15}$$

- Esempi di potenziali elettrici (considerando l'altro punto all'infinito $\Rightarrow$ V(∞)=0)
  - Potenziale elettrico da una carica puntiforme Q in un punto che si trovi a distanza r dalla carica:

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r} \tag{16}$$

  - Potenziale elettrico da una sfera carica in un punto P INTERNO a distanza $r<$ raggio, R (carica distribuita all'interno del volume):

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{2R}\left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right) \tag{17}$$

  - Potenziale elettrico da una sfera carica in un punto P ESTERNO a distanza r (r é la distanza tra il centro della sfera e il punto):

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r} \tag{18}$$

  - Potenziale elettrico da un filo infinito in un punto P a distanza r:

$$V(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln r \tag{19}$$

  - Potenziale elettrico da una lamina infinita:

$$V(x) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\cdot x \tag{20}$$

- Alcune proprietá dei conduttori:

$$\vec{E}_{int} = 0 \Longrightarrow V_{int} = V_{sup} = cost \tag{21}$$

$$Teorema\,di\,Coulomb \Rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\cdot\hat{n} \tag{22}$$

$$Conduttore \quad cavo \Rightarrow \quad Q_{int} = 0, \qquad \vec{E} = 0, \qquad V_{int} = V_{superficie} = cost \tag{23}$$

- Capacitá elettrostatica:

$$C = \frac{Q}{V} \qquad [C] = \frac{C}{V} = F\ (Farad) \tag{24}$$

  - capacitá elettrostatica di un conduttore sferico di raggio R:

$$C = 4\pi\epsilon_0 R \tag{25}$$

  - capacitá di un condensatore piano con le armature di superficie S e poste a distanza d:

$$C = \epsilon_0\cdot\frac{S}{d} \tag{26}$$

- capacitá di un condensatore sferico con le armature di raggio r_1 e r_2 $(r_2 > r_1)$:

$$C = 4\pi\epsilon_0 \cdot \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} \tag{27}$$

- capacitá di un condensatore cilindrico con le armature di raggio r_1 e r_2 $(r_2 > r_1)$ e altezza h:

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \tag{28}$$

- Energia elettrostatica immagazzinata da un condensatore:

$$U^e = \frac{Q^2}{2C} = \frac{C\Delta V^2}{2} = \frac{Q\Delta V}{2} \tag{29}$$

- Circuiti con condensatori
  - n condensatori in serie ciascuno con capacitá (C_1, C_2 ,..., C_n):

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + ... + \frac{1}{C_n} \qquad \Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 + ... + \Delta V_n \tag{30}$$

  - n condensatori in serie ciascuno con capacitá (C_1, C_2,...,C_n):

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + ... + C_n \qquad Q = Q_1 + Q_2 + ... + Q_n \tag{31}$$

2 Corrente e leggi di Ohm

- Corrente elettrica:

$$i = \frac{dQ}{dt} \implies [i] = \frac{C}{s} = A\,(Ampere) \tag{32}$$

- Resistenza elettrica di un filo conduttore alle cui estremitá é applicata una differenza di potenziale ΔV e in cui scorra una corrente i:

$$R = \frac{\Delta V}{i} \implies [R] = \frac{V}{A} = \Omega\,(Ohm) \tag{33}$$

- Leggi di Ohm
  - Prima legge di Ohm:

$$\Delta V = Ri \tag{34}$$

  - Seconda legge di Ohm (resistenza di un filo metallico di lunghezza l, sezione S e resistivitá ρ):

$$R = \rho \cdot \frac{l}{S} \implies [\rho] = \Omega m \tag{35}$$

- Circuiti con resistenze
  - n resistenze in serie (R_1, R_2 ,..., R_n) attraversate dalla stessa corrente i:

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + ... + R_n \qquad \Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 + ... + \Delta V_n \tag{36}$$

  - n resistenze in parallelo (R_1, R_2 ,..., R_n) ai cui capi c' é la stessa differenza di potenziale ΔV:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + ... + \frac{1}{R_n} \qquad i = i_1 + i_2 + ... + i_n \tag{37}$$

- Generatore di tensione ideale
  - Lavoro compiuto per unitá di carica per far scorrere corrente in un circuito (FORZA ELETTROMOTRICE):

$$f = \frac{L}{Q} = \Delta V \implies [f] = V \tag{38}$$

  - Potenza erogata dal generatore:

$$P = fi \implies [P] = \frac{J}{s} = W\ (Watt) \tag{39}$$

- Effetto Joule: potenza dissipata da una resistenza R in un circuito

$$P = i\Delta V = i^2 R = \frac{\Delta V^2}{R} \implies [P] = \frac{J}{s} = W\ (Watt) \tag{40}$$

3 Magnetismo

- Campo magnetico generato da un filo infinito rettilineo percorso da corrente elettrica i (legge di Biot-Savart):

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i}{r}\,\hat{\ell} \times \hat{r} \quad \Longrightarrow \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\frac{N}{A^2} \tag{41}$$

ℓ versore che indica la direzione della corrente elettrica

$$[B] = \frac{N}{A \cdot m} = T\,(Tesla) \quad oppure \quad [B] = G\,(Gauss) \quad \Rightarrow \quad 1G = 10^{-4}T \tag{42}$$

- Campo magnetico generato da un circuito di forma qualsiasi considerando un tratto di filo $\vec{dl}$ percorso da corrente i e un vettore $\vec{r}$ che unisce dl al punto in cui si vuole calcolare il campo (Prima Legge di Laplace):

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i}{r^3}\,\vec{dl} \times \vec{r} \tag{43}$$

- Seconda legge di Laplace: la forza magnetica generata da un tratto di circuito di lunghezza infinitesima dl percorso da una corrente i

$$d\vec{F}_{\text{magn}} = i\vec{dl} \times \vec{B} \tag{44}$$

  - Nel caso di un tratto di circuito di lunghezza L l'espressione diventa:

$$\vec{F}_{\text{magn}} = i\vec{L} \times \vec{B} \tag{45}$$

  - La forza esercitata tra due fili posti a distanza d in cui scorrono due correnti i_1 e i_2, rispettivamente:

$$\frac{\vec{F}}{L} = -\frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi d}\hat{r} \tag{46}$$

    il segno - indica che la forza é attrattiva se le due correnti scorrono nello stesso verso; se le correnti scorrono in verso opposto la forza é repulsiva

- Campo magnetico al centro di una spira circolare di raggio r in cui scorre una corrente i:

$$B = \mu_0\frac{i}{2r} \tag{47}$$

- Teorema di Gauss per il campo magnetico

$$\Phi(\vec{B})_{A,chiusa} = \oint_A \vec{B} \cdot \hat{n}\,dA \;=\; 0 \quad \Rightarrow \quad [\Phi(\vec{B})] = Wb\,(Weber) \tag{48}$$

- Teorema di Ampere: la circuitazione del vettore $\vec{B}$ lungo una linea chiusa orientata l é

$$C = \oint_l \vec{B} \cdot \vec{ds} = \mu_0 i \tag{49}$$

  - Generalizzazione del teorema di Ampere a tutte le correnti concatenate alla linea:

$$C = \mu_0 \sum_k i_k \tag{50}$$

- Campo magnetico di un solenoide infinito costituito da n spire per unitá di lunghezza
  - Campo esterno al solenoide:

$$B = 0 \tag{51}$$

  - Campo interno al solenoide (parallelo all'asse del solenoide):

$$B = \mu_0 i n \tag{52}$$

- Campo magnetico di un toroide costituito da N spire
  - Campo esterno al toroide:

$$B = 0 \tag{53}$$

- Campo interno al toroide (parallelo all'asse del toroide):

$$B = \frac{\mu_0 N i}{2\pi r} \tag{54}$$

- Forza di Lorentz su una carica q che si muove con velocitá v sottoposta ad un campo magnetico B

$$\vec{F_L} = q\vec{v} \times \vec{B} \tag{55}$$

  - La forza di Lorentz non compie lavoro perché é sempre ortogonale alla velocitá e quindi alla direzione del moto.
  - Se B é perpendicolare a v la forza di Lorentz é diretta radialmente e la particella compie un moto circolare uniforme. (v=cost)

- Formule del ciclotrone

$$raggio\ della\ traiettoria\ percorsa \qquad \Rightarrow \qquad r_L = \frac{mv_\perp}{|q|B} \tag{56}$$

  Il raggio dipende solo dal modulo della carica; il segno della carica determina il verso in cui viene deflessa la particella: circonferenza percorsa in senso orario (carica positiva), antiorario (negativa) intorno alle linee di forza del campo magnetico.

$$velocita'\ angolare\ del\ moto\ circolare \qquad \Rightarrow \qquad \omega = \frac{|q|B}{m} \tag{57}$$

$$periodo\ del\ moto\ circolare \qquad \Rightarrow \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{|q|B} \tag{58}$$

4 Equazioni di Maxwell

$$\Phi(\vec{E})_A = \oint_A \vec{E}(\vec{r}) \cdot \hat{n}\, dA = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \tag{59}$$

$$\Phi(\vec{B})_{A,chiusa} = \oint_A \vec{B} \cdot \hat{n}\, dA \,=\, 0 \tag{60}$$

$$\oint_l \vec{E} \cdot \vec{ds} = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} \tag{61}$$

$$\oint_l \vec{B} \cdot \vec{ds} = \mu_0 i_{conc} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{d\Phi(\vec{E})}{dt} \tag{62}$$

Se i campi sono statici (per esempio si é in condizioni di correnti costanti e il campo elettrico non é variabile) le equazioni di Maxwell sono stazionarie e le formule della circuitazione dei campi cambiano nel seguente modo:

$$\oint_l \vec{E} \cdot \vec{ds} = 0 \tag{63}$$

$$\oint_l \vec{B} \cdot \vec{ds} = \mu_0 i_{conc} \tag{64}$$